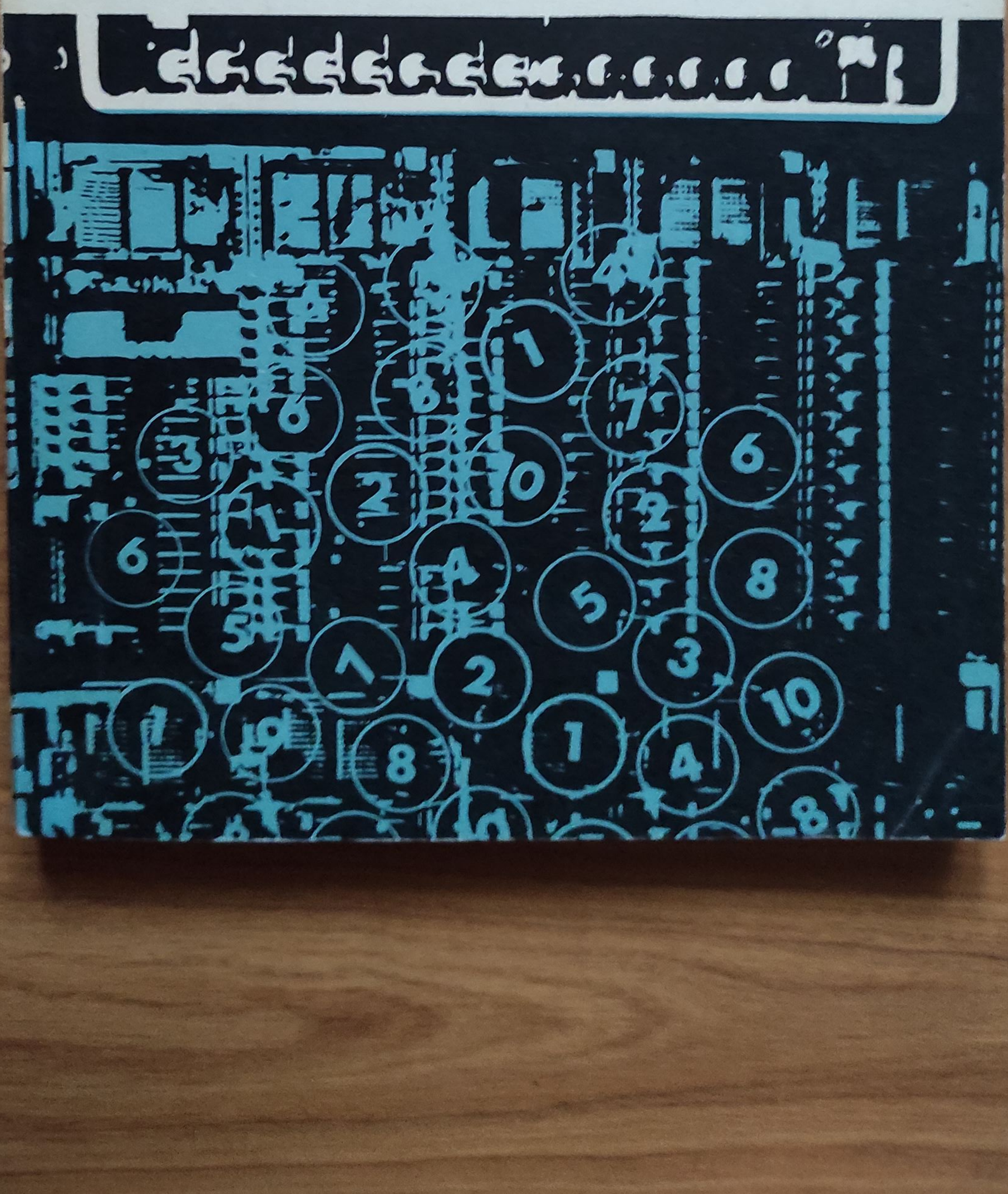
DAN SÂNGEORZAN

ECHIPAMENTE DE REGLARE NUMERICĂ



DAN SÂNGEORZAN

ECHIPAMENTE DE REGLARE NUMERICĂ

Proiectare sistemică

EDITURA MILITARĂ, BUCUREŞTI, 1990

Ştefan Iuga 1991-USI

PREFAȚĂ

Lucrarea intenționează să realizeze o interfațare a teoriei moderne a sistemelor — mai exact, a părții validate în automatizările industriale — cu practica proiectării produselor de automatică, fiind axată pe componenta de bază a noului sistem unificat de reglare numerică — regulatoarele automate digitale. În context cu această interfațare, autorul propune completarea proiectării hardware și software a echipamentelor de reglare numerică cu proiectarea sistemică, avînd imediate extensii teoretice și practice în proiectarea oricărui sistem de conducere a proceselor. Sînt surprinse aspectele esențiale, îndeosebi sistemice, ale proiectării regulatoarelor digitale, nu numai la nivelul algoritmilor de reglare implementați, ci și la cel al hardware-ului și software-ului, care creează implicit efecte ce nu pot fi neglijate. Algoritmii de reglare numerică prezentați în paginile volumului sînt atît cei consacrați și validați practic — analizați critic din toate punctele de vedere ale implementării lor — , cît și algoritmi concepuți de autori sau de diverși specialiști în domeniu.

În lucrare mai sînt abordate sistemele multivariabile discrete, cu interacțiuni între bucle, fiind prezentate metode originale care permit proiectarea regulatoarelor digitale multivariabile (multicanal) printr-o metodologie teoretică și practică foarte eficientă atît din punc de vedere sistemic, cît și din punctul de vedere al efortului de proiectare.

Cadrul de proiectare sistemică este fundamentat exclusiv pe teoria modernă a sistemelor discrete, singura capabilă să soluționeze proiectarea echipamentelor de reglare numerică.

Actualitatea lucrării, tematica sa ancorată unui domeniu aflat în plină dezvoltare și afirmare, multitudinea aspectelor abordate, la care se adaugă analiza critică, riguroasă, a unei bogate și reprezentative bibliografii îndreptățesc convingerea că ea va deveni un instrument de lucru util specialiștilor automatiști și electroniști din armată și din economia națională, precum și studenților din învățămîntul tehnic superior de specialitate.

Col. dr. ing. IOAN ARON

Capitolul 1

REGULATOARE DIGITALE

Tendințele timpurii în proiectarea conducerii proceselor erau subordonate strategiei conducerii centralizate. Invalidarea acestei strategii într-o serie de aplicații industriale a determinat trecerea — fundamentată teoretic și practic — la conducerea distribuită implementată într-o structură ierarhizată multinivel.

Una din cauzele abandonării conducerii centralizate a proceselor este fiabilitatea relativ scăzută — în raport cu cea necesară în proces — a calculatoarelor universale. Dacă acestea au o siguranță în funcționare de ordinul 85% ... 90%, calculatoarelor de proces li se impune o siguranță în funcționare de aproximativ 99% [6] sau chiar 99,5% [5].

Proiectarea logică și structurală, precum și cea a programelor de serviciu trebuie să asigure un timp mediu de bună funcționare între două avarii de ordinul 1 000 ÷ 2 000 ore [5]. Totodată, este necesar ca defectul să fie înlăturat cît mai repede, perioada medie de reparare fiind de circa 5 ore [5]. Se impune ca defectele să fie sesizate în timpul cel mai scurt prin sisteme de detectare *on-line*, deci prin autodiagnosticare [2].

Soluția conducerii centralizate — o singură unitate de prelucrare a informației — prezintă și fenomenul saturației datorită *task*-urilor de timp real, care solicită multiplexat atît resursele principale ale modulelor de intrare/ieșire, cît și cele ale unității centrale unice. Acest fapt face ca modulele *hardware* și *software* utilizate în comun de diversele *task*-uri de timp real să fie puncte nevralgice ale schemelor de conducere cu calculatoare de proces, influențînd negativ fiabilitatea.

Structura tipică de conducere centralizată cu calculator de proces a unui proces complex multivariabil este descrisă în fig. 1.1.

Teoria sistemelor ierarhizate [1], conjugată cu practica automatizărilor industriale, duce la modificarea structurii centralizate de conducere, într-o structură ierarhizată de conducere distribuită (fig. 1.2), care constă în divizarea sarcinii de conducere între mai multe componente (dispozitive fizice) pe mai multe niveluri executive și decizionale [9].

Pe nivelul ierarhic inferior există componentele de execuție, procesoare de execuție, care sînt *R*egulatoarele *D*igitale (RD) cu microprocesoare încorporate, iar nivelul ierarhic superior de conducere coordonează această exe-

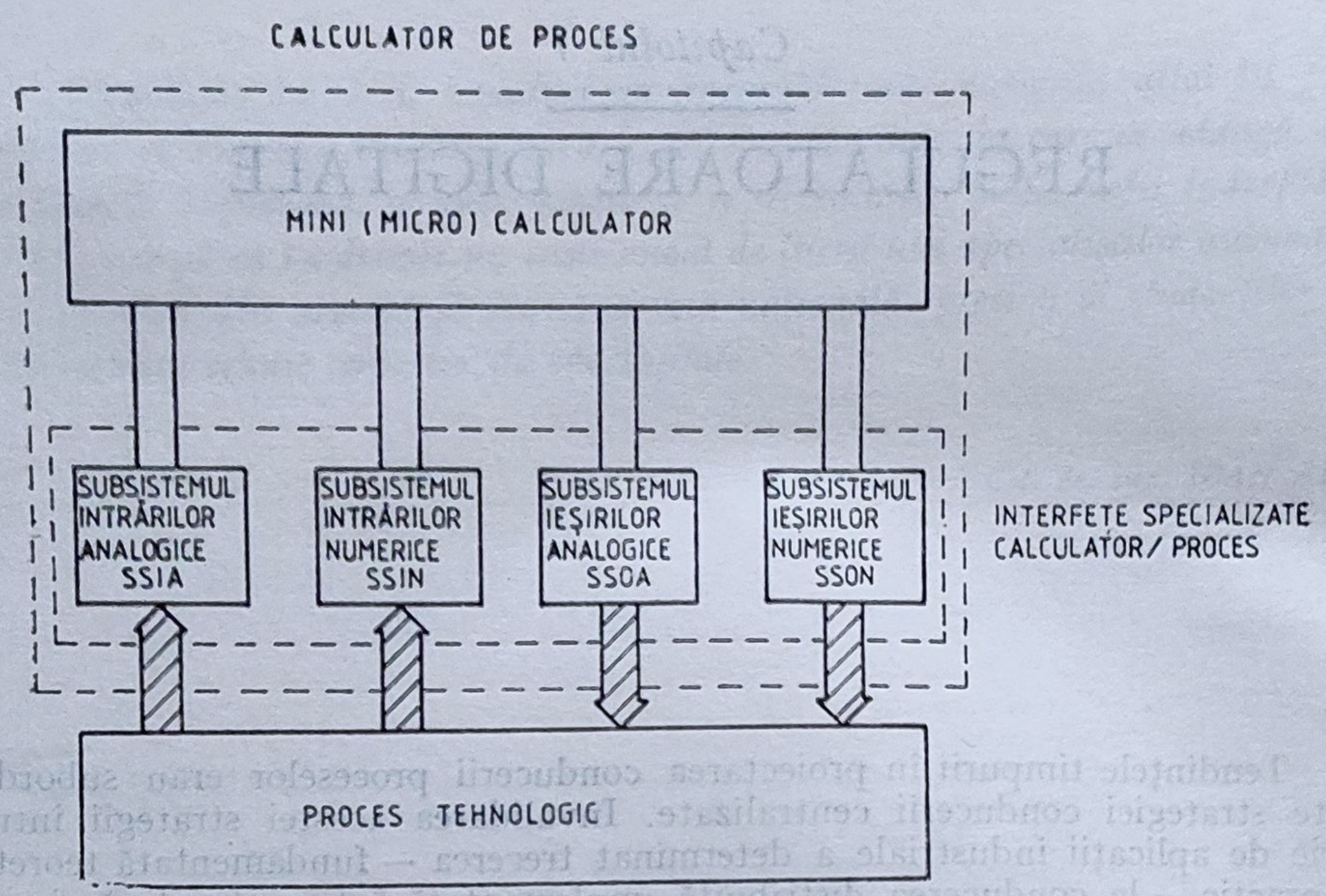


Fig. 1.1

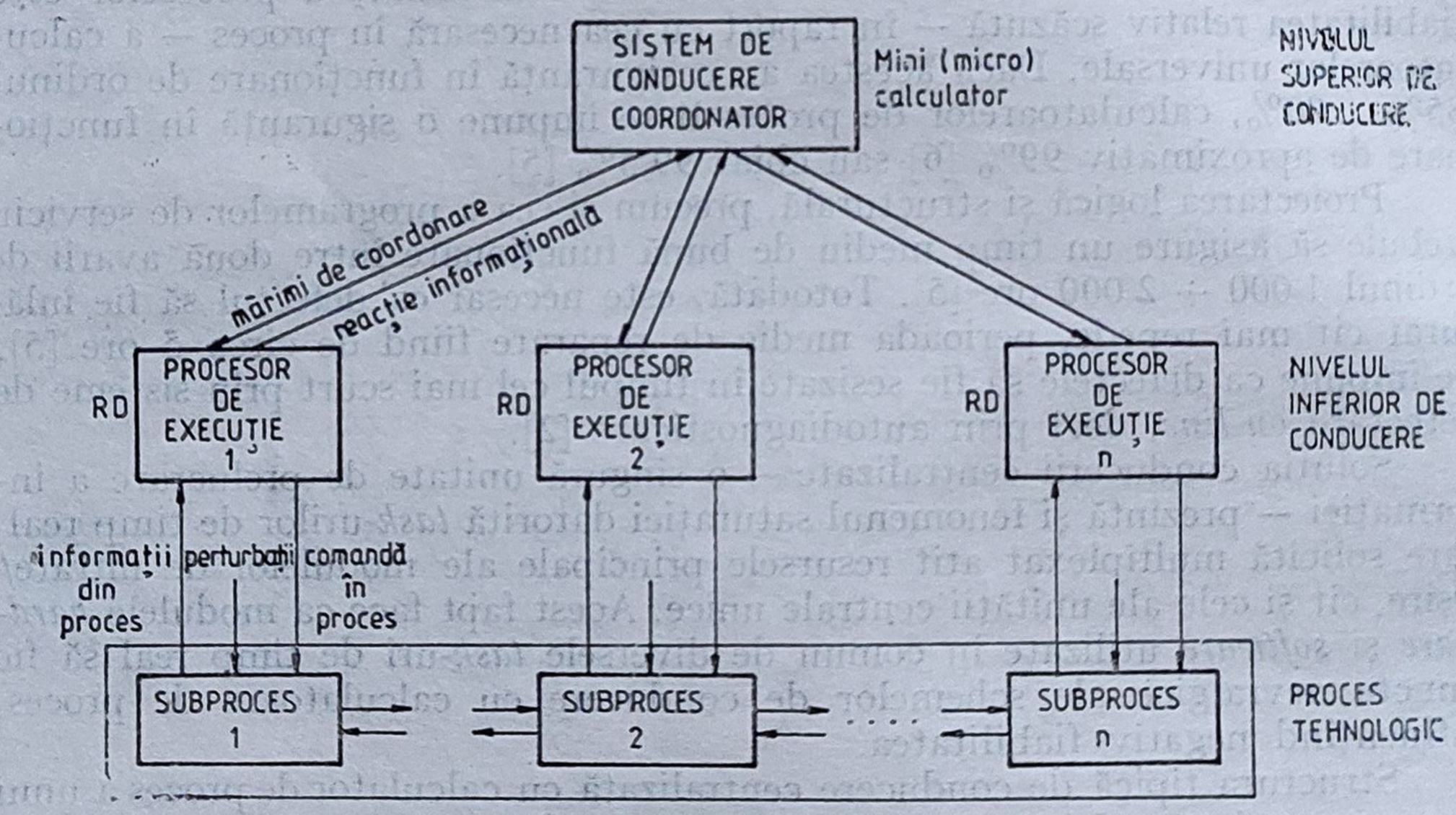


Fig. 1.2

cuție, în ansamblu, printr-un procesor de coordonare, mini sau microcalculator.

Divizarea sarcinii de conducere este determinată de divizarea procesului condus în subprocese care se condiționează reciproc. Fiecare subproces este condus de către un procesor de execuție — RD mono sau multicanal —, care furnizează nivelului ierarhic superior o reacție informațională, sintetică.

Procesorul de execuție, de pe nivelul subordonat, elaborează comanda în proces pe baza informațiilor preluate din subprocesul afectat lui și a informației primite de la procesorul coordonator. Între procesoarele de execuție ale nivelului primar nu există o comunicație directă, ea făcîndu-se — dacă este necesar — prin intermediul procesorului coordonator.

Nivelul ierarhic superior rezolvă atît problemele de optimizare globală ale întregului sistem de conducere, cît și pe cele conflictuale ale nivelului subordonat.

Repartizarea diverselor *task*-uri de execuție ale nivelului primar se face și fizic prin implementarea lor distribuită în teren, în funcție de subprocesele distincte ale procesului condus.

Datorită implementării procesoarelor de execuție sub aspectul RD, folosind microprocesoare de serie, de uz general, într-un grad de miniaturizare în creștere, aceste subsisteme de conducere primară au devenit entități fizice cu caracteristici bine definite, ce pot fi plasate în proces, în imediata apropiere fizică a subprocesului condus sau în camere de comandă.

Mărimile de referință externe ale RD într-un sistem distribuit de conducere sînt emise, de regulă, de nivelul superior, fiind rezultatul unor strategii de optimizare analitică a lor, strategii care ar solicita resurse excesiv de mari RD, imposibil de executat în timpii reali ai subproceselor conduse, dar facil executate de nivelul coordonator, căruia nu i se impune restricția de execuție în timp real.

Deoarece fiecare RD afectat cîte unui subproces este încărcat în limitele unei puteri de calcul estimate apriori, rezultă posibilitatea executării facile de către RD a tuturor *task*-urilor de timp real aferente subprocesului căruia îi este dedicat, acest lucru fiind posibil datorită proiectării mult mai flexibile a structurii distribuite de conducere. În consecință, nu apar diferențe între timpii de execuție ai *task*-urilor și timpul real de desfășurare a subprocesului respectiv, ca și în cazul calculatoarelor de proces, afectate conducerii unor procese cu timpi reali foarte apropiați valoric. În concluzie, în structurile de conducere distribuită a proceselor, RD sînt procesoarele de execuție ale nivelului primar al structurii. Ele nu s-au impus numai ca o soluție de remediere a deficiențelor structurii centralizate de conducere, ci și din punct de vedere economic. Fiind dotate cu microprocesoare, toate avantajele acestora — miniaturizare, preț de cost redus, consumuri mici, serii mari, flexibilitate ș.a. — se răsfrîng — din punct de vedere economic și constructiv — și în utilizarea lor în structurile distribuite. Prin puterea de calcul concentrată într-un gabarit foarte mic, consum și preț de cost scăzut, RD cu microprocesoare substituie regulatoarele analogice nu numai în conducerea distribuită a proceselor, unde și acestea pot fi prezente, ci și în reglarea individuală a unor parametri procesuali.

Utilizarea unui RD devine avantajoasă, cînd acesta substituie cel puțin trei unități autonome de reglare analogică [3]. Studii recente confirmă faptul că soluția numerică este indicată și în cazul unei singure bucle (monovariabile), în situațiile în care complexitatea algoritmilor de reglare depășește posibilitățile implementării lor pe cale analogică.

Tipurile mai noi de regulatoare digitale sînt dotate cu microcontrolere care înglobează atît unitatea centrală uzuală, cît și module ale interfețelor de intrare/ieșire, iar în aplicațiile de mare viteză, RD sînt dotate cu procesoare de semnal VLSI [4].

Datorită prețului de cost scăzut și a gabaritului mic, RD dispun de interfețe conversaționale simple, de regulă seriale. Algoritmii sînt memorați în memorii fixe (consum mic), programarea lor făcîndu-se în limbaje de nivel înalt, apoi, prin *CROSSCOMPILATOARE* sau *CROSSCODOARE*, software-ul de proces este memorat în limbaj-mașină.

Definirea netă a tipului de aplicație se face fie prin schimbarea memoriilor fixe, fie implementînd algoritmi de reglare cu utilizare cvasigenerală (de exemplu, PID). De regulă, programele de bază sînt memorate în memorii fixe de tip ROM, iar datele variabile ale aplicației de proces, în memorii de tip RAM, nevolatile, cu baterii-tampon sau REPROM.

Utilizarea în programarea de proces a limbajelor de nivel inferior are o serie de dezavantaje generate de varietatea proceselor reglate, ceea ce impune extinderea sau modificarea programelor, ușor realizabilă în cazul limbajelor de nivel înalt. Portabilitatea ridicată asigurată de acestea, necesitatea programării unor echipamente de conducere de către tehnologii de proces, puțin familiarizați cu programarea în limbaj-mașină, scăderea prețului de cost al echipamentelor de calcul au dus la creșterea ponderii utilizării limbajelor de nivel înalt.

Unele aspecte privind folosirea și standardizarea limbajelor de nivel înalt pentru conducerea proceselor sînt amplu descrise în [3], [5], [2].

În prezent, limbajele de nivel înalt sînt accesibile din punct de vedere economic îndeosebi în calculatoarele de proces și microcalculatoarele regulatoare.

Complexitatea algoritmilor de reglare implementați în RD, concretizată practic prin numărul operațiilor aritmetice elementare efectuate în limitele unei precizii cerute și în timp real, este puternic condiționată de performanțele componentelor structurii hardware a RD și în special de unitatea centrală și interfețele de intrare/ieșire.

Utilizarea algoritmilor de reglare structurali, folosind legi de comandă și reacție după stări estimate, implică un volum sporit de calcule și de memorie, față de cazul utilizării algoritmilor de reglare informaționali pentru procese monovariabile intrare/ieșire (i/e), dar devine în multe situații obligatorie pentru procesele multivariabile nedecuplate sau nedecuplabile [7]. Folosindu-se conceptele reglării robuste [7], dimensiunea vectorului de stare este mărită prin introducerea modelului de stare al mărimilor exogene măsurabile (referințe și perturbații) în literatură fiind descrise aplicații cu RD avînd algoritmi de reglare structurali [4].

Constatînd că la ora actuală preferințele proiectanților se îndreaptă spre algoritmi de reglare informaționali, sinteza algoritmilor de reglare se face, în principiu, după trei tendințe.

O primă tendință în sinteza discretă prezintă, într-un formalism matematic tipic sistemelor discrete, metodologiile și procedurile consacrate sintezei și analizei sistemelor continue, formalism creat printr-o suită de transformări complexe (z, w, r).

A doua tendință constă în utilizarea permanentă a formalismului matematic al analizei și sintezei sistemelor continue, abordare susținută de ipoteza de cvasicontinuitate [10].

A treia tendință are la bază folosirea unui formalism matematic aplicabil exclusiv sistemelor discrete, a căror comportare analitică trebuie stu-

diată cu precădere conform teoriei schemelor cu diferențe finite [12], [13], [14], [15], o teorie cu multe puncte comune cu teoria ecuațiilor diferențiale.

Trecînd în revistă nivelul actual al RD, în proiectarea lor *software* și *hardware* se constată următoarele direcții:

— reglează procese din ce în ce mai rapide, restricția fiind reflectată în valorile frecvenței maxime de eșantionare admisă de sistem, fără consecințe negative practice;

— încorporează algoritmi din ce în ce mai performanți—neliniari, adaptivi, multivariabili, structurali — prin care se poate aborda reglarea unor procese cu modele pretențioase din punct de vedere matematic, imposibil de reglat cu regulatoare simple, liniare, invariante;

— înglobează prin operații *software* cît mai multe din funcțiunile modulelor analogice din echipamentele clasice de automatizare: adaptoare de semnal, liniarizare, compensarea traductoarelor, elemente de raport, divizare, sumare ș.a.;

— tind să preia, în aceleași limite de gabarit și preț, funcții auxiliare de control și comandă automată pentru alți parametri procesuali, nu numai pentru cei reglați, cu evoluție binară — două niveluri de valori —, a căror supraveghere *in-line* sau *on-line* este utilă conducerii procesului;

— elimină schemele cu redondanță care folosesc RA analogice, ca rezervă în situația căderii RD, prin utilizarea în timp real a funcțiilor de autodiagnoză, menținerea coeficienților algoritmilor de reglare, a referinței și comenzilor în memorii nevolatile, dublarea alimentării prin rezervare, etaje de comandă manuală, foarte simple, cu alimentare pe baterii etc.

Cele cîteva deziderate enunțate devin realizabile din punct de vedere economic datorită tehnologiilor de tip LSI și VLSI implementate în componente cu prețuri din ce în ce mai scăzute.

BIBLIOGRAFIE

1. Mesarovič, M. D.; Macko, D.; Takahara, Y., *Theory of Hierarchical Multievel Systems*, Academic Press, 1970.

2. Ionescu, T., *Sisteme și echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.

3. Călin, S.; Dumitrache, I.; Nițu, C.; Munteanu F.; Iorga, V.; Dumitriu, S., *Reglarea numerică a proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1984.

4. Hanselmann, H., *Implementation of Digital Controllers—A Survey*, Automatica, 23, 1, 1987, p. 7-32.

5. Davidoviciu, A.; Diatcu, E.; Freidzon, I. R.; Filippov, L. G., *Minicalculatoarele și microcalculatoarele în conducerea proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1983.

6. Petrescu, A., *Calculatoare automate și programare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.

7. Ionescu, V., *Introducere în teoria structurală a sistemelor liniare*, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.

8. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eșantionare* (traducere din limba engleză), Editura Tehnică, București, 1967.

9. Ionescu, G. ș.a., *Automatica de la A la Z*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1987

10. Latzel, W., *Regelung mit Prozessrechner*, Zürich, 1977.

11. Sângeorzan, D. C., *Ipoteza lui Lotzel, o conjunctură?*, al II-lea simpozion, structuri, algoritmi și echipamente de conducere a proceselor, Iași, 1989.

12. Henrici, P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, Wiley, New York, 1964.

13. Moszynski, K., *Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare*, Editura Tehnică, București, 1973.

14. Godunov, S. K.; Reabenki, V. S., *Scheme de calcul cu diferențe finite*, Editura Tehnică București, 1977.

15. Marinescu, G., *Analiză numerică*, Editura Academiei R.S.R., București, 1974.

Capitolul 2

FACTORI DETERMINANȚI AI PRECIZIEI REGLĂRILOR NUMERICE

2.1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Precizia funcționării unui sistem digital de reglare depinde de o serie de factori, dintre care mai importanți sînt: algoritmii de reglare implementați, eroarea totală de calcul, forma internă de reprezentare a numerelor, lungimea cuvîntului de calculator, erorile de conversie ale mărimilor de intrare/ieșire din proces. Acestor factori li se adaugă calitatea sistemică a elementelor buclei automate, respectiv calitatea liniarizării caracteristicii și calibrării statice și dinamice a traductoarelor de proces și a elementelor de execuție. Fiecare din ei, unii în aparență cu funcționalitate independentă de cadrul sistemic al aplicației de automatizare, are o contribuție decisivă la obținerea calității finale, practice, a funcționării buclei automate. Neglijarea oricăruia, sub aspectul analizei și proiectării lor sistemice, conduce la funcționări defectuoase, imprevizibile din punct de vedere teoretic, ale sistemului de reglare automată, a căror remediere în faza finală a punerii în funcțiune, în proces, este posibilă doar cu prețul unor eforturi tehnico-economice complet nerentabile. Încă din faza de proiectare, simulare și experimentare, trebuie să se ia în considerare contribuția acestor factori și efectele lor în contextul real al aplicației. Analiza acestora s-a impus ca o etapă obligatorie a proiectării sistemelor de reglare digitale moderne, fiind amplu descrisă în practica de specialitate.

În [11], [9], de exemplu, se analizează sintetic factorii care determină eroarea totală de calcul, e_t, considerată ca sumă a patru tipuri de erori generate din diferite cauze:

$$e_t = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 .$$

Eroarea e_1, de metodă, reflectă gradul de perfecțiune atins în construirea modelului matematic al procesului reglat; în termeni sistemici se definește ca eroare de identificare. Calitatea rezultatelor proiectării și implementării sistemului de conducere automată sau RD depinde în final de corectitudinea modelului elaborat pentru procesul reglat în faza de identificare a acestuia. Lipsa unor modele corespunzătoare constituie unul din obstacolele majore în aplicarea mai largă în practică a rezultatelor teoriei moderne a sistemelor.

Una din cauzele importante ale neaplicării metodelor teoretice avansate, cu toate repercusiunile privind performanțele sistemelor de reglare, este discrepanța între teoria și practica de specialitate [11].

Eroarea e_2, de metodă, este determinată de performanțele algoritmului de reglare implementat de proiectantul de sisteme automate.

Utilizarea cu succes a unui algoritm de reglare pentru o aplicație procesuală dată depinde atît de precizia modelului sistemic identificat al procesului, cît și de intuiția și experiența proiectantului.

Calitatea diverșilor algoritmi de reglare consacrați în teoria sistemelor discrete, în mare majoritate dedicate reglării cu certe și verificate performanțe, determină ca aceștia să fie apți de implementare îndeosebi în RD, unde simplitatea, robustețea și eficiența lor constituie principalele criterii după care se aleg.

Eroarea e_3, apare în procesul conversiei variabilelor de intrare/ieșire. Calitatea acesteia din urmă nu este condiționată exclusiv de interfețele specializate ale RD, ci și de celelalte elemente fizice ale buclei automate, cum sînt traductoarele de proces și elementele de execuție.

Eroarea e_4, instrumentală, este determinată de numărul finit de simboluri destinate reprezentării variabilelor (mărimi sistemice, coeficienții algoritmului de reglare) și din necesitatea aproximării rezultatelor operațiilor elementare, intermediare și finale.

Neglijarea reprezentării finite a simbolurilor poate determina, conform practicii de specialitate, efecte sistemice nocive, uneori complet eronate, asupra calității sistemului automat: cicluri limită, instabilitate, zgomot de cuantizare ș.a., a căror manifestare se simte în proces de regulă, la închiderea buclei automate.

Examinînd această clasificare, se constată că erorile e_1 și e_2 depind într-o mare măsură de proiectantul de sisteme, pe cînd e_3 și e_4 depind de limitările tehnologiei, în mod obiectiv, cît și de proiectantul structurii *hardware* și *software* a RD, în mod subiectiv.

2.2. ASPECTE MATEMATICE ALE OPERAȚIEI DE EȘANTIONARE

2.2.1. Eșantionarea ideală

Fie $v(t)$ un semnal continuu, cauzal. Dispozitivul de eșantionare ideal este descris printr-o serie formală de impulsuri Dirac decalate în timp, de amplitudine unitară. Dacă T este perioada de eșantionare a semnalului atunci funcția generalizată de distribuție este dată de relația:

$$p(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT), \tag{2.1}$$

avînd aspectul din fig. 2.1.

Fig. 2.1

Deoarece $\delta(t - kT)$, unde $k \in \mathbb{Z}$, și $p(t)$ sînt funcții generalizate, ele nu au corespondent exact, real, ci doar aproximări [2].

Semnalul eșantionat se consideră la ieșirea dispozitivului din fig. 2.2.

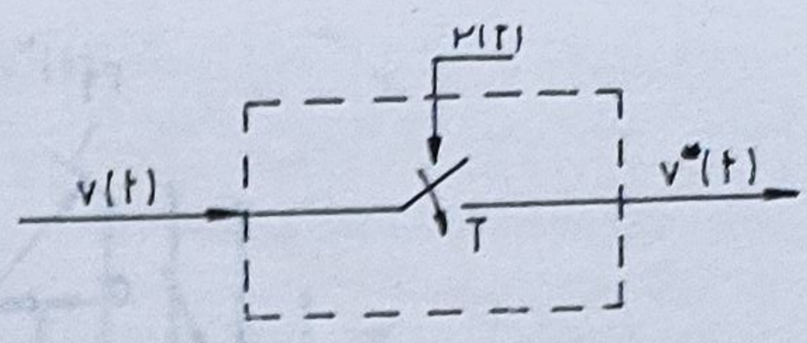


Fig. 2.2

Semnalul de ieșire, $v^*(t)$, cauzal, este modulat pe o purtătoare de tipul $p(t)$; deci,

$$v^*(t) = v(t)\, p(t). \tag{2.2}$$

Dacă $v(t)$ este transformabilă Laplace, cu $V(s) \triangleq \mathcal{L}\{v(t)\}$, $P(s) \triangleq \mathcal{L}\{p(t)\}$, transformata Laplace a semnalului eșantionat, $v^*(t)$, este $V^*(s) = \mathcal{L}\{v(t)p(t)\} = V(s) * P(s)$, convoluția făcîndu-se în domeniul s. Totodată, din (2.1) rezultă:

$$P(s) = \mathcal{L}\{p(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}, \text{ dacă } |e^{-Ts}| < 1. \tag{2.3}$$

Dacă σ_1 și σ_2 sînt abscisele de convergență pentru $V(s)$, respectiv $P(s)$ $\sigma \triangleq \operatorname{Re} s$, iar $\sigma_1 < c < \sigma - \sigma_2$, atunci produsul de convoluție complex, prin care se determină $V^*(s)$, se realizează conform relației:

$$V^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(\xi)\, P(s - \xi)\, d\xi, \quad j \triangleq \sqrt{-1}, \tag{2.4}$$

sau

$$V^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(\xi)\, \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}}\, d\xi. \tag{2.5}$$

Presupunîndu-se că $V(s)$ admite o reprezentare rațională, strict proprie,

$$V(s) = \frac{Q_m(s)}{P_n(s)}, \quad \partial Q_m(s) \triangleq m, \quad \partial P_n(s) \triangleq n > m, \tag{2.6}$$

unde $Q_m(s)$, $P_n(s)$ sînt polinoame de variabilă s și $\lim_{s \to \infty} V(s) = 0$ sau $v(0) = 0$.

Integrala complexă din (2.5) se evaluează în [1], închizîndu-se polii lui $V(\xi)$, $(P_n(\xi) = 0)$ și ai lui $P(s - \xi)$ cu un contur Γ_1, care conține axa $c - j\infty$ și $c + j\infty$, de rază $\operatorname{Re}\xi \to \infty$. Polii lui $V(\xi)$, în număr finit, sînt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Prin evaluarea integralei din (2.5) pe conturul închis Γ_1 și ținîndu-se seama că $\lim_{\xi \to \infty} V(\xi) = 0$, din teorema reziduurilor rezultă:

$$V^*(s) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname*{rez}_{\xi = \xi_i} \left\{ V(\xi)\, \frac{1}{1 - e^{T\xi}\, e^{-Ts}} \right\}. \tag{2.7}$$

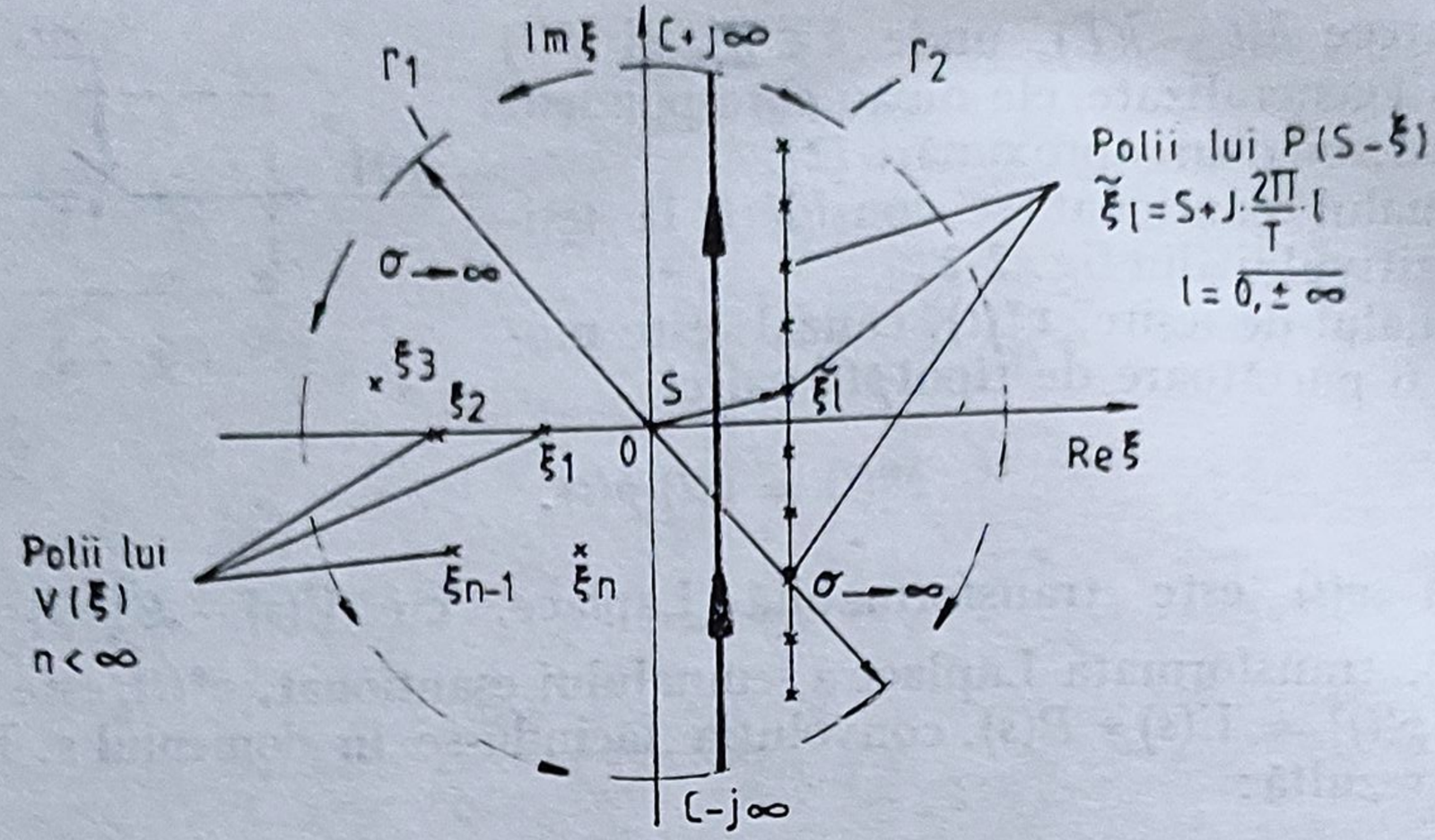


Fig. 2.3.

Dacă polii $\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi n$ sînt simplii, atunci

$$V^*(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(\xi_i)}{P'_n(\xi_i)} \frac{1}{1 - e^{T\xi_i} e^{-Ts}}, \quad P'_n(\xi_i) \triangleq \frac{d P_n(\xi)}{d\xi}\bigg|_{\xi=\xi_i}. \tag{2.8}$$

În situația că ordinul de multiplicitate al polilor $\xi 1, \xi 2, \ldots, \xi_r$ are valori respectiv de $n_1, n_2, \ldots, n_r$, cu $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$, atunci

$$V^*(s) = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(n_i - 1)!} \lim_{\xi \to \xi_i} \left\{ \frac{d^{n_i - 1}}{d\xi^{n_i - 1}} \left[(\xi - \xi_i)^{n_i} \frac{Q_m(\xi)}{P_n(\xi)} \frac{1}{1 - e^{T\xi} e^{-Ts}} \right] \right\}. \tag{2.9}$$

În relația (2.5), notîndu-se $z \triangleq e^{Ts}$, se obține transformata $\mathfrak{S}$ a semnalului eșantionat ideal, $v^*(t)$:

$$V(z) \triangleq V^*(s)\Big|_{e^{Ts}=z} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(\xi) \frac{1}{1 - e^{T\xi} z^{-1}} d\xi. \tag{2.10}$$

Cînd $V(\xi)$ are polii simpli, conform (2.8) rezultă:

$$V(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(\xi_i)}{P'_n(\xi_i)} \frac{1}{1 - e^{T\xi_i} z^{-1}}. \tag{2.11}$$

Metoda permite obținerea transformatei $\mathfrak{S}$ a semnalului $v(t)$ sub forma sintetică a unei reprezentări raționale, proprii parametrice, de forma:

$$V(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad \partial B(z) < \partial A(z) \tag{2.12}$$

Transformata $\mathfrak{S}$ a semnalului $v(t)$ se poate obține și sub o formă neparametrică, aplicînd transformarea Laplace în (2.2), pentru $p(t)$ descris sub forma ideală în (2.1):

$$v^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} v(t)\, \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} v(kT)\, \delta(t - kT). \tag{2.13}$$

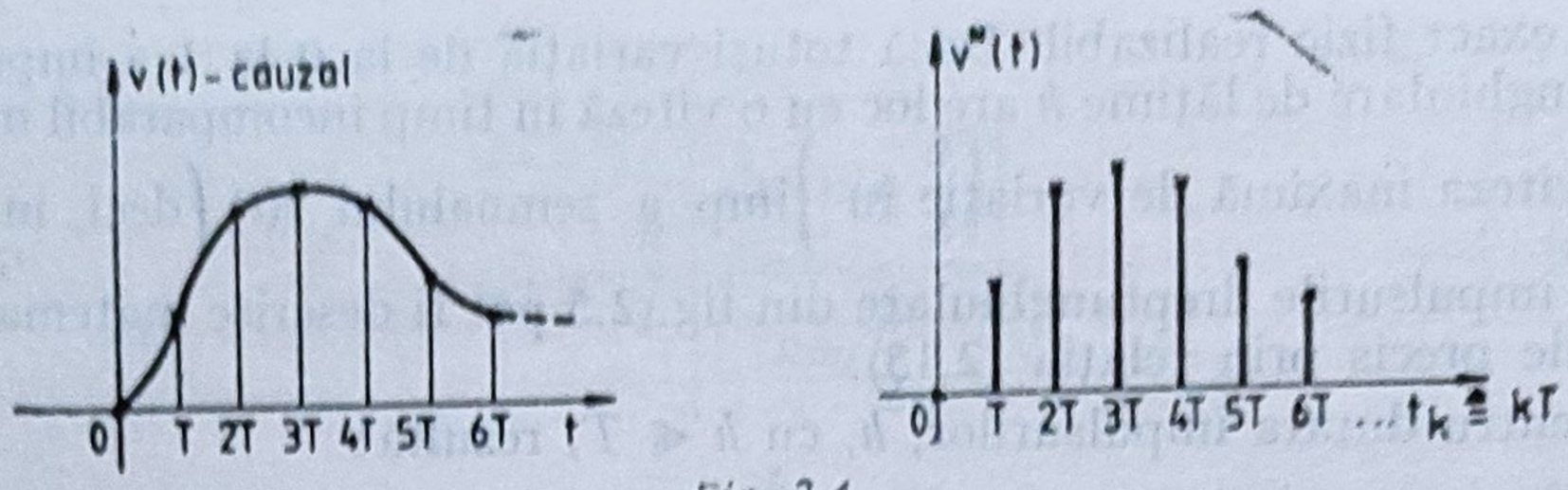


Fig. 2.4

de unde

$$V^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} v(kT)\ e^{-kTs}$$

sau

$$V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v(kT)\, z^{-k},\ z \triangleq e^{Ts} \tag{2.14}$$

Această formă neparametrică (serie formală în z^{-1}) permite obținerea transformatei $\mathfrak{S}$ a semnalului $v(t)$, cînd i se cunosc eșantioanele $v(kT)$, la orice moment $t_k = kT$, $k \geqslant 0$. Pentru semnale $v(t)$ stabile, cauzale, suma seriei din (2.14) are exact aspectul parametric din (2.12).

Eșantionarea ideală presupune deci transformarea curbei continue, de variație în timp a semnalului $v(t)$, într-o mulțime numărabilă de puncte (eșantioane), $\{v(kT)\}$, $k \geqslant 0$ (fig. 2.4).

În realitate, dispozitivul de eșantionare ideal, neavînd corespondent fizic realizabil, se utilizează doar prin aproximările sale. Tot din motive reale, tehnice, prelucrarea digitală a unui eșantion $v(kT)$ în RD necesită convertirea lui în format binar prin conversiile A/N realizate de CAN, al căror timp de conversie este nenul, iar eșantionul $v(kT)$ trebuie menținut constant (ca amplitudine) în tot intervalul de conversie A/N.

2.2.2. Eșantionarea reală

Dispozitivul de eșantionare reală este descris prin funcția $p(t)$ cu aspectul din fig. 2.5.

În cazul real, $p(t)$ poate fi asimilat prin

$$p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\eta(t - kT) - \eta(t - kT - h)], \tag{2.15}$$

unde $\eta(t)$ este funcția lui Heaviside, iar h — lățimea impulsului real de eșantionare. Evident și această funcție este tot o distribuție, neavînd un echi-

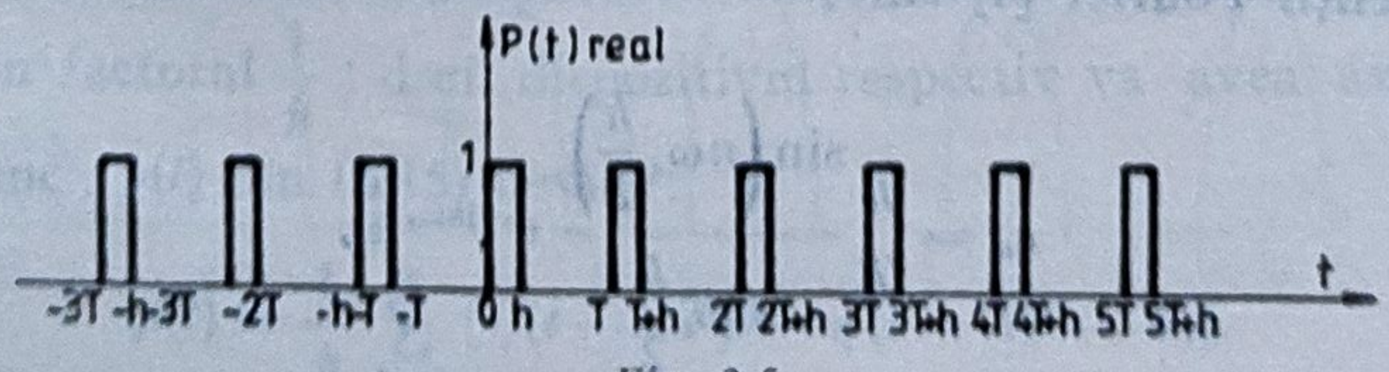


Fig. 2.5

valent exact fizic realizabil. Dacă totuși variația de la 0 la 1 a impulsurilor dreptunghiulare de lățime h are loc cu o viteză în timp incomparabil mai mare decît viteza maximă de variație în timp a semnalului $v(t)$ $\left(\text{deci, } \max_{t\geqslant 0} \frac{dv}{dt}\right)$, atunci impulsurile dreptunghiulare din fig. 2.5 pot fi descrise matematic suficient de precis prin relația (2.15).

Pentru durata impulsurilor, h, cu $h \ll T$, rezultă:

$$P(s) = \mathfrak{L}\{p(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kTs} - e^{-(kT+h)s}}{s} = \frac{1 - e^{-hs}}{s} \frac{1}{1 - e^{-Ts}}. \qquad (2.16)$$

Ca și în cazul precedent, $V^*(s)$ se obține din integrala de convoluție din (2.4), dar cu $P(s)$ avînd aspectul din (2.16).

Rezultă:

$$V^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} V(\xi) \frac{1 - e^{-h(s-\xi)}}{(s-\xi)(1 - e^{-T(s-\xi)})} d\xi. \qquad (2.17)$$

Dacă $V(s)$ admite reprezentarea parametrică din (2.6), cu polii simpli $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, se obține transformata $\mathfrak{Z}$ a semnalului eșantionat $v^*(t)$, utilizîndu-se dispozitivul de eșantionare real:

$$V(z) = V^*(s)\Big|_{e^{Ts} \equiv z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_m(\xi_i)}{P_n'(\xi_i)} \frac{1 - z^{-\frac{h}{T}} e^{h\xi_i}}{\left(\frac{1}{T} \ln z - \xi_i\right)(1 - z^{-1} e^{T\xi_i})}. \qquad (2.18)$$

Comparînd transformatele $\mathfrak{Z}$ ale semnalului $v(t)$, în cazul ideal (2.11) și în cel real (2.18), se observă clar de ce în calculele de proiectare sistemică se utilizează forma (2.11), considerîndu-se eșantionarea ideală, și nu forma (2.18), în care $V(z)$ nu mai admite o reprezentare rațională (raport de polinoame în z), ci o reprezentare neliniară, inoperantă din punct de vedere sistemic, acesta fiind și motivul prezentării cazului eșantionării reale.

Dispozitivul de eșantionare real din (2.15) se poate descompune în serie Fourier:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+jn\omega_s t}, \quad \omega_s \triangleq \frac{2\pi}{T}. \qquad (2.19)$$

Coeficienții Fourier [1] sînt:

$$c_n = \frac{h}{T} \frac{\sin\left(n\omega_s \frac{h}{2}\right)}{n\omega_s \frac{h}{2}} e^{-jn\omega_s \frac{h}{2}}, \qquad (2.20)$$

cu

$$|c_n| = \frac{h}{T}\left|\frac{\sin\left(n\omega_s \frac{h}{2}\right)}{n\omega_s \frac{h}{2}}\right| \tag{2.21}$$

și

$$|c_0| = \frac{h}{T}. \tag{2.22}$$

Atunci, din (2.2) se obține:

$$v^*(t) = r(t)\,p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n v(t)\, e^{+jn\omega_s t}. \tag{2.23}$$

Transformata Fourier a semnalului eșantionat real este:

$$V^*(j\omega) \triangleq \mathcal{F}\{v^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n V(i\omega - jn\omega_s), \tag{2.24}$$

dacă $V(j\omega) = \mathcal{F}\{v(t)\}$.

Se remarcă faptul că $V^*(j\omega)$ conține toate benzile de frecvență ale semnalului continuu, $V(j\omega)$, centrate pe multiplii întregi ai frecvenței de eșantionare, dar ponderate (în fiecare bandă) de coeficienții $|c_n|$ din (2.21).

Dacă $v(t)$ este un semnal cu bandă finită de frecvență $\omega \leqslant \omega_c < \infty$ (fig. 2.6*a*), atunci, alegînd $\omega_s \geqslant 2\omega_c$, spectrul de frecvență al semnalului $v^*(t)$, eșantionat real și descris prin $V^*(j\omega)$, din (2.24), are aspectul din fig. 2.6b.

Cînd $\omega_c < \infty$ și ω_s se alege astfel încît:

$$\omega_s \geqslant 2\omega_c, \tag{2.25}$$

atunci teorema Whittaker-Kotelnikov-Shannon [2] afirmă echivalența $v(t) \Leftrightarrow \{v(kT)\}_{k\geqslant 0}$, iar spectrele $V(j\omega - jn\omega_s)$, $n \in \mathbb{Z}$, ponderate cu $|c_n|$, nu interferă între ele (fig. 2.6*b*).

Diferența față de cazul ideal este aceea că impulsul Dirac (teoretic) este asimilat prin relația:

$$\delta(t) \simeq \lim_{h\to 0} \mathcal{A}(h),$$

unde $\mathcal{A}(h)$ este descris în fig. 2.7.

Pentru a „idealiza" dispozitivul de eșantionare real din (2.15), ilustrat în fig. 2.5, este necesară multiplicarea amplitudinii impulsurilor dreptunghiulare prin factorul $\frac{1}{h}$; deci, dispozitivul respectiv va avea aspectul din fig. 2.8. Atunci, $p(t)$ din (2.15) devine:

$$p(t) = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{\infty}[\eta(t - kT) - \eta(t - kT - h)]. \tag{2.26}$$

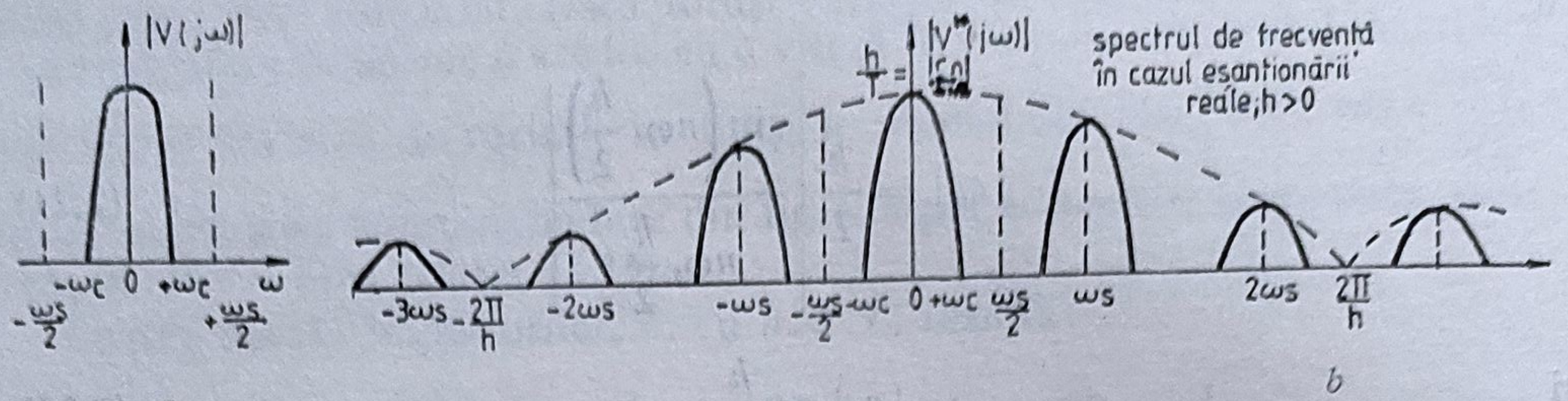


Fig. 2.6

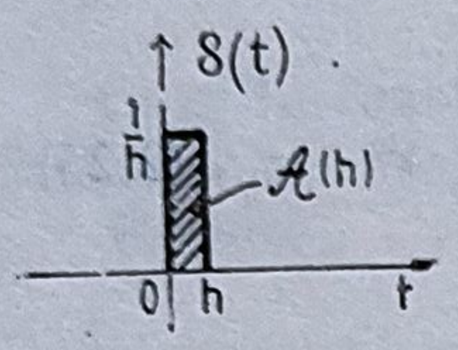


Fig. 2.7

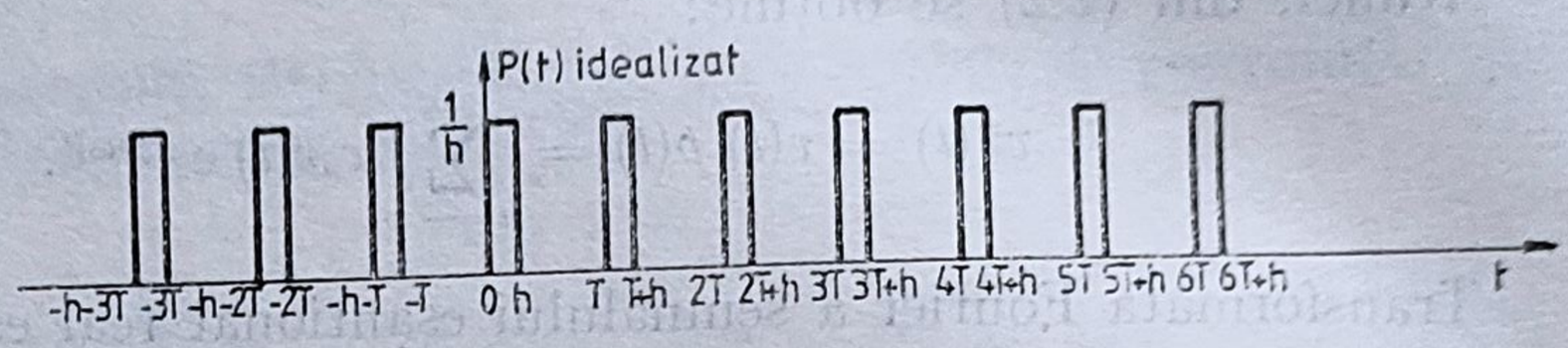


Fig. 2.8

Modulele coeficienților Fourier din (2.21) iau forma

$$|c_n| = \frac{1}{T}\left|\frac{\sin\left(n\omega_s \frac{h}{2}\right)}{n\omega_s \frac{h}{2}}\right|. \tag{2.27}$$

În cazul ideal, la limită, cînd $h \to 0$, în (2.27) se obțin modulele coeficienților descompunerii în serie Fourier a dispozitivului de eșantionare ideal:

$$|c_n|^{\text{ideal}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{T}\left|\frac{\sin n\omega_s \frac{h}{2}}{n\omega_s \frac{h}{2}}\right| = \frac{1}{T} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}). \tag{2.28}$$

Spectrul de frecvență al semnalului eșantionat ideal, din (2.24), cu coeficienții $|c_n|$ din (2.28) are aspectul din fig. 2.9.

Fiecare bandă laterală este ponderată cu același factor constant, $\frac{1}{T}$.

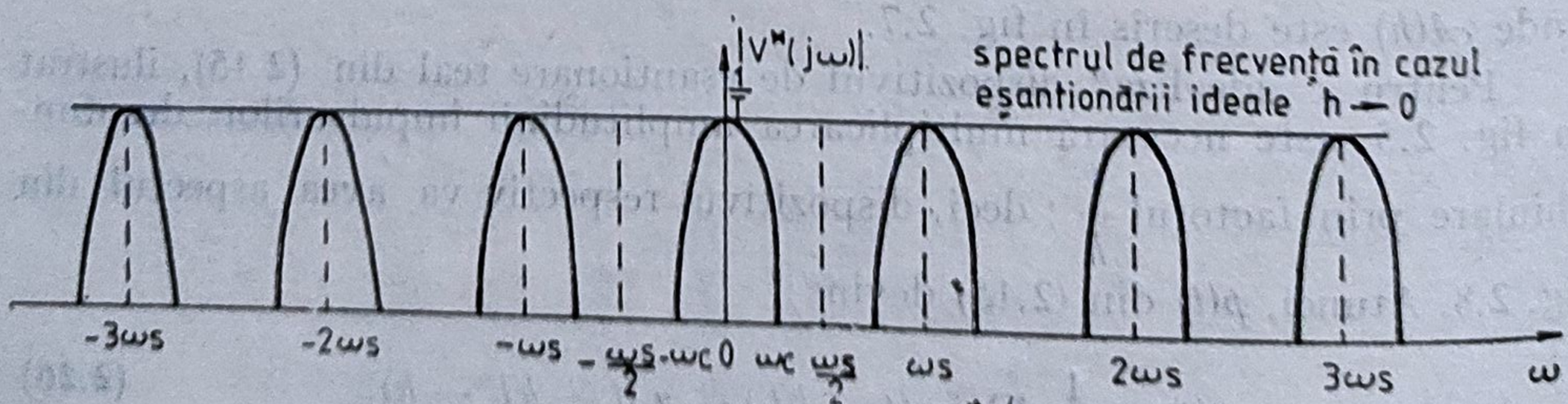


Fig. 2.9

În practică, se consideră dispozitivul de eșantionare real din (2.15) descris în fig. 2.5, cu amplitudine unitară, caz în care dispozitivul de eșantionare introduce o atenuare în amplitudine a benzii centrale de frecvență ($\nu = 0$) destul de mare, dar cu condiția, (2.25), nu se produc distorsiuni de frecvență, ceea ce permite reconstituirea benzii centrale de frecvență, deci a semnalului continuu din cel eșantionat.

2.3. ASPECTE PRACTICE PRIVIND EȘANTIONAREA MĂRIMILOR DE INTERES SISTEMIC

2.3.1. Introducere

Într-o buclă automată cu eșantionare, partea fixată continuă este cea exogenă RD (fig. 2.10).

Toate aspectele matematice ale eșantionării privesc două mărimi cauzale continue de interes sistemic major: $u(t)$, semnalul de intrare în partea fixată continuă (fig. 2.10), și $y(t)$, mărimea de ieșire a părții fixate — mărimea reglată. Există situații particulare în care mărimea reglată nu coincide cu măsura (ieșirea traductorului TR). În fig. 2.10 partea fixată continuă reprezintă dependența cauzală $u(t) \rightarrow y(t)$, iar partea fixată discretă, dependența cauzală $u^*(t) \rightarrow y^*(t)$.

Aspectele practice ce apar în prelucrarea corectă a semnalelor eșantionate se pun în mod diferit pentru $y(t)$, respectiv $u(t)$.

Din punctul de vedere al mărimii $y(t)$, se impun următoarele aspecte ce trebuie studiate:

- Care este frecvența maximală ω_c din spectrul $Y(j\omega) \stackrel{\Delta}{=} \mathcal{F}\{y(t)\}$ și dacă este finită, pentru a putea alege frecvența de eșantionare astfel încît pierderile de informație prin operația de eșantionare să fie cît mai mici?
- Estimînd rezonabil această frecvență maximală — toate semnalele industriale, fiind reale și cauzale, au un spectru de frecvență limitat —, cît trebuie aleasă lățimea h a impulsului din dispozitivul de eșantionare real

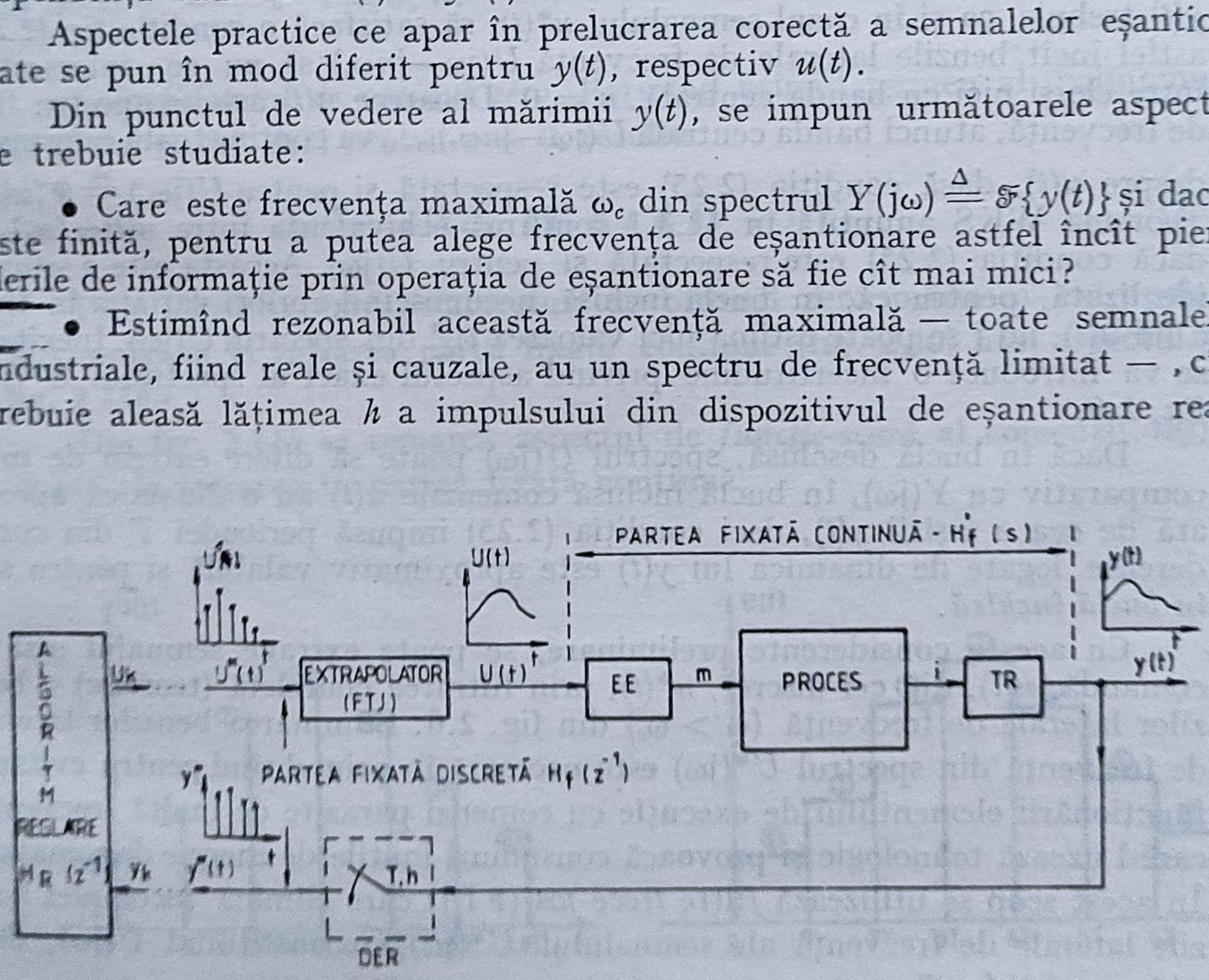


Fig. 2.10

(fig. 2.5), astfel încît $h \ll T$ și transformata semnalului eșantionat $y^*(t)$ să poată fi aproximată suficient de precis, prin aspectul lucrativ (funcție rațională de z) din relația (2.11), cu neglijarea în calculele teoretice de proiectare a parametrului h. Lățimea h a impulsului este limitată inferior de timpul de conversie A/N solicitat de CAN, deci $h > t_{\text{conversie A/N}} = t_{\text{CAN}}$. Pe toată durata conversiei, t_{CAN}, data eșantionată trebuie menținută constantă în amplitudine, operație realizată de dispozitivul de reținere.

Din punct de vedere fizic, cele două operații — eșantionarea și reținerea — sînt efectuate de *D*ispozitivul de *E*șantionare și *R*eținere (DER), fig. 2.10.

• Dacă frecvența maximală a spectrului $Y(j\omega)$ nu permite (deoarece nu este cunoscută cu exactitate sau fiind excesiv de mare) alegerea frecvenței de eșantionare w_s conform relației (2.25), ci o valoare inferioară, care sînt pierderile de informație apărute în procesul de eșantionare, traduse prin erorile de cuantificare în amplitudine și în timp?

Din punctul de vedere al mărimii $u(t)$, din principiul de funcționare discret-secvențială a RD, comanda $u^*(t)$ (fig. 2.10) este un tren de impulsuri Dirac decalate în timp cu perioada de eșantionare T; în aceste condiții eșantioanele comenzii discrete, $u^*(t)$ sînt $u_k = u(kT)$, $k \geqslant 0$, .

Spectrul de frecvență al semnalului $u^*(t)$, real și cauzal, are un aspect similar cu cel din fig. 2.6.

Perioada de eșantionare aleasă din considerente ce privesc dinamica lui $y(t)$ trebuie, ca și în cazul semnalului $u^*(t)$, să satisfacă o condiție tip (2.25), astfel încît benzile laterale de frecvență $U(j\omega - jn\omega_s)$ să nu se intersecteze între ele și nici cu banda centrală, $n = 0$. Deoarece $u(t)$ are un spectru finit de frecvență, atunci banda centrală $U(j\omega - jn\omega_s)|_{n=0}$ va conține toată informația despre $u(t)$, dacă condiția (2.25) este respectată și pentru $U(j\omega) \triangleq \mathcal{F}\{u(t)\}$. Teorema WKS amintită în §2.3.1 confirmă echivalența între $u(t) \Leftrightarrow \{u_k\}_{k \geqslant 0}$, dacă condiția (2.25) este respectată și pentru $U(j\omega)$. Aceasta este o situație idealizată, pentru că, în buclă închisă, necunoscînd apriori variația în timp a lui $u(t)$, nu i se poate estima nici valoarea $\omega_c{}^u$ din spectrul $U(j\omega)$. Inevitabil se va introduce o incertitudine privind aspectul exact al spectrului $U^*(j\omega)$, fig. 2.6.

Dacă în buclă deschisă, spectrul $U(j\omega)$ poate să difere extrem de mult comparativ cu $Y(j\omega)$, în buclă închisă comenzile $u(t)$ au o dinamică apropiată de cea a ieșirii $y(t)$, deci condiția (2.25) impusă perioadei T din considerente legate de dinamica lui $y(t)$ este aproximativ valabilă și pentru $u(t)$ *în buclă închisă*.

Cu aceste considerente preliminare, se poate extrage semnalul util de comandă, $u(t)$, din cel discret, $u^*(t)$, prin filtrarea completă (teoretic) a benzilor laterale de frecvență ($\omega > \omega_c$) din fig. 2.6. Eliminarea benzilor laterale de frecvență din spectrul $U^*(j\omega)$ este necesară în primul rînd pentru evitarea funcționării elementului de execuție cu comenzi parazite de înaltă frecvență, care-l uzează tehnologic și provoacă consumuri inutile de energie de comandă. În acest scop se utilizează *f*iltre *t*rece-*j*os (FTJ) care elimină incomplet benzile laterale de frecvență ale semnalului $U^*(j\omega)$, reconstituind $U(j\omega)$, deci $u(t)$.

Aceste filtre se numesc extrapolatoare [1], întrucît extrapolează curba continuă, dorită, $u(t)$, prin diverse funcții netede, indefinit derivabile, cunoscînd eșantioanele exacte, $u_k \triangleq u(kT)$. Evident, valoarea extrapolată, $\tilde{u}(t)$, diferă de valoarea exactă, $u(t)$, practic imposibil de reconstituit cu exactitate în condiții industriale. Erorile sînt neglijabile însă din punct de vedere sistemic.

2.3.2. Extrapolatoare utilizate în reconstituirea comenzilor continue la ieșirea RD

Se consideră două eșantioane arbitrare, consecutive, ale comenzii discrete $u^*(t)$, $u_k \triangleq u(kT)$ și $u_{k+1} \triangleq u\ ((k+1)T)$.

Cea mai uzuală și comod de implementat funcție de extrapolare a valorilor $\tilde{u}_k(t)$ în intervalul $t \in [kT, (k+1)T]$ este polinomul Taylor de ordin arbitrar, n [7], [1]:

$$\tilde{u}_k(t) = u(kT) + u'(kT)(t - kT) + u''(kT)\frac{(t-kT)^2}{2!} + \ldots + u^{(n)}(kT)\frac{(t-kT)^n}{n!} \tag{2.29}$$

cu $u^{(i)}(t) \triangleq \dfrac{\mathrm{d}^i u(t)}{\mathrm{d}t^i}$, $i = \overline{0, n}$.

Extrapolatorul de ordinul zero. Reținînd primul termen al polinomului (în t) din (2.29), deci pentru $n = 0$, rezultă:

$$\tilde{u}_k(t) = u(kT),\ kT \leqslant t \leqslant (k+1)T. \tag{2.30}$$

Prin folosirea extrapolatorului, de ordinul zero mărimea extrapolată, $\tilde{u}(t)$, aplicată la intrarea părții fixate continue (fig. 2.10) are aspectul din fig. 2.11*b*.

Din fig. 2.11*b* se remarcă aspectul de *funcție-scară* al comenzii $\tilde{u}(t) \simeq u(t)$, la intrarea în partea fixată continuă.

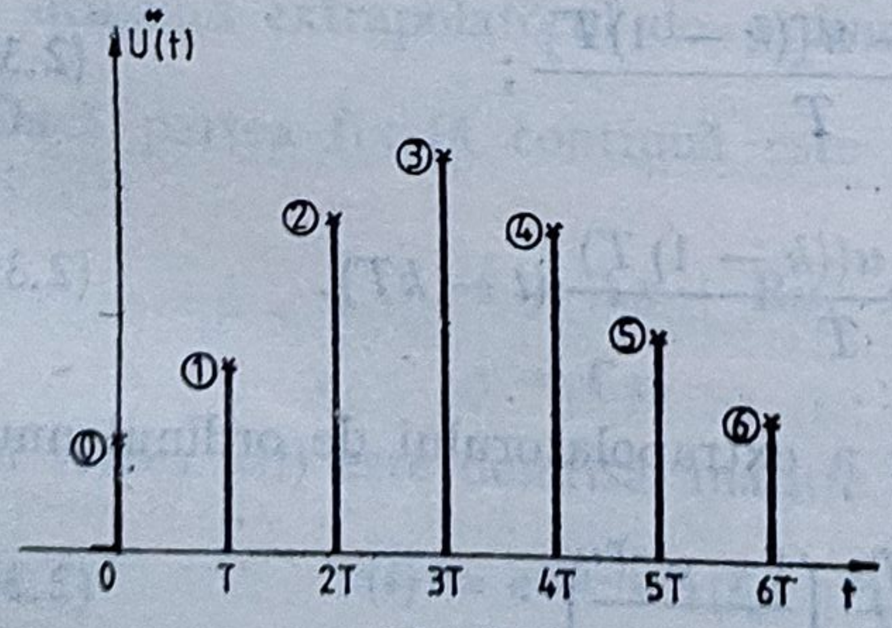


Fig. 2.11 a

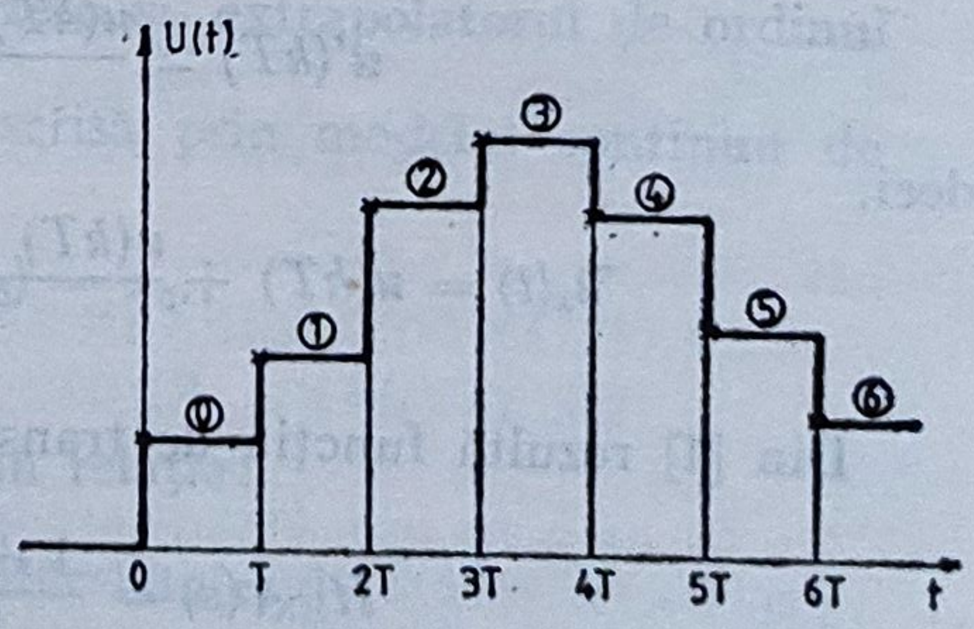


Fig. 2.11 b

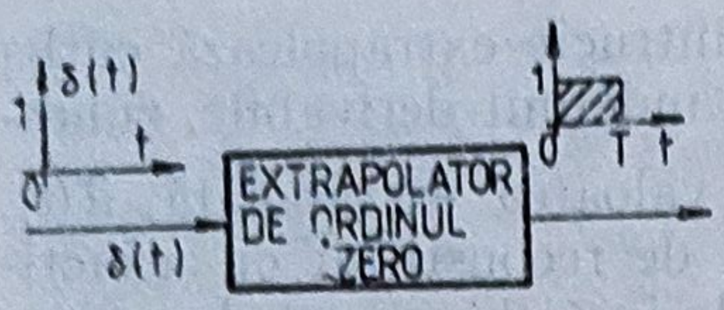


Fig. 2.12

Funcția de transfer a extrapolatorului de ordinul zero se determină [1] considerîndu-se un impuls unitate δ — deci, determinînd funcția-pondere — la intrarea în dispozitiv și cunoscîndu-se apriori ieșirea lui. Rezultă:

$$H_{EXO}(s) = \mathfrak{L}\{\eta(t) - \eta(t-T)\} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s}. \tag{2.31}$$

Din punctul de vedere al calculelor de proiectare corespunzătoare algoritmului de reglare discret, extrapolatorul este înglobat în partea fixată continuă (fig. 2.10), notată prin $H'_f(s)$, iar modelul părții fixate discrete devine [1]:

$$H_f(z) \triangleq \mathfrak{Z}\{H_{EXO}(s)H'_f(s)\} = (1 - z^{-1})\,\mathfrak{Z}\left\{\frac{H'_f(s)}{s}\right\}. \tag{2.32}$$

OBSERVAȚIE. Din punct de vedere practic eșantionul curent, u_k, se menține timp de o perioadă de eșantionare, fie cînd u_k este în format binar (semnul binar), deci la intrarea convertorului CAN, fie cînd u_k este semnal analogic, deci la ieșirea convertorului CAN.

Regulatoarele digitale moderne mențin eșantionul u_k, furnizat de unitatea centrală UC a RD, în *buffere-latch* pe perioade T oricît de mari, fără nici o alterare a informației; în acest caz, extrapolatorul de ordinul zero este implementat prin *hardware*-ul RD, înaintea conversiei A/N de la ieșirea RD [17].

Variantele de RD pentru aplicațiile de viteză — perioade T mici sau foarte mici — pot utiliza și menținerea mărimii analogice $u_k(t)$ din ieșirea CAN, folosind memorii analogice [8]. În cazul perioadelor de eșantionare T mari, această alternativă nu este de preferat [8].

Extrapolatorul de ordinul unul. Pentru $n = 1$, din relația (2.29) rezultă:

$$u_k(t) = u(kT) + u'(kT)\,(t - kT). \tag{2.33}$$

Pentru valori T ce se aleg adecvat valoarea derivatei $u'(t)$ în $t = kT$ poate fi aproximată prin

$$u'(kT) \simeq \frac{u(kT) - u[(k-1)T]}{T}; \tag{2.34}$$

deci,

$$\tilde{u}_k(t) = u(kT) + \frac{u(kT) - u((k-1)\,T)}{T}(t - kT). \tag{2.35}$$

Din [1] rezultă funcția de transfer a extrapolatorului de ordinul unu:

$$H_{EX1}(s) = \frac{1 + Ts}{T}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2. \tag{2.36}$$

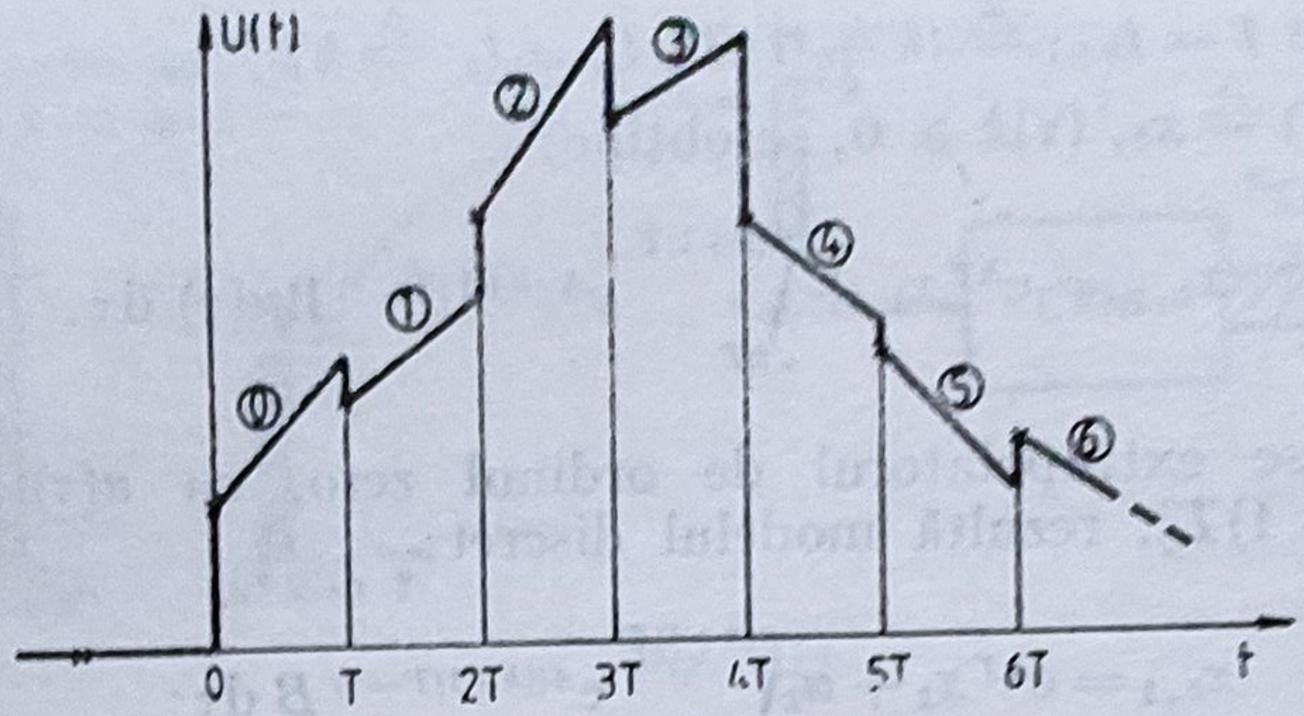


Fig- 2.13

Dacă $u(kT)$, unde $k = 0, 1, 2\ldots$, sînt eșantioanele calculate ale comenzii discrete din fig. 2.11*a*, atunci comanda continuă la ieșirea RD are aspectul din fig. 2.13.

Ca și în cazul extrapolatorului de ordinul zero, extrapolatorul de ordinul unu este inclus în calculele de proiectare, în partea fixată continuă, rezultînd modelul discret al părții fixate:

$$H_f(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{1 + Ts}{T}\left(\frac{1 - e^{-Ts}}{s}\right)^2 H_f'(s)\right\} \tag{2.37}$$

Pentru perioade de eșantionare suficient de mici sau la joase frecvențe, JF, astfel încît $|Ts| < 1$, rezultă $1 + Ts \approx e^{Ts}$ și cu notația $z \triangleq e^{Ts}$ se obține [9], [17]:

$$H_f(z) = \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{Ts}}{T}(1 - e^{-Ts})^2 \frac{H_f'(s)}{s^2}\right\} = \frac{(1 - z^{-1})^2}{Tz^{-1}} \mathcal{Z}\left\{\frac{H_f'(s)}{s^2}\right\} \tag{2.38}$$

Deși extrapolatorul de ordinul unu reconstituie mai precis semnalul continuu din cel eșantionat, faptul că este mult mai dificil de implementat și că introduce o întîrziere de fază mai mare decît cea a extrapolatorului de ordinul zero [1] (la înaltă frecvență), înrăutățind marginea de fază a sistemului deschis cu eșantionare, determină utilizarea sa mai rară în comparație cu extrapolatorul de ordinul zero [1].

OBSERVAȚIE. Cu toate că nu se intenționează abordarea sintezei structurale, este utilă ilustrarea modului de obținere a modelelor discrete de stare, utilizînd extrapolatorul de ordinul zero și extrapolatorul de ordinul unu.

Dacă partea fixată continuă este descrisă prin modelul continuu de stare:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad x(t_0) = x_0,$$
$$y = \mathbf{C}x,$$

atunci starea $x(t)$ este descrisă analitic prin relația:

$$x(t) = e^{\mathbf{A}(t - t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t - \tau)} \mathbf{B}u(\tau)\, d\tau.$$

Considerîndu-se $t = t_{k+1} \triangleq (k+1)\,T$, $t_0 = t_k \triangleq kT$, atunci cu $x(kT) \triangleq x_k$, $(\forall)k \geqslant 0$, se obține:

$$x_{k+1} = e^{\mathbf{A}T} x_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}u(\tau)\, d\tau .$$

Folosindu-se extrapolatorul de ordinul zero, cu $u(\tau) = u(kT) = u_k$, $(\forall)\tau \in [kT,\ (k+1)T]$, rezultă modelul discret:

$$x_{k+1} = e^{\mathbf{A}T} x_k + u_k \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)} B\, d\tau ;$$

$$y_k = C x_k .$$

Notîndu-se $\mathbf{A}_d \triangleq e^{\mathbf{A}T}$ $\mathbf{B}_d \triangleq \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}_d \tau = e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{B}\, d\theta$ și $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$, rezultă modelul discret cu extrapolator de ordinul zero:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}_d x_k + \mathbf{B}_d u_k ; \\ y_k = \mathbf{C}_d x_k . \end{cases}$$

Utilizîndu-se extrapolatorul de ordinul unu,

$$u(\tau) \triangleq u(kT) + \frac{u(kT) - u((k-1)\,T)}{T} (\tau - kT), \quad kT \leqslant \tau \leqslant (k+1)T ;$$

cu notațiile $\mathbf{A}_d \triangleq e^{\mathbf{A}T}$, $\mathbf{B}_{d0} \triangleq \left(1 + \frac{1}{T}\right) e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{B}\, d\theta = \left(1 + \frac{1}{T}\right) \mathbf{B}_d$ și $\mathbf{B}_{d1} \triangleq$ $\triangleq -\frac{1}{T} e^{\mathbf{A}T} \int_0^T e^{\mathbf{A}\theta} \mathbf{B}\, d\theta = -\frac{1}{T} \mathbf{B}_d$, unde $\mathbf{B}_d$ este dat în cazul precedent, rezultă modelul discret cu extrapolator de ordinul unu:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \mathbf{A}_d x_k + \mathbf{B}_{d_0} u_k + \mathbf{B}_{d_1} u_{k-1} ; \\ y_k = \mathbf{C}_d x_k . \end{cases}$$

Și în situația tratării structurale se remarcă deficiențele generate de extrapolatorul de ordinul unu. Totuși, în [9] și [10] el este utilizat dacă perioada de eșantionare, T, este mare din punctul de vedere al dinamicii comenzii, care variază în rampă între două momente de eșantionare.

2.4. CUANTIFICAREA ÎN AMPLITUDINE ȘI ÎN TIMP A SEMNALELOR DE INTRARE. ERORI CARE DEPIND DE CAN

În §2.3 au fost prezentate aspectele de principiu pe care le presupune operația de eșantionare asupra semnalelor de intrare în RD — măsura sau mărimea reglată, $y(t)$.

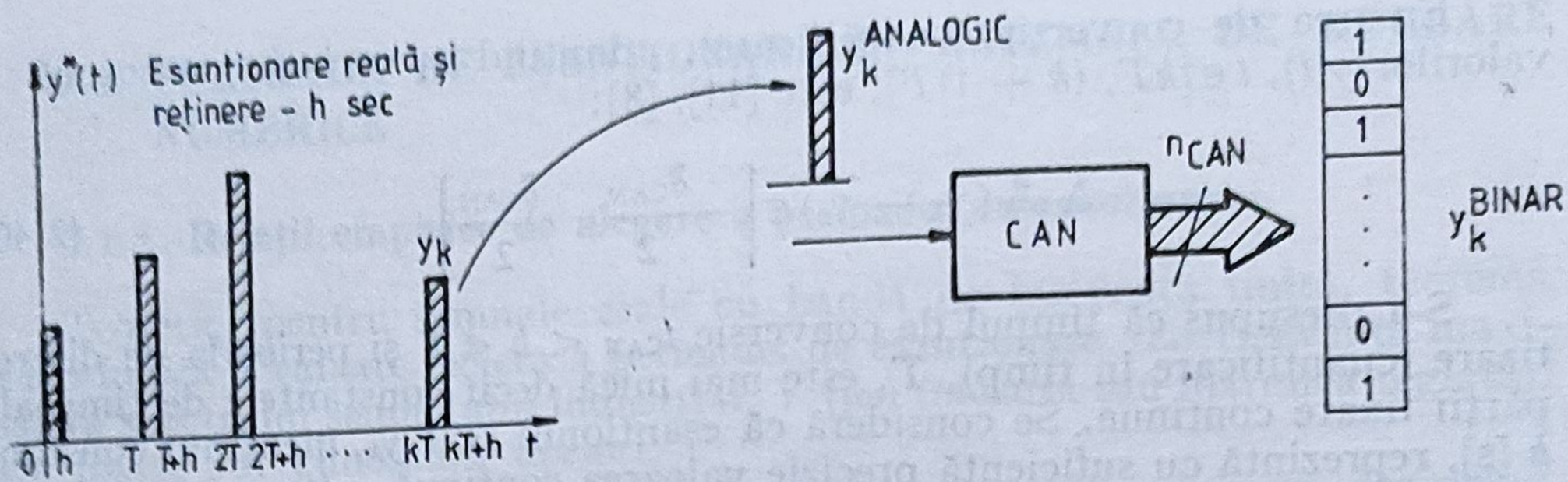


Fig. 2.14

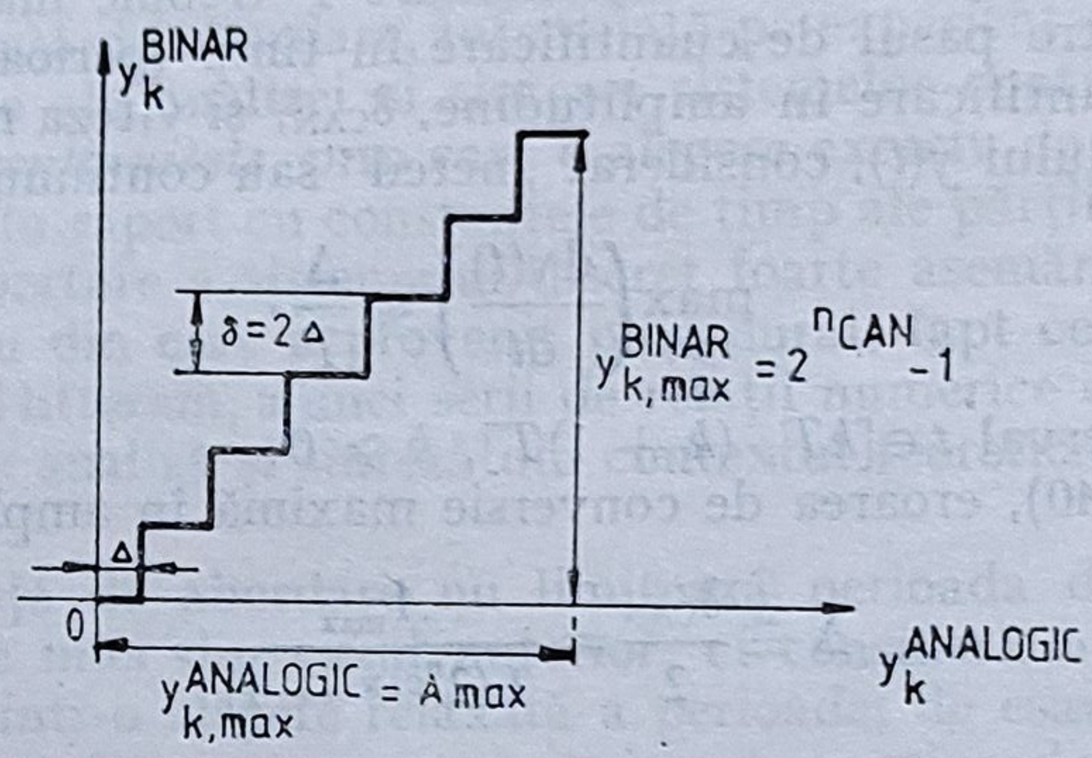


Fig. 2.15

S-a reliefat faptul că eșantionorul real este caracterizat prin funcția de modulație $p(t)$ din (2.15), în care lățimea h a impulsurilor dreptunghiulare (fig. 2.5) este limitată superior, $h \leqslant h_{max} \ll T$ (perioada de eșantionare), și inferior, $h \geqslant h_{min} > t_{CAN}$. Admițîndu-se faptul că parametrul h se încadrează în aceste limite, fără a introduce efecte sistemice negative sesizabile, *D*ispozitivul de *E*șantionare și *R*eținere , DER, , și *C*onvertorul *A*nalog/*N*umeric, CAN, realizează fizic operația de cuantificare în amplitudine și în timp a mărimii analogice de intrare, $y(t)$, în RD.

Detaliind operațiile de discretizare din interfața de intrări analogice a RD (fig. 2.10), în fig. 2.14 este ilustrat blocul de conversie A/N.

Caracteristica de transfer a CAN este prezentată în fig. 2.15.

Orice eșantion analogic, y_k, provenit din DER, este un semnal de tensiune cuprins între 0 și A_{max} [V_{cc}], depinzînd în mod particular de tipul intrării CAN [8].

Dacă numărul de ranguri binare ale convertorului CAN este n_{CAN}, atunci pasul de cuantificare în amplitudine este:

$$\delta_{CAN} = \frac{A_{max}}{2^{n_{CAN}} - 1} \text{ [volți/bit]}. \tag{2.39}$$

Valoarea cuantificată a eșantionului y_k este $\tilde{y}_k = q\,\delta_{CAN}$, cu $q = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n_{CAN}} - 1$.

Eroarea de conversie (cuantificare), admițînd o variație monotonă a valorilor $y(t)$, $t \in [kT, (k+1)T]$, este [11], [8]:

$$\tilde{\Delta} \triangleq (y_k - \tilde{y}_k) \in \left[-\frac{\delta_{CAN}}{2}, \frac{\delta_{CAN}}{2} \right]. \tag{2.40}$$

S-a presupus că timpul de conversie $t_{CAN} < h \ll T$ și perioada de discretizare (cuantificare în timp), T, este mai mică decît constantele de timp ale părții fixate continue. Se consideră că eșantionul real y_k, menținut constant h [s], reprezintă cu suficientă precizie valoarea continuă $y_k(t)$ pe întreg intervalul $[kT, (k+1)T]$.

În caz contrar, perioada de eșantionare T trebuie micșorată.

Legătura între pasul de cuantificare în timp (perioada de eșantionare, T), pasul de cuantificare în amplitudine, δ_{CAN}, și viteza maximă de variație în timp a semnalului $y(t)$, considerat „neted" sau continuu, este dată în [11]:

$$\max_{t \geqslant 0} \left(\frac{dy(t)}{dt} \right) \leqslant \frac{\Delta}{T}, \tag{2.41}$$

pentru orice interval $t \in [kT, (k+1)T]$, $k \geqslant 0$.

Conform (2.40), eroarea de conversie maximă în amplitudine este:

$$\Delta \triangleq \frac{\delta_{CAN}}{2} = \frac{A_{max}}{2(2^{n_{CAN}} - 1)}, \tag{2.42}$$

de unde rezultă:

$$n_{CAN} \simeq 3{,}33 \lg \left(\frac{A_{max}}{2\Delta} + 1 \right). \tag{2.43}$$

Relația (2.43) este utilizată pentru determinarea numărului de ranguri, n_{CAN}, impunînd apriori eroarea de conversie Δ și presupunînd perioada de eșantionare, T, aleasă adecvat.

De regulă, traductoarele industriale uzuale fac parte din diferite clase de precizie — 1%, 1,5%, 2,5%, 5% —, ceea ce corespunde unei precizii cu trei cifre zecimale semnificative.

Folosindu-se un CAN cu 10 ranguri binare, eroarea maximă de conversie este de 0,05%, iar la unul cu $n_{CAN} = 12$, ea se micșorează la aproximativ 0,01%, conform relației (2.43).

Majoritatea RD moderne utilizează CAN cu $n_{CAN} = 12$ ranguri. Motivul nu este numai o precizie de conversie foarte bună, ci și un aspect sistemic care se va trata în capitolul 4. Acest aspect privește caracteristica statică de transfer neliniară a CAN și, inversată ca axe, a convertorului numeric-analog care echivalează sistemic cu introducerea unui element neliniar pentru fiecare CAN și CNA. Aceste elemente neliniare pot provoca, funcție de aplicație, autooscilații stabile sau amortizate. Fenomenul iese cu atît mai mult în evidență cu cît numărul de pași de cuantificare, $2^{n_{CAN}} - 1$ sau $2^{n_{CNA}} - 1$, este mai mic. Se preferă deci mărirea rangurilor CAN și CNA deși, de regulă, $n_{CNA} \leqslant n_{CAN}$. Dacă $n_{CNA} < n_{CAN}$, neliniaritatea cea mai pronunțată apare la ieșirea RD datorită prezenței CNA.

2.5. PERIOADA DE EȘANTIONARE ÎN SISTEMELE DE REGLARE NUMERICE

2.1.5. Relații empirice de alegere a perioadei de eșantionare

Teoretic, pentru semnale reale cu bandă de frecvență finită, teorema WKS indică o valoare exactă a perioadei de eșantionare, dar frecvența maximală a spectrului semnalului industrial, $Y(j\omega)$ (măsura sau mărimea reglată), este foarte rar cunoscută apriori.

Practic, există trei tendințe de abordare a sistemelor discrete depinzînd de valoarea perioadei T.

O primă tendință de abordare, întemeiată pe experiența și relațiile experimentale verificate ale analizei și sintezei sistemelor continue, se bazează pe *ipoteza de cvasicontinuitate*, prin care o alegere excesiv de mică a perioadei de eșantionare, T, în raport cu constantele de timp ale părții fixate continue, conduce la o comportare a sistemului discret foarte asemănătoare cu cea a sistemului continuu din care a provenit procedural, fapt ce ar permite utilizarea, aproape ad litteram, a unei serii de relații numerice de acordare, proceduri și tehnici de analiză și sinteză din contextul teoretic și practic al sistemelor continue.

O altă tendință de abordare nu limitează perioada de eșantionare la valorile excesiv de mici din cazul anterior, ci consideră o plajă mult mai largă prin care, printr-o alegere relaxată a perioadei de eșantionare, analiza și sinteza sistemelor discrete presupun existența unui cadru conceptual comun sistemelor continue și discrete. Printr-o astfel de alegere a perioadei de eșantionare, mulțimea finită a tuturor constantelor de timp ale părții fixate continue este separată de valoarea perioadei T și permite utilizarea directă a modelelor continue la joasă frecvență $\left(\omega < \frac{1}{T}\right)$ sau la înaltă frecvență $\left(\omega > \frac{1}{T}\right)$ ale părții fixate continue, prin simpla substituire a argumentelor complexe. În analiza și sinteza sistemelor discrete această tendință de a folosi direct modelele părții fixate la joasă sau înaltă frecvență nu se confundă cu tendința anterioară, prin însăși valoarea perioadei de eșantionare T, care poate fi arbitrar de mare, dar limitată superior de precizia modelelor discrete obținute atît de facil din modelele continue.

Cea de a treia tendință constă în eliminarea oricărei asocieri directe cu cazul continuu și în abordarea cazului discret prin metode tipice exclusive teoriei sistemelor discrete. Se asigură astfel printr-o alegere rezonabilă a perioadei de eșantionare, T, analiza și sinteza sistemelor discrete fără erori de aproximare specifice primelor două tendințe de abordare principală.

Relațiile empirice de alegere a perioadei de eșantionare corespund respectiv celor trei cazuri de abordare expuse anterior. În acest sens,

- după [13],
$$T \leqslant 0{,}1 \sum_{i} T_{fi}, \tag{2.44}$$

unde $T_{f1}, T_{f2}, \ldots, T_{fi}$ sînt constantele de timp principale ale părții fixate continue. O asemenea alegere este conformă cu ipoteza de cvasicontinuitate;

în conformitate cu [8],

$$T \leqslant \frac{1}{2} \min_i \{T_{fi}\}, \tag{2.45}$$

în care $\min_i \{T_{fi}\}$ este cea mai mică constantă de timp principală a părții fixate continue. Dacă $\min_i \{T_{fi}\}$ este cea mai mică constantă principală de timp și procesul are timp mort semnificativ, τ, atunci în [11] se indică alegerea perioadei de eșantionare, conform relației:

$$T = \frac{1}{m}\left(\tau + \min_i \{T_{fi}\}\right), \quad m = 3 \ldots 8;$$

- după [14],

$$T \leqslant \left(\frac{1}{5} \ldots \frac{1}{2{,}5}\right) T_{f \text{ principală}} \tag{2.46}$$

sau

$$T \leqslant \left(\frac{1}{10} \ldots \frac{1}{5}\right) t_r, \tag{2.47}$$

unde $T_{f \text{ principală}}$ este constanta de timp dominantă, iar t_r — durata regimului tranzitoriu indicial al SA;

- conform [15],

$$T \leqslant \frac{2}{\omega_t}, \tag{2.48}$$

unde ω_t este pulsația de tăiere a caracteristicii de frecvență (amplitudine) a părții fixate continue. O astfel de alegere se încadrează de asemenea în cea de a doua tendință de abordare expusă.

O altă manieră de alegere a perioadei T se referă la dinamica propusă a sistemului închis SA și nu a părții fixate, care apare implicit în (2.47). Într-o asemenea manieră, pentru T se indică intervalul:

$$\frac{T_p}{20} \leqslant T \leqslant \frac{T_p}{5}, \tag{2.49}$$

unde T_p este perioada proprie de oscilație (amortizată) a răspunsului indicial al sistemului închis (SA).

Corespunzător celei de-a treia tendințe, perioada T se alege din considerente de suprareglaj și durata regimului tranzitoriu indicial al sistemului închis, fiind un parametru de proiectare.

OBSERVAȚIE. Toate considerentele anterioare au presupus achiziționarea ciclică a datelor din proces, deci cu frecvență constantă, caz în care s-a putut utiliza și noțiunea de perioadă de eșantionare (T). Există aplicații

industriale „critice", în care perturbațiile parametrice și dinamica procesului sînt rapide, o frecvență de achiziție a datelor constantă conducînd la erori de cuantificare în timp și amplitudine mari. În astfel de situații se utilizează o frecvență de achiziție variabilă, adaptivă. În [16] se indică o astfel de metodă prin care dispozitivul de eșantionare este comandat la intervale de timp de durată optimală, prin prisma unor indici de optimizare-minimizare ai erorii de cuantificare dinamice, durate calculate în timp real, în buclă închisă.

Din punct de vedere sistemic, utilizarea unei eșantionări aciclice, aplicată modelelor continue, conduce, după discretizare, la ecuații cu diferențe finite cu coeficienți variabili discreți în timp (kT), deci imposibile de asimilat în teoria funcțiilor de transfer discrete, care corespund unor ecuații cu coeficienți constanți.

2.5.2. Influența frecvenței de eșantionare asupra modelelor discrete reale. Situații-limită

Cu excepția algoritmilor de reglare de tip PID, cu metode consacrate de acordare experimentală, care nu necesită identificarea părții fixate, aproape toate metodele de sinteză discretă utilizează modelul explicit, sistemic, al părții fixate. Coeficienții algoritmilor de reglare discretă, sintetizați prin aceste metode, depind explicit de coeficienții modelului părții fixate.

Prin *S*isteme *D*iscrete *R*eale (SDR) definim sistemele implementate în calculator prin algoritmi recursivi de tipul ecuațiilor cu diferențe finite, cu coeficienți constanți în timp (frecvență de eșantionare constantă).

Prin *S*isteme *D*iscrete *T*eoretice (SDT) definim sistemele descrise prin funcții de transfer în variabila complexă z, a transformării discrete complexe $\mathbb{S}$, provenite din funcțiile de transfer continue, în variabila complexă s, a transformării Laplace, conform §2.2.

Între SDR și SDT există deosebiri al căror efect se manifestă la implementarea sistemului de conducere, îndeosebi în situația unei neconcordanțe nete între valoarea aleasă a perioadei de eșantionare, T, și scala de timp real a părții fixate continue (constantele de timp ale modelului explicit, continuu, identificat). Aceste efecte se datoresc în principal limitărilor hardware și software ale RD — lungimea finită a cuvîntului de calculator, precizia limitată a datelor interne, aproximările care se efectuează, prin neglijarea numerelor foarte mici sau prin „saturarea" numerelor foarte mari, în timpul calculelor, simplitatea bibliotecii aritmetice interne a RD, care nu conține rutine de calcul cu numere complexe sau simboluri abstracte.

Alte efecte derivă din principiul secvențial de prelucrare a informației în calculator ș.a.

Situații-limită în SDT. Conform §2.3., dacă partea continuă fixată este descrisă prin funcția de transfer $H_p(s)$, notată în (2.32) cu $H_f(s)$, iar RD utilizează în ieșire extrapolatorul de ordin zero, atunci funcția de transfer în variabila complexă $z \triangleq e^{Ts}$ se obține conform relațiilor (2.5) și (2.32):

$$H_f(z) = (1 - z^{-1}) \, \mathcal{Z}\left\{\frac{H_p(s)}{s}\right\} = (1 - e^{-Ts}) \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{H_p(\xi)}{\xi} \frac{1}{1 - e^{-T(s-\xi)}} \, d\xi. \tag{2.50}$$

Integrala se evaluează pe un contur închis (fig. 2.3), care conține axa $c - j\infty$ și $c + j\infty$. Dacă $\lim_{\xi \to \infty} H_p(\xi) \triangleq 0$, atunci integrala din (2.50) se calculează prin teorema reziduurilor în polii funcției $H_p(\xi)$. Fie $H_p(\xi) \triangleq \frac{R_m(\xi)}{P_n(\xi)}$, cu $m < n$ și cu polii simpli, reali, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, obținuți din $P_n(\xi) = 0$, caz ales pentru simplitatea ilustrării. În această situație

$$H_f(z)|_{z=e^{Ts}} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} \frac{R_m(\xi)}{\xi P_n(\xi)} \frac{1 - e^{-Ts}}{1 - e^{-T(s-\xi)}} d\xi$$

sau

$$H_f(z)|_{z=e^{Ts}} = \frac{R_m(0)}{P_n(0)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \frac{1 - e^{-Ts}}{1 - e^{-T(s-\xi_i)}}, \quad (2.51)$$

unde $P_n'(\xi_i) \triangleq \left.\frac{d P_n(\xi)}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_i}$, iar $\frac{d[\xi P_n(\xi)]}{d\xi} = P_n(\xi) + \xi P_n'(\xi)$.

În situația limită $T \to 0$, în (2.51) rezultă:

$$\lim_{T \to 0} H_f(z) = H_p(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \frac{s}{s - \xi_i} \triangleq H_f^{t,0}(z), \quad (2.52)$$

în care

$$\lim_{T \to 0} \frac{1 - e^{-Ts}}{1 - e^{-T(s-\xi_i)}} = \frac{s}{s - \xi_i}. \quad (2.53)$$

S-a notat prin $H_f^{t,0}(z)$ modelul teoretic la limită, $T \to 0$.

Fie acum funcția continuă $\frac{H_p(s)}{s}$, din (2.50), care se descompune în funcții simple, prin

$$\frac{H_p(s)}{s} = \frac{R_m(s)}{sP_n(s)} = \frac{H_p(0)}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \frac{1}{s - \xi_i}. \quad (2.54)$$

Multiplicînd cu s identitatea (2.54), se obține:

$$H_p(s) = H_p(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \frac{s}{s - \xi_i}. \quad (2.55)$$

Comparînd modelul la limită teoretic, $H_f^{t,0}(z)$ din (2.52), cu $H_p(s)$ din (2.55), se constată identitatea lor. Adică, în cazul teoretic, utilizîndu-se extrapolatorul de ordinul zero, cînd $T \to 0$, există relația:

$$\lim_{T \to 0} H_f(z) \equiv H_p(s), \; z \triangleq e^{Ts}. \quad (2.56)$$

Situații-limită în SDR. Implementarea în calculator (în RD) a modelelor discrete $H_f(z)$ a fost posibilă datorită asimilării forțate a variabilei com-

plexe $\frac{1}{z} = z^{-1}$ din polinomul $H_f(z)$, exprimat în z^{-1} prin $H_f(z^{-1})$, cu un operator de întîrziere (deplasare) cu un tact de eşantionare, T, notat q^{-1}; acesta nu se aplică transformatelor $\mathfrak{F}$ ale semnalelor, ci chiar semnalelor reale, adică $q^{-1}y_k = y_{k-1}$ [21].

Operatorul de deplasare q^{-1}, aplicat exclusiv semnalelor reale, este independent, prin însuşi modul lui de definire, de perioada de eşantionare T, reprezentînd o convenţie de calcul în prelucrarea ciclică (secvenţială) a semnalelor de intrare-ieşire în UC-RD, conform calculelor algoritmilor rezidenţi în memoria RD.

Dacă $H_f(z^{-1}) \triangleq \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$, rezultă teoretic:

$$A(z^{-1})\, Y(z^{-1}) = B(z^{-1})\, U(z^{-1}), \tag{2.57}$$

toţi termenii de mai sus fiind funcţii complexe în z^{-1}.

Prin asimilarea forţată a variabilei complexe z^{-1} cu operatorul q^{-1}, se introduc operatorii polinomiali $A(q^{-1})$ şi $B(q^{-1})$, care însă se aplică pe numere reale (eşantioanele reale) prin:

$$A(q^{-1})\, y_k = B(q^{-1})\, u_k. \tag{2.58}$$

Relaţia (2.58) ilustrează exact ecuaţia cu diferenţe finite care se implementează în mod real în calculator. Acestei forme reale de implementare i se asociază o funcţie de transfer discretă, reală, operatorială:

$$H_f(q^{-1}) \triangleq \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}. \tag{2.59}$$

Legătura dintre funcţia de transfer complexă $H_f(z^{-1})$ şi operatorul raţional (raport de polinoame de operatori) $H_f(q^{-1})$ din (2.59) constă în aceea că, din punctul de vedere al stabilităţii modelului teoretic $H_f(z^{-1})$ şi modelului real $H_f(q^{-1})$, rădăcinile polinomului complex $A(z^{-1})=0$ şi cele ale ecuaţiei caracteristice $A(q^{-1}) = 0$ trebuie să fie subunitare în modul, iar cele cu modul unitar să fie unice. Atît teoria stabilităţii în domeniul z, cît şi teoria stabilităţii schemelor cu diferenţe finite coincid principial în acest context.

Paralelismul sau (convergenţa) celor două moduri conceptual diferite de abordare a permis utilizarea cu succes a modelelor reale discrete, care nu necesită decît operaţii cu numere reale şi nu cu cele complexe sau cu simboluri.

Practic, după aceste considerente preliminarii, în $H_f(z)$ din (2.51), $z^{-1} = e^{-Ts}$ se substituie cu operatorul q^{-1}, rezultînd:

$$H_f(q^{-1}) = H_p(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-1}e^{T\xi_i}}. \tag{2.60}$$

La limită ($T \to 0$), operatorul q^{-1}, care este *implicit* utilizat de calculator în prelucrarea secvenţială a datelor reale, nu depinde de perioada de eşantionare T ca şi variabila complexă $z = e^{Ts}$; atunci,

$$\lim_{T \to 0} H_f(q^{-1}) = H_p(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i) + \xi_i P_n'(\xi_i)} \triangleq H_f^{T,0}(q^{-1}) \tag{2.61}$$

unde, spre deosebire de (2.53),

$$\lim_{T\to 0}\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}e^{T\xi_i}}=\frac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}}=1. \tag{2.62}$$

Considerîndu-se $H_p(s)$ din (2.55), conform ipotezei de strictă cauzalitate a funcției $H_p(s)$, deci cu $R_m(\cdot)<P_n(\cdot)$, care a permis determinarea valorii integralei din (2.50), practic echivalînd cu condiții inițiale nule ale părții continue fixate, se constată că

$$\lim_{s\to\infty}H_p(s)=H_p(0)+\sum_{i=1}^{n}\frac{R_m(\xi_i)}{P_n(\xi_i)+\xi_iP'_n(\xi_i)}=0. \tag{2.63}$$

Ținînd seama de (2.63), rezultă că modelul real la limită $H_f^{r\cdot 0}(q^{-1})$ din (2.61) este:

$$\lim_{T\to 0}H_f(q^{-1})=H_f^{r\cdot 0}(q^{-1})=0. \tag{2.64}$$

Cu alte cuvinte, la sisteme discrete reale, transferul informației $u_k\to y_k$ „se blochează" la $T\to 0$. Evident, limita $T\to 0$ este dată de perioada minimală care poate fi obținută cu sistemul de calcul în timp real, implementat în RD.

OBSERVAȚIE. Dacă în sinteza structurală a algoritmilor de reglare se utilizează modelele explicite de stare, discrete, ale părții fixate, atunci pentru modelul de stare discret al părții fixate, cu extrapolator de ordin zero, matricele $\mathbf{A}_d$ și $\mathbf{B}_d$ au la limită comportarea reală $\mathbf{A}_d=e^{\mathbf{A}T}$ și $\lim_{T\to 0}\mathbf{A}_d=\mathbf{I}_n$, iar $\mathbf{B}_d\overset{\Delta}{=}e^{\mathbf{A}T}\int_0^T e^{\mathbf{A}\theta}\,d\theta$ și $\lim_{T\to 0}\mathbf{B}_d=0$. Modelul discret real de stare tinde la limită ($T\to 0$) către:

$$x_{k+1}=\mathbf{I}_nx_k,$$

$$y_k=\mathbf{C}_dx_k,$$

model complet necontrolabil și la limită de stabilitate.

Aceste situații-limită, care apar în SDR se vor exemplifica prin cazuri particulare. Condiția practică $T\to 0$ se va evidenția prin alegerea unei perioade de eșantionare T foarte mică în raport cu oricare din constantele de timp ale părții continue fixate care apar în modelul explicit, utilizat în diverse metode de sinteză discretă.

2.5.3. Aplicații

1. *Model discret obținut prin* $\mathcal{Z}$. Fie modelul continuu:

$$H_p(s)=\frac{K_f}{(1+T_{f_1}s)(1+T_{f_2}s)}\cdot$$

Conform [14], prin folosirea extrapolatorului de ordinul zero se obține modelul discret al părții fixate $H_f(z^{-1})$, în care variabila complexă z^{-1} se asimilează cu operatorul q^{-1}; rezultă:

$$H_f(q^{-1}) = (1-q^{-1})K_f\left[\frac{1}{1-q^{-1}} - \frac{\frac{a_2}{a_2-a_1}}{1-p_1q^{-1}} + \frac{\frac{a_1}{a_2-a_1}}{1-p_2q^{-1}}\right], \qquad (2.65)$$

unde $a_1 \triangleq \frac{1}{T_{f_1}}$, $a_2 \triangleq \frac{1}{T_{f_2}}$, $p_1 \triangleq e^{-\frac{T}{T_{f_1}}}$, $p_2 \triangleq e^{-\frac{T}{T_{f_2}}}$.

Trecîndu-se la limită, teoretic prin $T \to 0$, practic prin $\frac{T}{T_{f_{1,2}}} \to 0$ sau $\frac{T}{T_{f_{1,2}}} \ll 1$, se obține modelul:

$$\lim_{T\to 0} H_f(q^{-1}) = K_f\left[1 - \frac{a_2}{a_2-a_1} + \frac{a_1}{a_2-a_1}\right] = 0. \qquad (2.66)$$

Polii $p_{1,2}$ ai modelului (2.65) devin unitari cînd $T \ll \min\{T_{f_1}, T_{f_2}\}$.

2. *Model discret obținut direct din modelul temporal.* Partea continuă fixată este descrisă prin modelul (cu extrapolator de ordinul zero):

$$H_p(s) \triangleq \frac{1-e^{-Ts}}{s}\frac{K_f}{1+T_fs} \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)}, \qquad (2.67)$$

în care Y/U reprezintă ieșirea/intrarea părții continue fixate.

Modelul (2.67), asociat la condiții inițiale nule, conduce la ecuația diferențială:

$$T_f\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = K_f(u(t) - u(t-T)). \qquad (2.68)$$

Pentru momentul de timp discret, curent, $t_k \triangleq kT$ se procedează la aproximările:

$$\dot{y}_k \simeq \frac{y_k - y_{k-1}}{T}, \quad \ddot{y}_k \simeq \frac{y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}}{T^2}. \qquad (2.69)$$

Cu aceste aproximări se obține ecuația cu diferențe finite:

$$y_k = \frac{2+\frac{T}{T_f}}{1+\frac{T}{T_f}}y_{k-1} - \frac{1}{1+\frac{T}{T_f}}y_{k-2} + K_f\frac{\frac{T}{T_f}}{1+\frac{T}{T_f}}T(u_k - u_{k-1}). \qquad (2.70)$$

Teoretic, cînd $T \to 0$, aproximările (2.69) devin oricît de precise, adică

$$\lim_{T\to 0}\dot{y}_k = \frac{dy(t)}{dt}\bigg|_{t=t_k} \quad \lim_{T\to 0}\ddot{y}_k = \frac{d^2y(t)}{dt^2}\bigg|_{t=t_k}.$$

Practic, condiția $T \to 0$ se utilizează prin $\frac{T}{T_f} \to 0$, adică $\frac{T}{T_f} \ll 1$, caz în care modelul (2.70) devine la limită:

$$y_k = 2\,y_{k-1} - y_{k-2} + \eta\left(\frac{T}{T_f}, T\right)(u_k - u_{k-1}), \tag{2.71}$$

unde, pentru $\frac{T}{T_f} \ll 1$, $\eta\left(\frac{T}{T_f}, T\right) \approx 0$.

Modelul (2.71), cu rădăcinile ecuației caracteristice $1 - 2q^{-1} + q^{-2}$ egale și unitare, $q_1 = q_2 = 1$, este instabil. Totodată, transferul comenzii în (2.70) prin intermediul funcției $\eta\left(\frac{T}{T_f}, T\right)$ este blocat cînd $\frac{T}{T_f} \to 0$; așadar, modelul-limită (2.71) este și necontrolabil.

Exemplu numeric. Conform §2.6, se consideră modelul (2.70) și coeficienții:

$$\tilde{a} \triangleq \frac{2 + \frac{T}{T_f}}{1 + \frac{T}{T_f}},\ \tilde{b} \triangleq \frac{1}{1 + \frac{T}{T_f}},\ \tilde{c} = \frac{K_f \frac{T}{T_f}}{1 + \frac{T}{T_f}}\,T, \tag{2.72}$$

reprezentați pe 16 biți, în virgulă fixă, în formatul:

$$\underbrace{x\,x\,\ldots\,x,}_{\text{7 biți}}\ \underbrace{x\,x\,\ldots\,x,}_{\text{9 biți}} \qquad \begin{matrix}\text{MSB} & & \text{LSB}\end{matrix} \tag{2.73}$$

număr fără semn, pozitiv.

Partea întreagă din (2.73) este cuprinsă în plaja 0 ... 127, iar partea fracționară, între 0 și $1-2^{-9}$. Pasul de cuantificare $\text{LSB} = 2^{-9} = \frac{1}{512}$. Numerele mai mici decît $\frac{1}{512}$ sînt considerate nule. Se notează $\alpha \triangleq \frac{T}{T_f}$ și din (2.72) rezultă $\tilde{a} = \tilde{a}(\alpha)$, $\tilde{b} = \tilde{b}(\alpha)$ și $\tilde{c} = \tilde{c}(\alpha)$. Toți coeficienții $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ și α se introduc în același format unic (2.73), care simplifică biblioteca aritmetică.

Fie acum un proces termic cu $T_f = 10$ min $= 600$ s.

Dacă $\frac{T}{600} < \frac{1}{512}$, parametrul α este considerat nul în RD, și $\tilde{a} = 2$, $\tilde{b} = 1$, $\tilde{c} = 0$ $\left(T < \frac{600}{512} \simeq 1{,}1\ \text{s}\right)$.

O soluție constă în reprezentarea diferită a parametrului α, ca număr fracționar (conform § 2.6). Atunci pasul de cuantificare scade la 2^{-15} și, pentru același proces, $\frac{T}{600} < \frac{1}{2^{-15}}$ sau $T < 18{,}3$ ms. Deci, dacă dintr-o tendință excesivă de cvasicontinuitate comportamentală se alege $T < 18{,}3$ ms, atunci $\alpha = 0$ și în RD se utilizează tot modelul explicit, discret, instabil din (2.71).

Din exemplele prezentate se desprinde importanța legăturii profunde între dinamica procesului reglat, perioada de eșantionare, T, aleasă aprioric și precizia de reprezentare internă (binară) a coeficienților modelelor discrete ale părții fixate, pentru metodele de sinteză care utilizează explicit modelul sistemic, identificat, al părții fixate.

În majoritatea aplicațiilor industriale, perioada de eșantionare se alege *off-line* din informațiile apriori ale dinamicii procesului (model sistemic).

În cazul aplicațiilor în care se implementează algoritmi de reglare care se acordează în exclusivitate experimental, fără a dispune de modelul sistemic al procesului, perioada de eșantionare se poate alege *on-line*, în scopul optimizării valorii ei [22]. Acest aspect avantajează RD cu frecvențe de eșantionare programabile, care au implementate algoritmi de reglare de tip PID discreți [17].

2.6. FORMA INTERNĂ DE REPREZENTARE A NUMERELOR ÎN RD

2.6.1. Considerații generale

În calculatoare numerele se reprezintă sub două forme: în virgulă fixă (forma naturală) și în virgulă mobilă (forma normală). În [11], [9], [14] sînt descrise detaliat avantajele și dezavantajele celor două modalități de reprezentare.

Se poate afirma că forma naturală este preferată în RD datorită în principal simplității bibliotecii aritmetice în virgulă fixă, efortului de calcul mai redus, constînd în timpii de calcul inferiori celor care apar în utilizarea numerelor în forma normală, consumului mai mic de memorie internă ș.a.

Avantajele formei normale de reprezentare constau îndeosebi în precizia bună și constantă pe întreaga plajă de variație a numerelor.

Aritmetica în virgulă fixă se preferă și datorită simplității unităților aritmetice specializate (coprocesoare) [9].

Fie R un număr real reprezentat în virgulă fixă, într-un cuvînt de calculator (*cuvîntul de calculator* este un multiplu întreg al cuvîntului intern de date al microprocesorului utilizat, uzual, de 16 biți). Ideal este cazul în care cuvîntul intern și cuvîntul de calculator au aceeași dimensiune. Fie $l \geqslant 16$ biți lungimea acestui cuvînt de calculator. Atunci, valoarea reală zecimală a numărului R este:

$$R = 2^{-B}\left(-b_{l-1}\,2^{l-1} + \sum_{j=0}^{l-2} b_j\,2^j\right), \tag{2.74}$$

unde b_{l-1} reprezintă bitul de semn, $b_j \in \{0\,;\,1\}$, $j = \overline{0\ l-2}$, iar B fixează poziția virgulei. Dacă $B = 0$, atunci R este număr întreg. Cînd $0 < B < l-1$, R este număr zecimal (în mărime și semn), iar pentru $B = l-1$, $|R| \leqslant 1$ și R este număr fracționar.

În RD interesează, în ceea ce privește mărimile sistemice ale buclei automate, cazul reprezentării prin numere fracționare, deci cu $B = l-1$, în cod complementar față de doi, în care bitul de rang zero dinaintea virgulei

este egal cu 0 pentru $R > 0$, respectiv cu 1, pentru $R < 0$. Numerele $R < 0$ se reprezintă prin $2 + R$.

Exemplu. $l = 4$; $B = l - 1 = 3$

$$+0{,}125_{10} \rightarrow 0{,}001_2$$

$$-0{,}125_{10} \rightarrow 2 + (-0{,}125) = 1{,}875 \rightarrow 1{,}111$$

$$0 \rightarrow 0{,}000$$

Numerele fracționare R au valori în plaja:

$$-1 \leqslant R \leqslant 1 - 2^{-(l-1)};$$

$$0 \leqslant |R| \leqslant 1 - 2^{-(l-1)}. \tag{2.75}$$

Pasul de cuantificare (egal cu LSB) este $2^{-(l-1)}$.

Reprezentarea în formă fracționară ($|R| \leqslant 1$) permite simplificarea structurii hardware a RD și micșorarea timpului de execuție a operației aritmetice principale (critice) — multiplicarea (divizarea) —, aspect important în sistemele de reglare în timp real [11].

De regulă, produsul a două numere în virgula fixă, de lungime l, se reprezintă (în acumulator sau registrul-produs) prin cuvinte de lungime $2l$ (fig. 2.16), [9].

$$l = 16.$$

Datorită lungimii finite a registrelor utilizate, rezultatul înmulțirii a două numere trebuie aproximat, neputîndu-se obține și reprezenta cu exactitate.

Pentru numere în virgulă fixă există două moduri de aproximare a rezultatului-produs;

— prin rotunjire, în care rezultatul final se aproximează prin cel mai apropiat nivel de cuantificare;

— prin trunchiere, unde rezultatul final se aproximează prin cel mai înalt nivel de cuantificare, fără a depăși valoarea reală a rezultatului, deci prin neglijarea biților cei mai nesemnificativi.

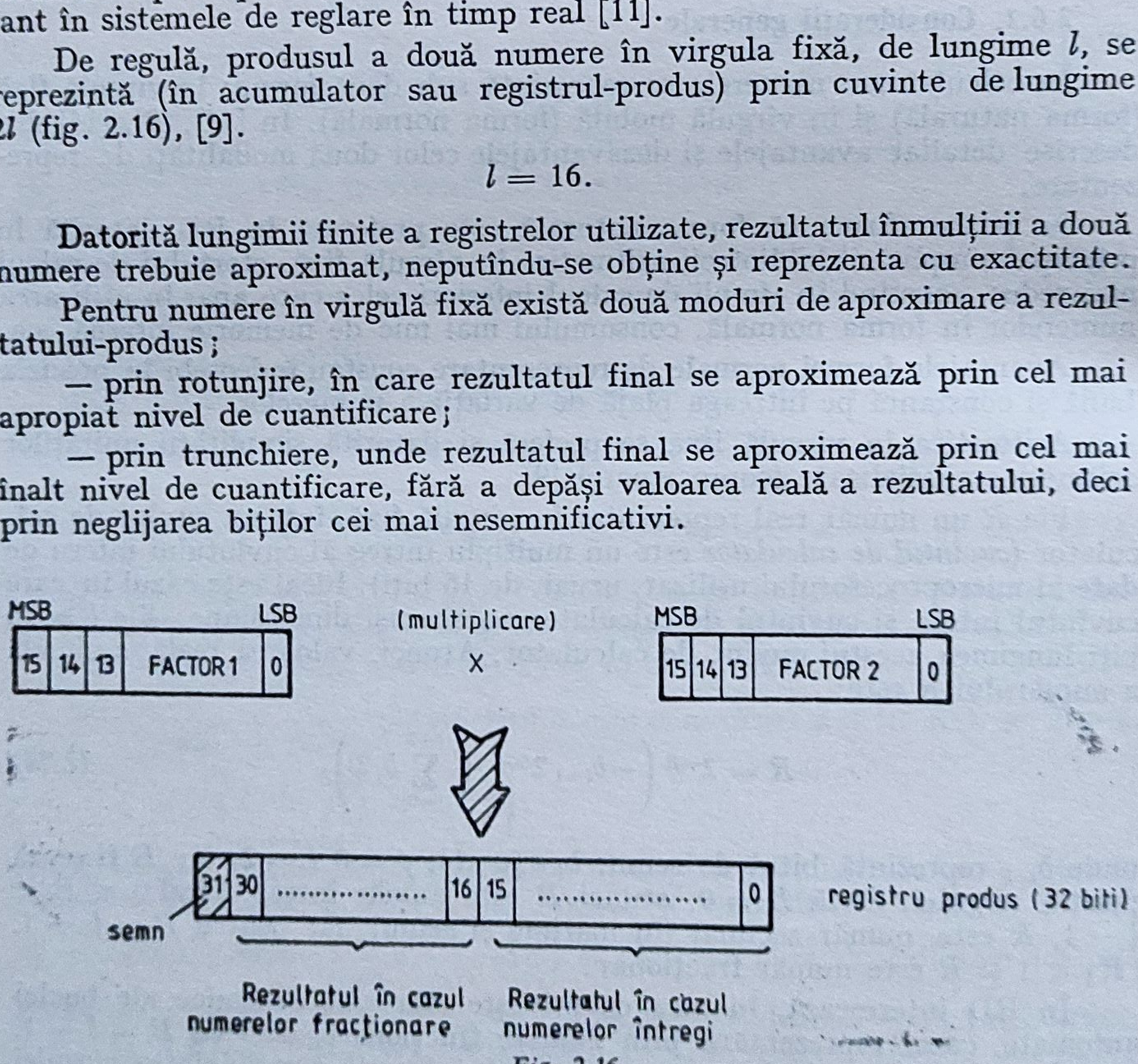


Fig. 2.16

2.6.2. Erorile maxime introduse prin operațiile de trunchiere sau rotunjire

Pentru numere fracționare reprezentate în cod complement față de 2, cu b biți pentru partea fracționară a rezultatului final și $(l-1)$ biți pentru partea fracționară (a cuvîntului de calculator), unde $(l-1) < b$, erorile maxime care apar în cele două metode de aproximare sînt [24]:

Trunchierea. Eroarea absolută de trunchiere — definită prin $E_T \triangleq Q(x) - x$, unde $Q(x)$ reprezintă valoarea după trunchiere, iar x, valoarea absolută înainte de aceasta — este maximă cînd toți biții înlăturați, în număr de $b-(l-1)$, sînt egali cu 1.

Pentru numere pozitive $Q(x) < x$ și

$$-(2^{-(l-1)} - 2^{-b}) \leqslant E_T < 0, \tag{2.76}$$

iar pentru numere negative $Q(x) > x$ și

$$0 < E_T \leqslant 2^{-(l-1)} - 2^{-b}. \tag{2.77}$$

Exemplu. Pentru numere fracționare, conform fig. 2.16, în care produsul este reprezentat pe 32 de biți, cu bitul de rang maximal, 31, ca bit de semn, și virgula în rangul 30, deci cu $b = 31$, rezultatul este trunchiat, pentru cuvinte pe 16 biți, cu bitul de rang 15 de semn și $l - 1 = 15$ biți pentru partea fracționară. Eroarea maximă de trunchiere în acest caz este $0 \leqslant E_T \leqslant 2^{-15} - 2^{-31}$, pentru numere negative, sau $-(2^{-15} - 2^{-31}) \leqslant E_T < 0$, pentru numere pozitive.

Rotunjirea. Eroarea absolută de rotunjire este definită similar prin $E_R = E_T = Q(x) - x$. Înainte de rotunjire, rezultatul-produs are b biți, iar după rotunjire, $(l-1)$ biți, cu $l - 1 < b$.

Eroarea maximă de rotunjire este:

$$E_{R\max} \simeq \frac{1}{2} 2^{-(l-1)}, \tag{2.78}$$

fiind, în general, cuprinsă în intervalul:

$$-\frac{1}{2}(2^{-(l-1)} - 2^{-b}) \leqslant E_R \leqslant \frac{1}{2}(2^{-(l-1)} - 2^{-b}). \tag{2.79}$$

Eroarea de rotunjire este independentă de modul de reprezentare a numerelor negative, afectînd doar modulul lor.

Exemplu. Ca și în cazul precedent (fig. 2.16), eroarea E_R este cuprinsă între limitele $-\frac{1}{2}(2^{-15} - 2^{-31}) \leqslant E_R \leqslant \frac{1}{2}(2^{-15} - 2^{-31})$.

2.6.3. Efecte sistemice negative

Conform relației (2.75), numerele R care în decursul calculelor sînt mai mici de $2^{-(l-1)}$ (pasul de cuantificare) sînt considerate ca nule și tratate ca atare în calcule. Dacă rezultă însă valori mai mari decît $(1-2)^{-(l-1)}$, atunci, în UC, rezultatul este reprezentat ca numărul 1. În operațiile de adunare, scădere, multiplicare, divizare, numerele fracționare R pot depăși limitele de mai sus. Acest aspect reprezintă o consecință a lungimii finite de reprezentare a numerelor în RD (cuvîntul de calculator finit).

În RD există rutine de scalare și limitare min/max [9], [25], conform caracteristicii de scalare/limitare din fig. 2.17 sau din fig. 2.18.

Operația de limitare min/max care se efectuează conform caracteristicilor din figurile menționate poate genera în buclă automată autooscilații, dacă valorile consecutive ale rezultatelor intermediare sau finale sînt comparabile cu limitele min/max (0/1, 1/1), prin asimilarea modului de limitare cu un element static, neliniar, fără memorie, de tip „saturație" [9].

În conjuncție cu operația de aproximare (trunchiere sau rotunjire), operația de cuantificare se poate asimila ca un element fictiv, static, fără memorie, caracteristica sa de transfer avînd aspectul din fig. 2.19.

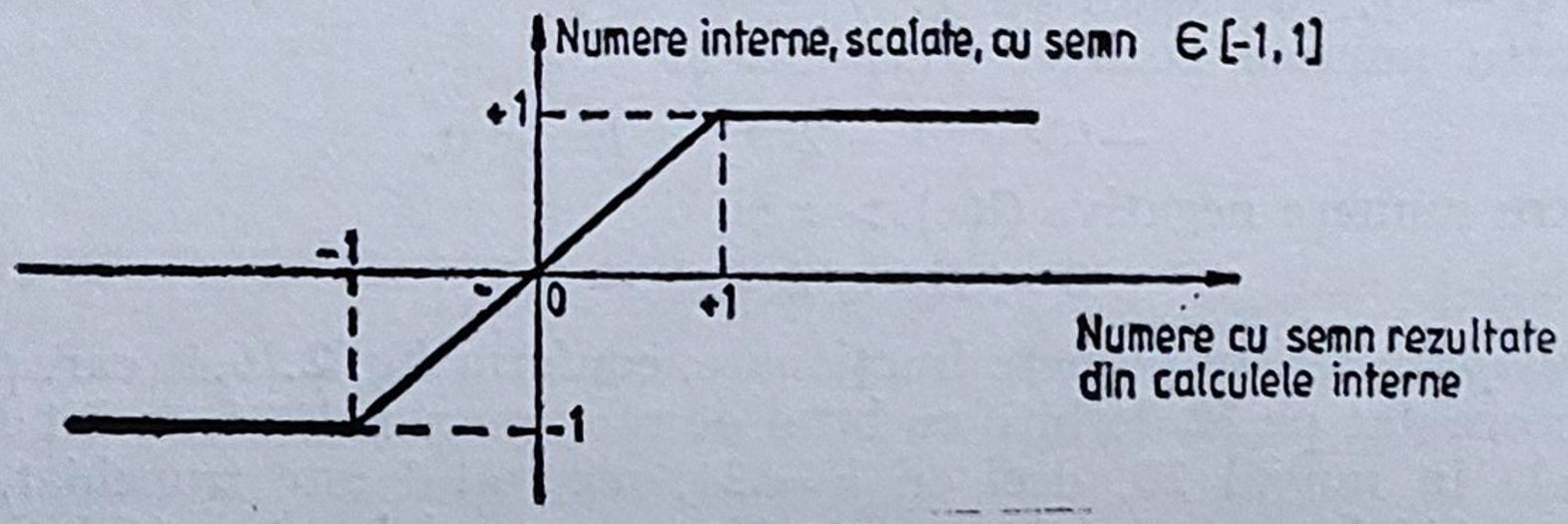


Fig. 2.17

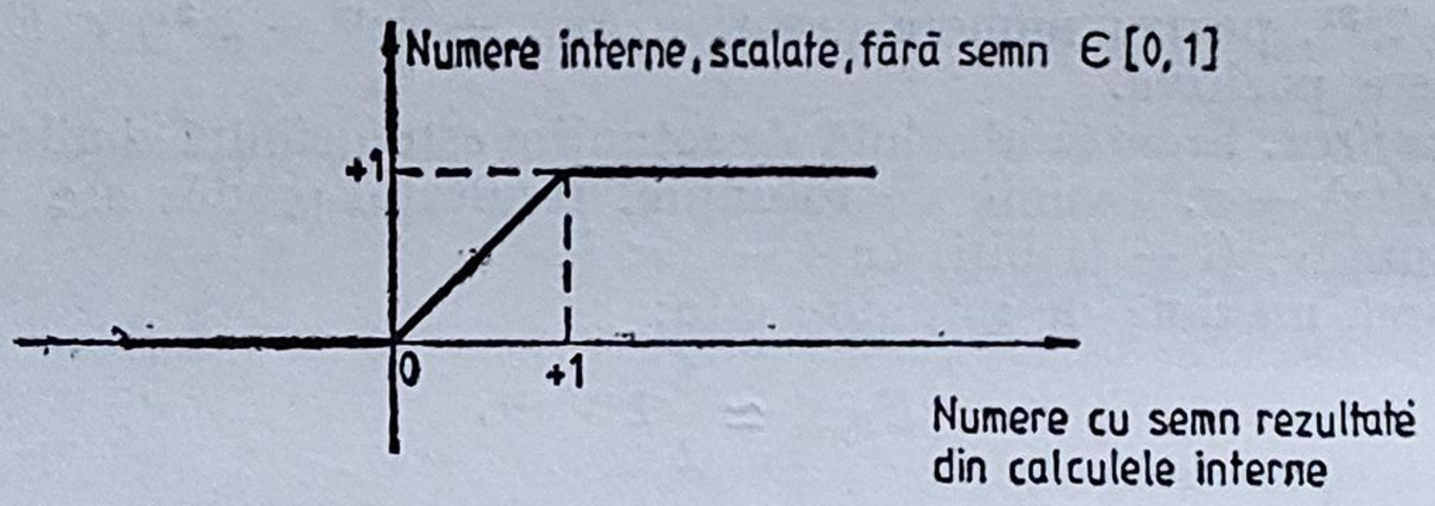


Fig. 2.18

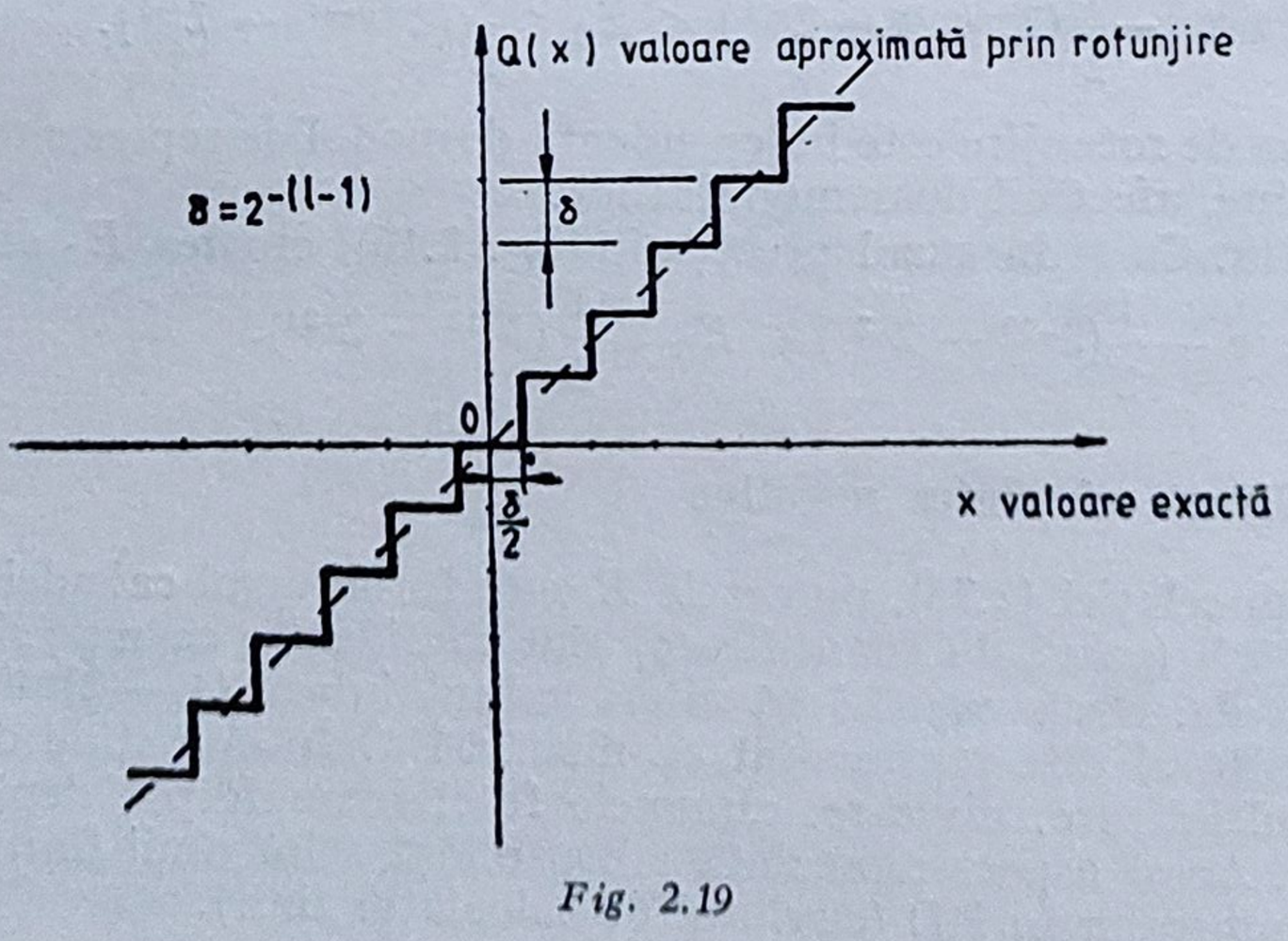


Fig. 2.19

Pasul de cuantificare este $\delta = 2^{-(l-1)}$. În cazul aproximării prin rotunjire, eroarea de rotunjire, E_R, variază în plaja specificată în relația (2.79). Conform exemplului din §2.6.2., pentru numere reprezentate pe $l = 16$ biți și rezultatul-produs pe 32 biți, dacă $2^{-31} \approx 0$, atunci eroarea de rotunjire variază în plaja $-\frac{1}{2}\delta \leqslant E_R \leqslant \frac{1}{2}\delta$, $\delta = 2^{-15}$; deci, $E_{R\,max} \simeq \frac{1}{2} 2^{-15} = 2^{-14}$.

Caracteristica statică, neliniară, ilustrată în fig. 2.19, similară cu caracteristicile de transfer ale convertoarelor CAN și CNA, poate provoca autooscilații stabile sau nu, depinzînd de caracteristicile în frecvență ale părții fixate. În capitolul 4 se analizează în frecvență ciclurile limită care pot să apară datorită prezenței unor elemente (*software* sau *hardware*) neliniare, cu caracteristici de transfer avînd aspectul din fig. 2.19. Se constată că posibilitatea evitării apriori, din proiectare, a autooscilațiilor cauzate de aceste elemente este mult mărită dacă pasul de cuantificare este cît mai mic. Pe de altă parte, prin micșorarea pasului $\delta = 2^{-(l-1)}$, realizată prin mărirea lui l, rezultatele cu valori absolute foarte mici devin comparabile cu erorile de aproximare (E_R sau E_T). Așadar, pasul de cuantificare trebuie redus pînă la o limită inferioară impusă de raportul „rezultat foarte mic" acceptat/E_R (sau E_T). Practic, erorile introduse și efectul lor asupra numerelor foarte mici se studiază într-un cadru probabilistic.

Operația de cuantificare nu permite, ideal, reprezentarea exactă a numerelor în calculator. Dacă la momentul de eșantionare $t_k \triangleq kT$ valoarea exactă, deci necunoscută, a unui rezultat intermediar sau final este x_k, iar valoarea aproximată, deci cunoscută, este $\hat{x}_k$, atunci în [24], [9], [28], [29] se consideră că *zgomotul de cuantificare și aproximare* — notat cu e_k — este un proces stohastic, care afectează probabilistic valoarea exactă x_k, prin modelul liniar:

$$\hat{x}_k = x_k + e_k. \tag{2.80}$$

Pentru procesul stohastic e_k, se consideră satisfăcute ipotezele statistice:

- e_k este asimilat ca un „zgomot alb";
- e_k și x_k sînt necorelate statistic.

Cu aceste considerații preliminare referitoare la numerele în virgulă fixă, fracționare, reprezentate în cod complement față de 2 printr-un cuvînt de calculator cu l biți ($l-1$ biți pentru partea fracționară), deci cu $\delta \triangleq 2^{-(l-1)}$ pasul de cuantificare, media statistică și dispersia variabilei e_k în cele două tipuri de aproximări sînt [9], [24]:

- pentru trunchiere:

$$m_t = -\frac{\delta}{2}, \quad \sigma_t^2 = \frac{\delta^2}{12}; \tag{2.81}$$

- pentru rotunjire:

$$m_R = 0, \; \sigma_R^2 = \sigma_t^2 = \frac{\delta^2}{12}. \tag{2.82}$$

Conform [32], [24], cînd numerele se reprezintă prin mărime și semn, sau complement față de 1, relațiile (2.81) și (2.82) nu mai sînt valabile, întrucît e_k nu satisface ipoteza statistică.

Din (2.82) se evidențiază cazul favorabil $m_R = 0$, în care rotunjirea este indicată. Totodată, în situația menționată, dacă σ_x^2 este dispersia componentei utile, atunci raportul semnal util/zgomot poate fi ilustrat prin relația [24]:

$$\lambda \stackrel{\Delta}{=} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_R^2} = \frac{\sigma_x^2}{\frac{2^{-2(l-1)}}{12}}, \tag{2.83}$$

iar în decibeli:

$$\lambda\,[\mathrm{dB}] \simeq 6{,}02\,(l-1) + 10{,}79 + 10\,\lg\,\sigma_x^2. \tag{2.84}$$

Se constată că raportul λ[dB] crește cu aproximativ 6 dB pentru fiecare bit al cuvîntului de calculator, de unde necesitatea unor cuvinte cu l mare.

Datorită restricțiilor (preț, gabarit etc.), parametrul l se alege printr-un compromis între precizie și prețul de cost [17].

În RD moderne, toți coeficienții programabili se introduc prin teste zecimale, cu o precizie foarte bună (uzual, 0,1%). Deși inițial acești coeficienți pot fi specificați cu o precizie foarte mare (din calcule *off-line* în calculatoare universale), odată introduși în sistemul de calcul al RD, ei sînt reprezentați și utilizați în limitele preciziei date de reprezentarea internă a numerelor și de procedurile de calcul și aproximare a rezultatelor.

În cazul algoritmilor de reglare proiectați *off-line* cu o precizie oricît de mare, odată implementați și memorați în RD, precizia rezultată a coeficienților poate afecta considerabil performanțele algoritmului. (De exemplu, reprezentarea internă a unui „dipol de integrare" necesită cel puțin 4 cifre zecimale exacte, deci cel puțin 14 biți pentru partea fracționară).

În ceea ce privește algoritmii de reglare tipizați care se acordează experimental (PID), erorile de reprezentare internă a coeficienților sînt mai puțin decisive, motivul constînd în procedurile iterative de acordare experimentală *on-line*, în buclă închisă, a algoritmului de reglare.

În general, efectele negative datorate reprezentării interne, cu precizii limitate, a coeficienților algoritmului de reglare sînt evitate prin proiectarea unor algoritmi „robuști din punct de vedere numeric", deci bine condiționați [30], [31], [17].

OBSERVAȚIE. Aspectele referitoare la precizia coeficienților algoritmului de reglare sînt specifice algoritmilor cu coeficienți programabili, introduși așadar prin consola de date a RD. În cazul algoritmilor proiectați *off-line*, ei se memorează direct în memorii fixe (ROM) cu o precizie mult mai mare decît în cazul precedent (PID), cînd coeficienții se definitivează în etapa de acordare experimentală a RD. Datorită costului încă ridicat al tastaturii zecimale, coeficienții programabili se introduc cu cel mult 3 cifre zecimale exacte (după virgulă) [17].

2.7. SCALAREA INTERNĂ A MĂRIMILOR SISTEMICE ÎN REPREZENTAREA FRACȚIONARĂ

Conform §2.6, în RD se preferă aritmetica în virgulă fixă, datorită simplității consumului redus de memorie și vitezei de calcul mărite față de reprezentarea normală.

Mărimile sistemice cu care operează algoritmul de reglare, u, r, y, ε ş a., sînt prelucrate în UC-RD într-o formă normată, independentă de numărul rangurilor convertoarelor de i/e, A/N şi N/A, ceea ce conferă în plus şi aspectul consacrat din teoria sistemelor. Aceste mărimi sînt reprezentate în format fracţionar, cu $|u_k^{UC}| \leqslant 1$; $|y_k^{UC}| \leqslant 1$; $|\varepsilon_k^{UC}| \leqslant 1$; $|r_k^{UC}| \leqslant 1$ [9], [17].

2.7.1. Normarea mărimilor analogice de intrare în RD

Mărimile analogice de intrare în RD sînt măsura y şi referinţa externă r; dar în interfaţa de intrări analogice mai pot fi introduse şi alte mărimi reprezentînd diverse impulsuri de reacţie şi perturbaţii măsurabile, utilizate în diverse configuraţii sistemice [17].

Dacă n_{CAN} este numărul de ranguri binare ale convertorului A/N, utilizat multiplexat în interfaţa de intrări analogice, şi $v(t_k) = v_k$ — eşantionul curent al mărimii analogice de intrare, introdus la intrarea CAN, atunci la ieşirea CAN va rezulta vectorul binar v_k^{CAN}, reprezentat pe n_{CAN} biţi, număr întreg pozitiv (fără semn), $v_k^{CAN} \in [0, 2^{n_{CAN}} - 1]$.

Prin operaţii *software*, mărimea binară v_k^{CAN} este normată în diverse moduri, rezultînd valoarea v_k^{UC}, utilizată în algoritmul de reglare. Mărimea v_k^{UC}, este reprezentată pe l biţi (l reprezintă lungimea cuvîntului de calculator), în format fracţionar, cu $|v_k^{UC}| \leqslant 1$ (v_k — notaţie generală).

Dacă mărimile sistemice y_k^{UC} şi r_k^{UC} sînt pozitive (fără semn), fracţionare, $(\forall)k \geqslant 0$, valoarea calculată ε_k^{UC} este fracţionară cu semn.

În continuare sînt prezentate două variante de reprezentare pentru toate mărimile sistemice.

Varianta I de reprezentare şi normare [17]. În această variantă, toate mărimile sistemice sînt reprezentate în format fracţionar, cu $(l-2)$ biţi alocaţi pentru partea fracţionară, un bit de rang $(l-2)$ pentru reprezentarea numărului 1.0 şi bitul de rang $(l-1)$ utilizat pentru semn (fig. 2.20). Acest format fracţionar permite reprezentarea valorii maximale egale cu unitatea.

- *Normarea măsurii*

$$y_k^{UC} = \frac{y_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}} - 1} \in [0,1] \tag{2.85}$$

Simbolic, operaţia de normare este efectuată de un element (implementat *software*) cu caracteristica de transfer ilustrată în fig. 2.21, elementul fiind reprezentat în fig. 2.22.

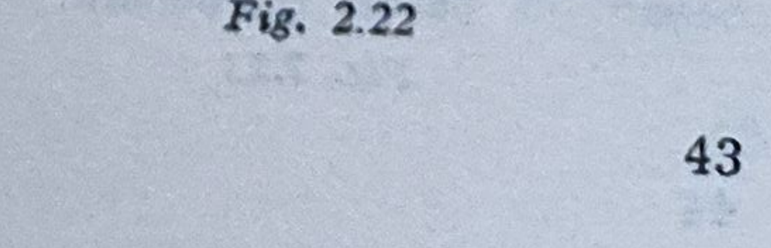


Fig. 2.20

Fig. 2.21

Fig. 2.22

• *Normarea referinței externe, analogice.* Similar relației (2.85), referința normată este:

$$r_k^{UC} = \frac{r_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}} - 1} \in [0,1]. \tag{2.86}$$

• *Normarea mărimii de eroare a buclei automate,* ε

— Algoritmul de reglare prelucrează exclusiv eroarea ε_k și atunci $\varepsilon_k^{CAN} = r_k^{CAN} - y_k^{CAN}$, cu valori în intervalul $\varepsilon_k^{CAN} \in [-(2^{n_{CAN}} - 1), (2^{n_{CAN}} - 1)]$. În consecință, eroarea normată utilizată în calculele algoritmului de reglare este:

$$\varepsilon_k^{UC} = \frac{\varepsilon_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}} - 1} \in [-1, 1]. \tag{2.87}$$

— Algoritmul de reglare prelucrează nu numai eroarea ε_k, ci și — independent — valorile mărimilor r_k, y_k. Atunci, direct, valoarea normată este:

$$\varepsilon_k^{UC} = r_k^{UC} - y_{k1}^{UC} \in [-1, 1]. \tag{2.88}$$

Exemplu. Fie valorile uzuale $l = 16$ și $n_{CAN} = 12$. Atunci, $y_k^{CAN} \in [0, 4095]$.

Pasul de cuantificare intern este $2^{-(l-2)} = 2^{-14}$. Cea mai mare valoare fracționară (subunitară) reprezentabilă este $1 - 2^{-14}$. Pentru $y_k^{CAN} = 4095$, rezultă $y_k^{UC} = 1$ — valoare reprezentabilă explicit. Deci,

$$y_{k_{min}}^{UC} \text{ (nenul)} = 0,00\overbrace{\ldots.}^{} 01_B \simeq 6,1 \cdot 10_{10}^{-5};$$

$$y_{k_{max}}^{UC} \text{ (fracționar)} = 0,11 \ldots. 11_B \simeq 0,999939_{10};$$

$$y_{k_{max}}^{UC} = 1,00 \ldots. 00_B = 1_{10} \text{ (exact)}.$$

OBSERVAȚIE. Deși acest format permite reprezentarea explicită a valorilor exacte ± 1 (valori „nedepășite"), modul de normare descris în (2.85) are două inconveniente:

— necesită la fiecare moment de eșantionare curent, t_k, efectuarea diviziării (aproximative) din 2.85;

— partea fracționară a mărimilor fără semn (pozitive) este doar de $l - 2$ biți și nu, maximal, $l - 1$, biți; ca urmare, precizia de reprezentare internă se diminuează:

Varianta I de reprezentare și normare are însă și o serie de avantaje, acestea fiind expuse în paragrafele următoare.

Varianta a II-a de reprezentare și normare [17]. În acest caz se elimină cele două inconveniente ale primei variante, partea fracționară fiind reprezentată pe $l - 1$ biți (maximal), fără ca valorile maxime ± 1 să mai fie reprezentabile explicit în acest format (fig. 2.23).

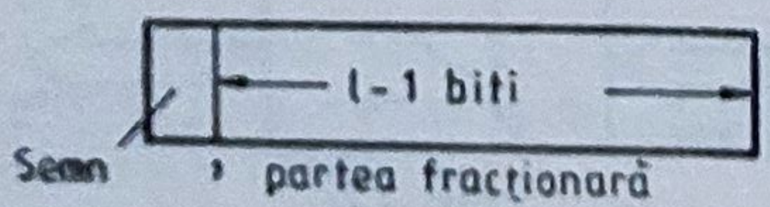


Fig. 2.23

• *Normarea măsurii*

$$y_k^{UC} = \frac{y_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}}} \in [0,1 - 2^{-n_{CAN}}] \tag{2.89}$$

Deoarece $y_k^{CAN} \in [0, 2^{n_{CAN}} - 1]$ (unit. CAN), rezultă că valoarea maximă a măsurii normate este acum $y_{k,\max}^{UC} = 1 - 2^{-n_{CAN}} < 1$.

Elementul simbolic de normare are o caracteristică și o reprezentare similare cu cele din cazul precedent (figurile 2.21 și 2.22).

• *Normarea referinței externe*. Similar cu (2.86),

$$r_k^{UC} = \frac{r_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}}} \in [0, 1 - 2^{-n_{CAN}}]. \tag{2.90}$$

• *Normarea mărimii de eroare*

— Similar cu (2.87),

$$\varepsilon_k^{UC} = \frac{\varepsilon_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}}} \in [-(1 - 2^{-n_{CAN}}), (1 - 2^{-n_{CAN}})]. \tag{2.91}$$

— Similar cu (2.90)

$$\varepsilon_k^{UC} = r_k^{UC} - y_k^{UC} \in [-(1 - 2^{-n_{CAN}}), (1 - 2^{-n_{CAN}})]. \tag{2.92}$$

Exemplu. Pentru valorile uzuale $l = 16$ și $n_{CAN} = 12$, rezultă $y_k^{CAN} \in [0,4095]$. Partea fracționară este reprezentată pe $l - 1 = 15$ biți, iar pasul de cuantificare intern este egal cu $2^{-15} < 2^{-14}$. Valoarea maximă reprezentabilă este $1 - 2^{-(l-1)} = 1 - 2^{-15} \simeq 0{,}999969$. Așadar,

$$y_{k_{\min}}^{UC} \text{ (nenul)} = 0{,}\overbrace{00\ldots.01}^{15\text{ biți}}{}_B \simeq 3{,}05 \cdot 10_{10}^{-5};$$

$$y_{k_{\max}}^{UC} = 0{,}111111111111000_B = 1 - 2^{-12} \simeq 0{,}999756 < 1 - 2^{-15}.$$

OBSERVAȚIE. Prin utilizarea acestui mod de reprezentare și normare, precizia crește $\left(\text{pasul de cuantificare scade cu } \frac{1}{2} = \frac{2^{-15}}{2^{-14}}\right)$, iar divizarea cu $2^{n_{CAN}}$ (sau multiplicarea cu $2^{n_{CAN}}$) din relațiile (2.89), (2.90) și (2.91) se face prin simpla deplasare a virgulei spre stînga numărului v_k^{CAN}, cu n_{CAN} ranguri binare. Așadar, dacă $v_k^{CAN} = xx \ldots xx$ număr întreg, reprezentat pe n_{CAN} biți, atunci $v_k^{UC} = \pm\, 0{,}XX \ldots XX00 \ldots 0$, zerourile fiind plasate pînă la completarea părții fracționare, deci un număr de $l - 1 - n_{CAN}$ zerouri.

Limita maximă — subunitară, fracționară și dependentă de n_{CAN} — trebuie memorată în prealabil.

Varianta studiată are însă unele dezavantaje, care vor fi descrise în paragrafele următoare.

2.7.2. Denormarea comenzii interne, u_k^{UC}

După efectuarea calculelor pe care le presupune aplicarea algoritmului de reglare rezultă comanda (internă) $u_k^{UC} = f(u_{k-1}^{UC}, u_{k-2}^{UC}, \ldots, \varepsilon_k^{UC}, \varepsilon_{k-1}^{UC}, \ldots)$. Mărimea obținută, avînd valori negative sau supraunitare, este „aplicată" unui element (software) de limitare cu caracteristică similară celei din fig. 2.17 sau 2.18. Modul de prelucrare în continuare a mărimii u_k^{UC} diferă în funcție de variantele prezentate în paragraful precedent.

Varianta I de denormare. Corespunzător variantei întîi de normare, valoarea maximală ce poate fi reprezentată explicit este $u_{k\max}^{UC} = 1$. Elementul

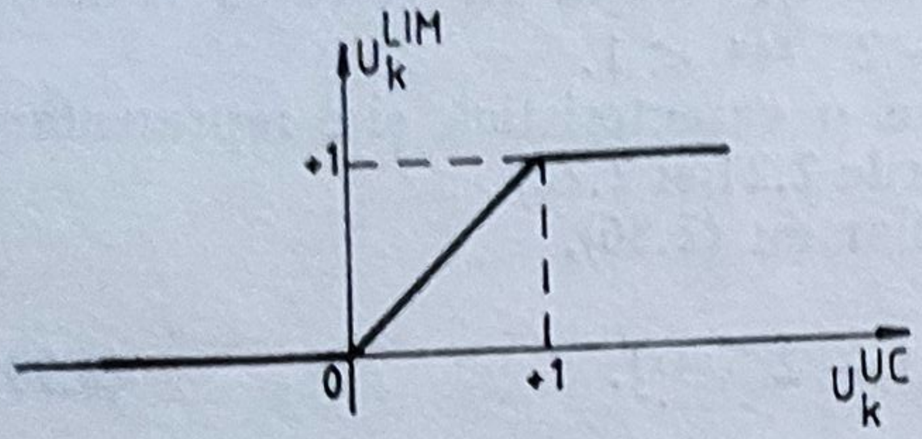


Fig. 2.24

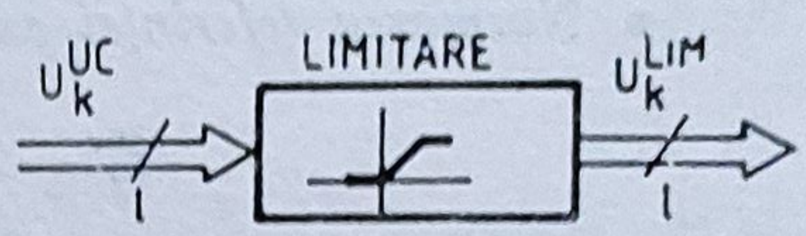


Fig. 2.25

de limitare cu o caracteristică similară celei din figura 2.24, este reprezentat în fig. 2.25.

Panta caracteristicii de limitare în porțiunea liniară este unitară; deci,

$$P_{\text{LIM}} = \frac{u_k^{\text{LIM}}}{u_k^{\text{UC}}} = 1\,(\forall)\; k \geqslant 0. \tag{2.93}$$

Denormarea comenzii u_k^{LIM} constă în efectuarea multiplicării:

$$u_k^{\text{CNA}} \triangleq [u_k^{\text{LIM}}\,(2^{n_{\text{CNA}}} - 1)]_T \in [0, 2^{n_{\text{CNA}}} - 1], \tag{2.94}$$

unde cu $[.]_T$ s-a notat partea întreagă rezultată prin trunchiere.

Deoarece rezultatul acestui produs este reprezentat pe l biți și $l > n_{\text{CNA}}$ (n_{CNA} — numărul de ranguri binare ale convertorului N/A din ieșirea RD), el se trunchiază — cea mai folosită metodă de aproximare în RD uzuale — la primii n_{CNA} biți semnificativi ai părții întregi, iar valoarea lui, număr întreg pozitiv, în plaja de valori din relația (2.94), se aplică la intrarea CNA.

În această variantă, eroarea maximă de trunchiere E_T, apare în situația cînd toți biții eliminați prin trunchiere și în număr de $l - 2 - n_{\text{CNA}}$ sînt egali cu 1; deci,

$$E_T = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{l-2-n_{\text{CNA}}}} = 1 - \frac{1}{2^{l-2-n_{\text{CNA}}}}. \tag{2.95}$$

Eroarea relativă maximă de trunchiere este definită prin:

$$E_T^r\,[\%] = \frac{E_T}{2^{n_{\text{CNA}}} - 1}\,100. \tag{2.96}$$

Exemplu. Fie $l = 16$. Pentru $n_{\text{CNA}} = 10$, rezultă $E_T = 0{,}9375$ și $E_T^r = 0{,}092\,(\%) \simeq 0{,}1\%$, iar pentru $n_{\text{CNA}} = 12$, $E_T = 0{,}75$ și $E_T^r = 0{,}018\% \simeq 0{,}02\%$.

Se remarcă scăderea erorii maxime de trunchiere, o dată cu creșterea numărului de ranguri, n_{CNA}.

OBSERVAȚIE. Pentru această variantă nu există „eroare de cap de scală", E_{cs}, adică $E_{cs} = 0$, deoarece pentru $u_k^{\text{UC}} = 1$ rezultă în mod exact $u_k^{\text{CNA}} = 2^{n_{\text{CNA}}} - 1$, număr întreg, care nu mai necesită aproximări prin trunchiere. Totodată, panta p_{LIM} a elementului de limitare este unitară.

Dezavantajul variantei constă în necesitatea multiplicării la fiecare moment de eșantionare, t_k.

Varianta a II-a de denormare. Corespunzător variantei a II-a de denormare, partea fracționară este reprezentată pe $l-1$ biți, numărul 1 nu este reprezentabil explicit, iar valoarea maximală — din expresia (2.89) — este fracționară, strict subunitară.

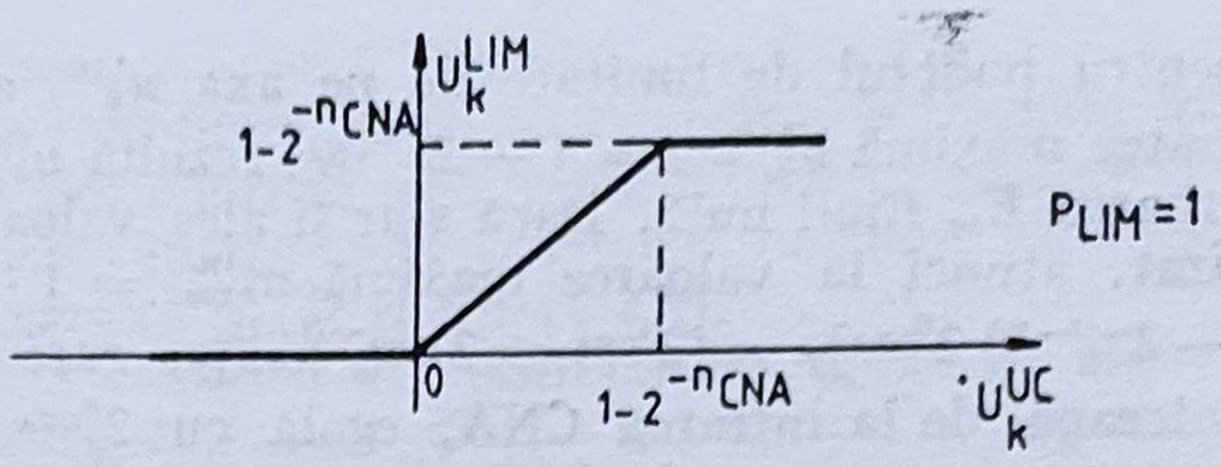


Fig. 2.26

Elementul de limitare are o pantă p_{LIM} unitară, respectiv neunitară, corespunzător situațiilor de mai jos.

- Panta unitară: $p_{\text{LIM}} = 1$.

Caracteristica elementului de limitare este dată în fig. 2.26.

Denormarea comenzii se face prin relația:

$$u_k^{\text{CNA}} = [u_k^{\text{LIM}} 2^{n_{\text{CNA}}}]_T \in [0, 2^{n_{\text{CNA}}} - 1]. \quad (2.97)$$

Prin alegerea limitei $1 - 2^{-n_{\text{CNA}}}$, la cap de scală, $u_{k,\max}^{\text{UC}} = 1 - 2^{-n_{\text{CNA}}}$ și $u_k^{\text{CNA}} = [(1 - 2^{-n_{\text{CNA}}})\, 2^{n_{\text{CNA}}}]_T = 2^{n_{\text{CNA}}} - 1$, valoare întreagă obținută exact; deci, eroarea E_{cs}, definită în observația precedentă, este nulă.

Exemplu. Fie $l = 16$. Pentru $n_{\text{CNA}} = 10$, rezultă valoarea de limitare $1 - 2^{-10} = 0{,}9990235$, iar pentru $n_{\text{CNA}} = 12$ se obține $1 - 2^{-12} = 0{,}9997559$.

Valoarea maximală fracționară reprezentabilă este $1 - 2^{-(l-1)} = 1 - 2^{-15} \simeq$ $\simeq 0{,}9999695$.

Dacă $n_{\text{CNA}} = 10$, toate numerele u_k^{UC} din plaja de valori $u_k^{\text{UC}} \in (0{,}9990235 \ldots$ $\ldots 0{,}9999695)$ sînt limitate la valoarea 0,9990235 sau, în cazul general, $u_k^{\text{UC}} \in (1 -$ $- 2^{n_{\text{CNA}}},\ 1 - 2^{-(l-1)})$.

Cînd $n_{\text{CNA}} = 12$, toate valorile u_k^{UC} din plaja $u_k^{\text{UC}} \in (0{,}9997559 \ldots$ $\ldots 0{,}9999695)$ sînt limitate la valoarea 0,9997559.

Așadar, cu cît numărul de ranguri, n_{CNA}, este mai mare, cu atît porțiunea liniară a caracteristicii din fig. 2.26 este mai mare, cu efecte benefice din punct de vedere sistemic.

- Pantă neunitară: $p_{\text{LIM}} \neq 1$.

Dacă pentru u_k^{UC} se dorește utilizarea întregii plaje de valori reprezentabile, deci $u_k^{\text{UC}} \in [0, 1 - 2^{-(l-1)}]$, $u_k^{\text{LIM}} \in [0, 1 - 2^{-n_{\text{CNA}}}]$, atunci caracteristica elementului de limitare arată ca în fig. 2.27.

În acest caz panta este:

$$p_{\text{LIM}} = \frac{1 - 2^{n_{\text{CNA}}}}{1 - 2^{-(l-1)}} < 1,$$

$$n_{\text{CNA}} < l - 1. \quad (2.98)$$

Comanda se denormează aplicîndu-se relația (2.97); ca urmare, $u_k^{\text{CNA}} = [u_k^{\text{LIM}} 2^{n_{\text{CNA}}}]_T$ și

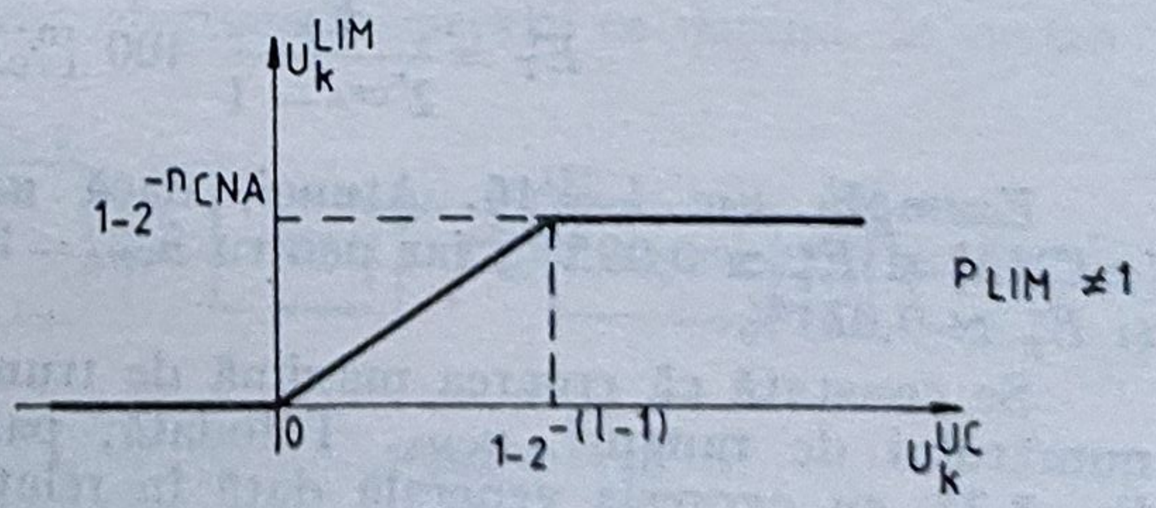


Fig. 2.27

pentru punctul de limitare de pe axa u_k^{LIM}, ales egal cu $1 - 2^{n_{\text{CNA}}}$, la valoarea maximă $u_{k,\,\max}^{\text{LIM}} = 1 - 2^{-n_{\text{CNA}}}$, rezultă $u_k^{\text{CNA}} = 2^{n_{\text{CNA}}} - 1$, valoarea exactă, eroarea E_{cs} fiind nulă. Dacă s-ar fi ales valoarea $1 - 2^{-(l-1)}$, ușor de realizat, atunci la valoarea maximă $u_{k\,\max}^{\text{LIM}} = 1 - 2^{-(l-1)}$ rezultă $u_k^{\text{CNA}} = [(1 - 2^{-(l-1)})\, 2^{n_{\text{CNA}}}]_T = [2^{n_{\text{CNA}}} - 2^{n_{\text{CNA}}-(l-1)}]_T$, care diferă de valoarea maximă, întreagă, de la intrarea CNA, egală cu $2^{n_{\text{CNA}}} - 1$. La extremitatea scalei apare acum eroarea absolută:

$$E_{cs} = (2^{n_{\text{CNA}}} - 1) - (2^{n_{\text{CNA}}} - 2^{n_{\text{CNA}}-(l-1)}) = -1 + 2^{n_{\text{CNA}}-(l-1)}\ [\text{uCNA}] \quad (2.99)$$

și eroarea relativă:

$$E_{cs}^r = \frac{E_{\text{CS}}}{2^{n_{\text{CNA}}} - 1}\, 100\ [\%]. \quad (2.100)$$

Exemplu. Fie $l = 16$ și valoarea de limitare pe axa u_k^{LIM}, egală cu $1 - 2^{-(l-1)}$. Pentru $n_{\text{CNA}} = 10$, rezultă $|E_{cs}| = 0{,}96875$ [u.CNA] și $|E_{cs}^r| \simeq 0{,}095\%$, iar pentru $n_{\text{CNA}} = 12$, se obțin $|E_{cs}| = 0{,}875$ [u.CNA] și $|E_{cs}^r| \simeq 0{,}021\%$.

În ultimele două exemple numerice ($n_{\text{CNA}} = 10$, respectiv 12) se constată că eroarea de cap de scală este aproximativ egală, dar eroarea relativă scade cu creșterea numărului de ranguri. n_{CNA}.

OBSERVAȚIE. În varianta a II-a de denormare se evită multiplicarea prin $(2^{n_{\text{CNA}}} - 1)$, dar se introduce fie o plajă de liniaritate a elementului de limitare, redusă, cu pantă unitară, fie o plajă liniară mai mare, dar cu pantă neunitară. În ambele situații se poate obține eroarea nulă de cap de scală prin alegerea adecvată a valorilor de limitare de pe axa u_k^{LIM} a caracteristicii elementului de limitare.

Eroarea maximă de trunchiere se calculează similar cu modalitatea specifică variantei I de denormare, ținîndu-se seama însă de reprezentarea pe $l - 1$ biți a părții fracționare. Eroarea maximă de trunchiere apare cînd toți biții eliminați, în număr de $l - 1 - n_{\text{CNA}}$, sînt egali cu 1. Similar cu (2.95), rezultă:

$$E_T = 1 - \frac{1}{2^{l-1-n_{\text{CNA}}}}\ [\text{u.CNA}] \quad (2.101)$$

și eroarea maximă relativă:

$$E_T^r = \frac{E_T}{2^{n_{\text{CNA}}} - 1}\ 100\ [\%]. \quad (2.102)$$

Exemplu. Fie $l = 16$. Atunci, dacă $n_{\text{CNA}} = 10$, rezultă $E_T = 0{,}96875$ [*u*.CNA] și $E_T^r \simeq 0{,}095\%$, iar pentru $n_{\text{CNA}} = 12$, se obțin $E_T = 0{,}875$ [*u*.CNA] și $E_T^r \simeq 0{,}021\%$.

Se constată că eroarea maximă de trunchiere scade o dată cu mărirea numărului de ranguri, n_{CNA}. Totodată, panta caracteristicii liniare din fig. 2.27, cu expresia generală dată în relația (2.98), este $p_{\text{LIM}} = 0{,}9990538$, cînd $n_{\text{CNA}} = 10$ și $p_{\text{LIM}} = 0{,}9997862$, dacă $n_{\text{CNA}} = 12$.

Cazul ideal, teoretic însă, este $p_{LIM} = 1$, cînd $n_{CNA} = l - 1$.

OBSERVAȚIE. Pentru evitarea funcționării elementului de limitare în zona de saturație, în [9] se indică proceduri de scalare puțin diferite, care necesită funcționarea sistemului închis în regimuri dinamice indiciale, similare cu cele utilizate în calibrarea dinamică a TR și EE (§ 2.9).

Dacă elementul de limitare a comenzii u_k^{UC} rezultate din aplicarea algoritmului de reglare are alura din fig. 2.17, deci $u_k^{LIM} \in [-1,1]$ sau $(-1,1)$, atunci înaintea operației de denormare din (2.94) sau (2.97) se procedează la transformarea intermediară $u_k^{LIM} \to u_k^{LIM,\,OUT} \in [0,1]$ sau $[0,1)$. În cazul particular, cînd $u_k^{LIM} \in [-1,1]$ și $u_k^{LIM,\,OUT} \in [0,1]$, transformarea este $u_k^{LIM,\,OUT} = 2^{-1} + 2^{-1} \cdot u_k^{LIM}$.

Folosindu-se această transformare intermediară, relațiile (2.94), (2.97) devin $u_k^{CNA} = [u_k^{LIM,\,OUT}(2^{n_{CNA}} - 1)]_T$, respectiv $u_k^{CNA} = [u_k^{LIM,\,OUT} 2^{n_{CNA}}]_T$.

Din punctul de vedere al pantei p_{LIM}, situația rămîne neschimbată. Dacă se apelează la operația de aproximare prin rotunjire, atunci pentru numere $x \geqslant 0$:

$$[x]_R = [x + 0{,}5]_T.$$

2.7.3. **Factori de transfer intrări/ieșiri analogice ai** RD [17]

Se consideră un algoritm de tip P — proporțional, care multiplică eșantionul curent $v_k = v(kT)$ al mărimii de intrare analogice în RD cu valoarea $\lambda > 0$. Fluxul de prelucrări și conversii *(hard/soft)* de la intrarea RD, unde se aplică semnalul v_k, și pînă la ieșirea dispozitivului, unde se obține mărimea analogică $w(kT)$, este ilustrat în fig. 2.28. Valoarea $w(kT)$ rezultă în mod real după t_c, deci $w(kT + t_c)$, dar s-a păstrat notația $w(kT)$. Pentru simplitate se consideră de asemenea că w și v sînt semnale unificate (de tensiune), caracterizîndu-se deci printr-o plajă identică de variație și punct de zero real, și că elementul de limitare lucrează în porțiunea liniară a caracteristicii.

Dacă $v \in [0, V_{max}]$, $w \in [0, W_{max}]$ și $V_{max} = W_{max}$, atunci

$$v_k^{CAN} = \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{V_{max}} v(kT) \text{ [u. CAN]} \tag{2.103}$$

și

$$w(kT) = \frac{W_{max}}{2^{n_{CNA}} - 1} w_k^{CNA} \ [V_{cc}]. \tag{2.104}$$

Blocurile notate în fig. 2.28 prin NORMARE, LIMITARE și DENORMARE, implementate prin *software*, efectuează operații ce depind de varian-

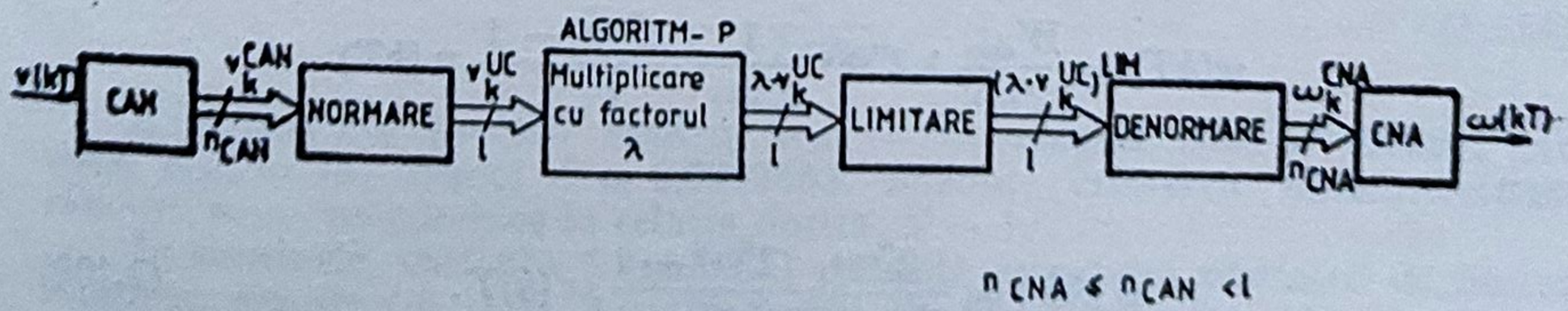


Fig. 2.28

tele de normare și, respectiv, denormare folosite. Se consideră cazul teoretic cînd operația de trunchiere $[\cdot]_T$ este omisă în relația (2.94) sau (2.97).

• *Varianta 1* (include variantele I de reprezentare și normare, respectiv de normare).

Cele trei blocuri efectuează, respectiv, operațiile:

$$v_k^{UC} = \frac{v_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}} - 1},$$

$$(\lambda v_k)^{LIM} = p_{LIM}\,(\lambda v_k)^{UC} = \lambda v_k^{UC}, \tag{2.105}$$

$$w_k^{CNA} = \lambda v_k^{UC}\,(2^{n_{CNA}} - 1) = \lambda\,(2^{n_{CNA}} - 1)\,v_k^{UC},$$

unde, conform relației (2.93), p_{LIM} este unitar (fig. 2.24).

Din expresiile (2.103), (2.104) și (2.105) rezultă:

$$w(kT) = \frac{W_{max}}{2^{n_{CNA}} - 1}\,\lambda\,(2^{n_{CNA}} - 1)\,\frac{1}{2^{n_{CAN}} - 1}\,\frac{2^{n_{CAN}} - 1}{V_{max}}\,v(kT)$$

sau

$$w\,(kT) = \lambda v\,(kT). \tag{2.106}$$

Se definește factorul de transfer intrare/ieșire analogică al RD prin:

$$S \triangleq \frac{w\,(kT)}{v\,(kT)}\bigg|_{\lambda=1}. \tag{2.107}$$

Se constată că, pentru această variantă, $S = 1$.

• *Varianta 2* (include variantele II de reprezentare și normare, respectiv denormare).

— Cele trei blocuri efectuează respectiv operațiile:

$$v_k^{UC} = \frac{v_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}}},$$

$$(\lambda v_k)^{LIM} = p_{LIM}\,(\lambda v_k)^{UC} = \lambda\, v_k^{UC}, \tag{2.108}$$

$$w_k^{CNA} = \lambda v_k^{UC}\,2^{n_{CNA}} = \lambda\,2^{n_{CNA}}\,v_k^{UC},$$

unde, după cum se observă din fig. 2.26, p_{LIM} este unitar.

Din expresiile (2.103), (2.104) și (2.108) rezultă:

$$w(kT) = \frac{W_{max}}{2^{n_{CNA}}}\,\lambda\,2^{n_{CNA}}\,\frac{1}{2^{n_{CNA}}}\,\frac{2^{n_{CAN}} - 1}{V_{max}}\,v\,(kT)$$

sau

$$w\,(kT) = \frac{2^{n_{CNA}}}{2^{n_{CNA}} - 1}\,\frac{2^{n_{CAN}} - 1}{2^{n_{CAN}}}\,\lambda v\,(k)\,T. \tag{2.109}$$

Factorul de transfer al RD, S, definit în relația (2.107) este:

$$S = \frac{2^{n_{CNA}}}{2^{n_{CNA}} - 1} \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{2^{n_{CAN}}}. \tag{2.110}$$

Exemplu. Pentru $n_{CAN} = n_{CNA}$ rezultă $S = 1$ (situație dorită), iar dacă $n_{CAN} = 12$ și $n_{CNA} = 10$, atunci $S = 0{,}9997558 \neq 1$.

Rezultatul este totuși teoretic, întrucît ordinea reală în care sînt efectuate operațiile din relația (2.109) și trunchierea este diferită de cea din (2.110).

— Cele trei blocuri efectuează respectiv operațiile:

$$v_k^{UC} = \frac{v_k^{CAN}}{2^{n_{CAN}}},$$

$$(\lambda v_k)^{LIM} = p_{LIM}\, \lambda v_k^{UC}, \tag{2.111}$$

$$w_k^{CNA} = \lambda\, 2^{n_{CNA}}\, p_{LIM} v_k^{UC},$$

unde $p_{LIM} \neq 1$ este dat în relația (2.98).

Din expresiile (2.103), (2.104) și (2.111) rezultă

$$w(kT) = \frac{W_{max}}{2^{n_{CNA}} - 1} 2^{n_{CNA}}\, p_{LIM}\, \lambda\, \frac{1}{2^{n_{CAN}}} \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{V_{max}}\, v(kT)$$

sau

$$w(kT) = \frac{2^{n_{CNA}}}{2^{n_{CNA}} - 1} \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{2^{n_{CAN}}}\, p_{LIM}\, \lambda. \tag{2.112}$$

Factorul de transfer S este acum

$$S = \frac{2^{n_{CNA}}}{2^{n_{CNA}} - 1} \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{2^{n_{CAN}}}\, p_{LIM}$$

sau, cu p_{LIM} din (2.98),

$$S = \frac{2^{n_{CNA}}}{2^{n_{CNA}} - 1} \frac{2^{n_{CAN}} - 1}{2^{n_{CAN}}} \frac{1 - 2^{-n_{CNA}}}{1 - 2^{-(l-1)}} \tag{2.113}$$

Chiar în situația uzuală $n = n_{CAN} = n_{CNA} < l - 1$,

$$S = \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-(l-1)}} < 1. \tag{2.114}$$

Exemplu. Fie $l = 16$. Pentru $n_{CNA} = 10$, rezultă $S = 0{,}9997863$, iar dacă $n_{CNA} = 12$, atunci $S \cong 0{,}9997863$. Așadar, creșterea numărului de ranguri, n_{CNA}, nu conduce la relația dorită, $S = 1$.

În concluzie, varianta 1 (globală) prezintă avantajul utilizării de limite min/max simple (± 1) și a unui factor de transfer unitar. Dezavantajul

variantei constă în necesitatea divizării și multiplicării succesive cu numărul $(2^{n_{CNA}} - 1)$, mărindu-se timpul necesar pentru calculul comenzii de reglare finale; în consecință, ea este recomandată în aplicațiile cu perioadă T de eșantionare nu prea mică.

Varianta 2 are avantajul eliminării operațiilor de multiplicare/divizare amintite, dar introduce un factor de transfer al RD, $S \neq 1$. Această variantă se recomandă în aplicațiile de viteză (T — mică).

În caz real, prin luarea în considerare a operației de trunchiere $[\cdot]_r$, în ambele situații $S \neq 1$.

2.8. CALIBRAREA ÎN REGIM STAȚIONAR A EE ȘI TR ÎN SISTEMELE UNIFICATE DE REGLARE

În cadrul schemei-bloc tipice de sistem automat, se consideră numai partea exogenă RD, conform fig. 2.29. Aceasta, cuprinsă între $U_f(f)s$ și $Y_f(s)$, denumită partea fixată continuă (fig. 2.10), are funcția de transfer continuă:

$$H_f'(s) \triangleq K_{EE} H_p(s) K_{TR}. \tag{2.115}$$

Se neglijează constantele de timp ale EE și TR, reținînd doar factorii de transfer staționari, notați cu K_{EE} și K_{TR}. În cazul unor constante de timp neneglijabile ale EE sau TR, ele sînt incluse (în faza de proiectare) în modelul dinamic $H_p(s)$ din fig. 2.29. Factorul de amplificare staționar al modelului $H_p(s)$ se consideră:

$$K_p \triangleq H_p(0) < \infty \tag{2.116}$$

(cazul cel mai uzual al proceselor fără poli în $s = 0$).

Dacă u_f și y_f (fig. 2.29) sînt semnale unificate de reglare, deci cu plajă de variație staționară identică, atunci caracteristica statică a părții fixate de la u_f la y_f este liniară, avînd aspectul exemplificat pe semnalul de curent

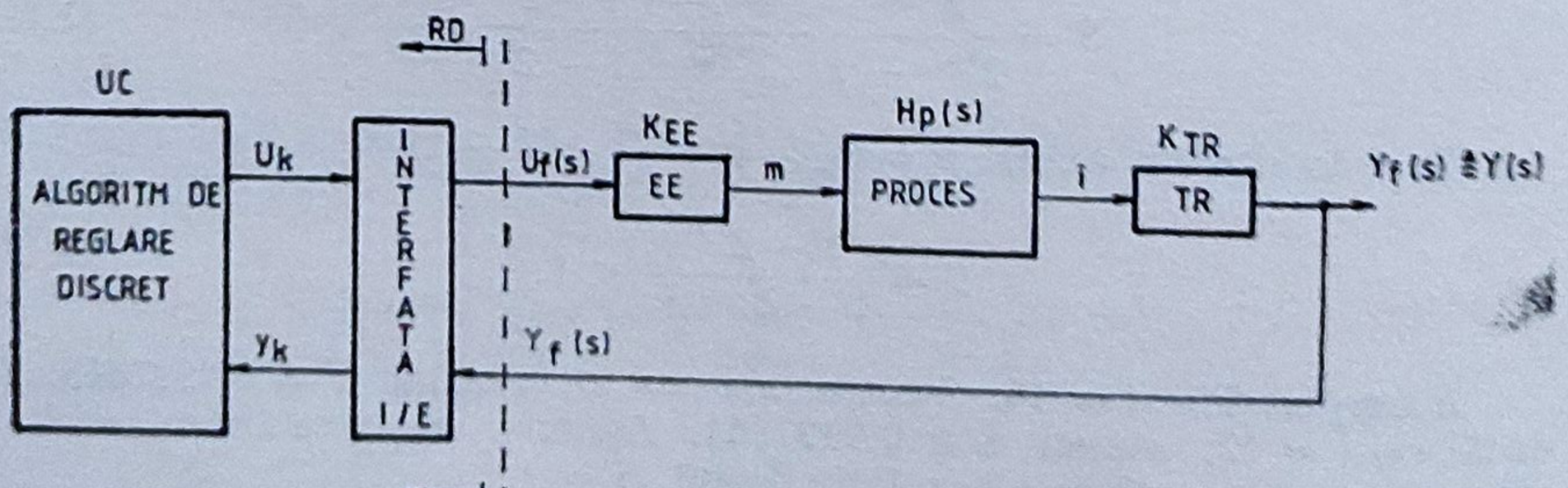
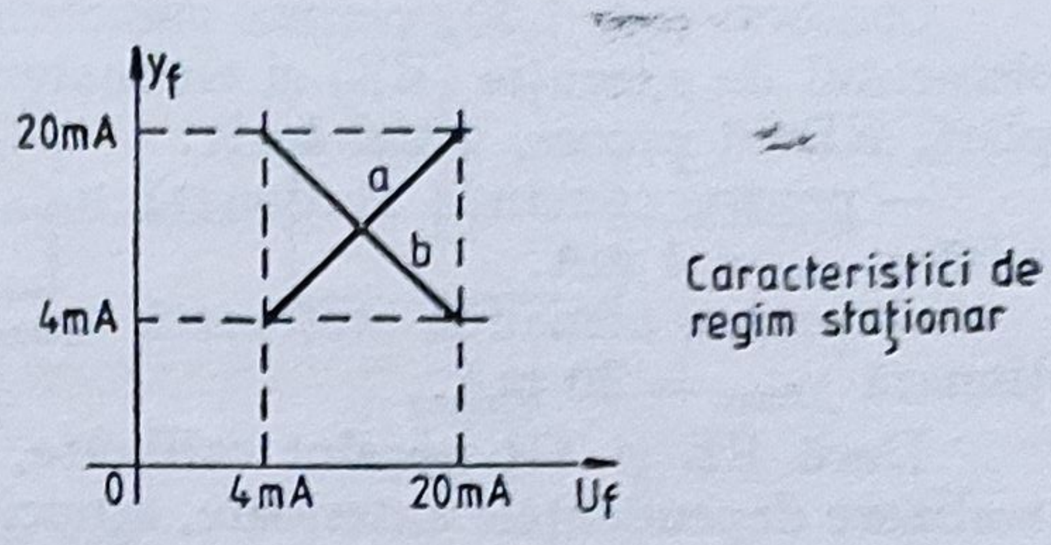


Fig. 2.29

4 mA ... 20 mA din fig. 2.30, în care *a* este caracteristica directă, cu panta $\frac{\Delta y_f}{\Delta u_f} = +1$, iar *b* — caracteristica inversă, cu panta $\frac{\Delta y_f}{\Delta u_f} = -1$.



Caracteristici de regim staţionar

Fig. 2.30

Se notează:

$$K_f \triangleq K_{EE} K_P K_{TR}; \qquad (2.117)$$

deci,

$K_f = +1$, pentru caracteristica directă;
$K_f = -1$, pentru caracteristica inversă.

În ieşirea de reglare, *U*, toate RD posedă comutatoare de inversare a sensului de variaţie a comenzii (pentru a păstra reacţia automată, rigidă, negativă în cazul cînd fie EE, fie TR are caracteristică inversă).

Din $K_f = +1$ sau $K_f = -1$ se consideră doar relaţia:

$$K_f = +1 \triangleq \frac{y_f^{\text{staţionar}}}{u_f^{\text{staţionar}}}. \qquad (2.118)$$

Dacă mărimile sistemice ale buclei sînt normate, deci cu $|y_k^{UC}| \leqslant 1$ şi $|u_k^{UC}| \leqslant 1$, atunci pentru regimul staţionar factorul de transfer static al părţii fixate, utilizat în algoritmul de reglare (care prelucrează mărimile normate), este:

$$K_f^{UC} = \frac{y_{\text{staţionar}}^{UC}}{u_{\text{staţionar}}^{UC}} = +1. \qquad (2.119)$$

Aşadar, pentru semnale unificate şi în cazul reprezentării interne normate, fracţionare, a mărimilor sistemice de i/e, există relaţiile (2.118) şi (2.119).

Condiţia (2.118) este esenţialmente tipică sistemelor de reglare cu semnale unificate, în care plaja staţionară de variaţie a comenzii u_f şi a măsurii y_f este identică, fie în semnale de tensiune ($0 \div 5$ V; $0 \div 10$ V; $1 \div 10$ V), fie în semnale de curent ($4 \div 20$ mA, $2 \div 10$ mA; $0 \div 20$ mA ş.a.).

Condiţia (2.118) reflectă două aspecte majore:

— pentru plaja maximă de semnal unificat caracteristica statică de transfer este liniară, permiţînd utilizarea de algoritmi de reglare liniari;

— plaja maximă de variaţie este folosită în întregime de semnalele u_f şi y_f.

În continuare, se consideră cel mai utilizat semnal unificat, cel de curent, în plaja $4 \div 20$ mA.

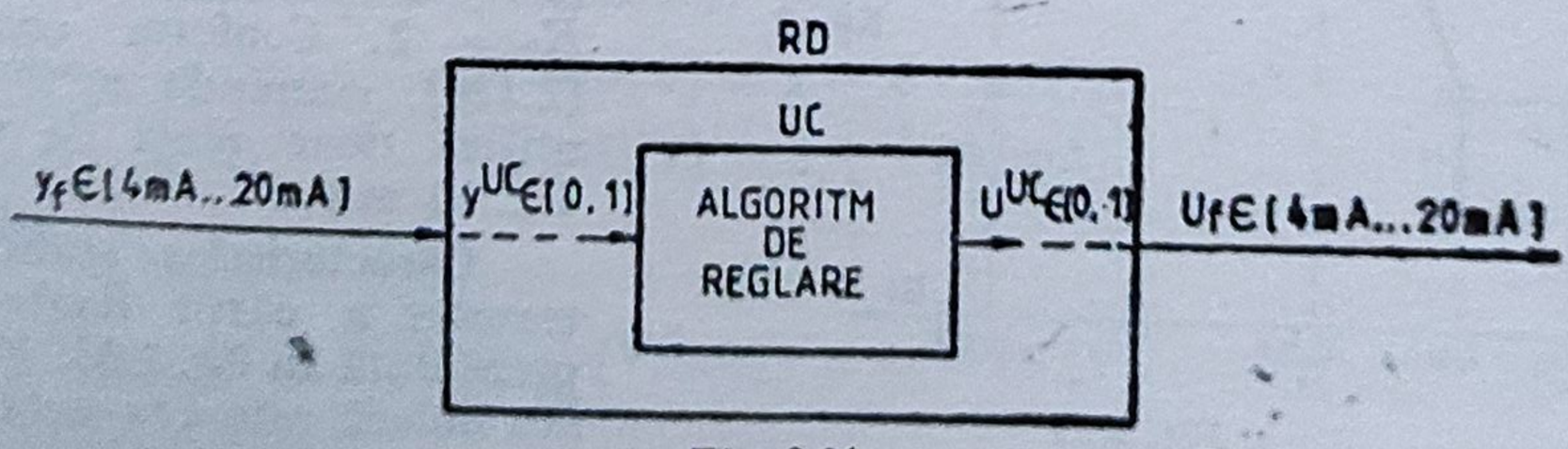


Fig. 2.31

Conform fig. 2.30, pentru caracteristica directă și cu condiția (2.118), elementul de execuție (EE) și traductorul (TR) trebuie calibrate apriori cuplării RD în proces, astfel încît:

— pentru comanda staționară $u_{f\min} = 4$ mA, să rezulte măsura staționară $y_{f\min} = 4$ mA.

— pentru comanda staționară $u_{f\max} = 20$ mA, să rezulte măsura staționară $y_{f\max} = 20$ mA.

Dacă EE și TR nu sînt calibrate, astfel încît în regim staționar să se realizeze dependențele anterioare, atunci în funcționare reală, în buclă închisă K_f, caracteristica statică de transfer a părții fixate continue devine și ea puternic neliniară, determinînd uneori imposibilitatea reglării procesului. Se ilustrează această situație prin exemplele următoare, în cazul uzual al semnalului de curent amintit anterior.

• Se consideră $K_f = 2 \neq 1$; deci,

$$y_f^{\text{staționar}} = 2\, u_f^{\text{staționar}} \tag{2.120}$$

Cazul 1. Se presupune că mărimea $u_f^{\text{staționar}}$ utilizează toată plaja de semnal unificat (4 ÷ 20 mA). Atunci $y_f^{\text{staționar}}$ va folosi doar plaja (8 ÷ ÷ 20 mA). Caracteristica statică de transfer a părții fixate este dată în fig. 2.32.

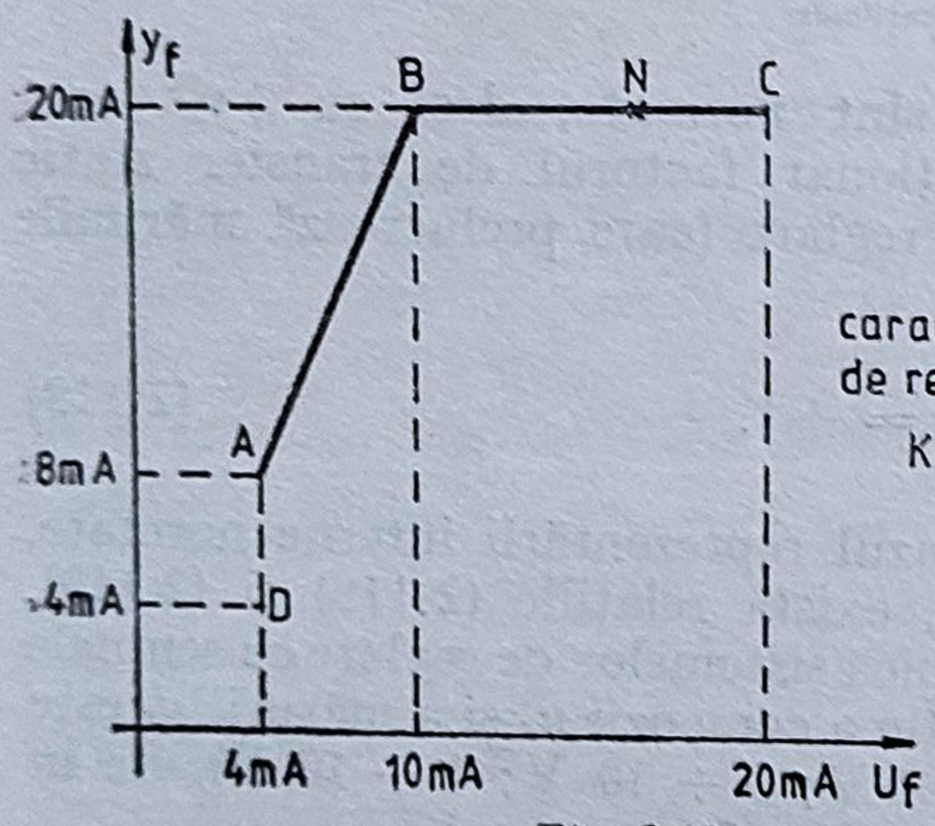


Fig. 2.32

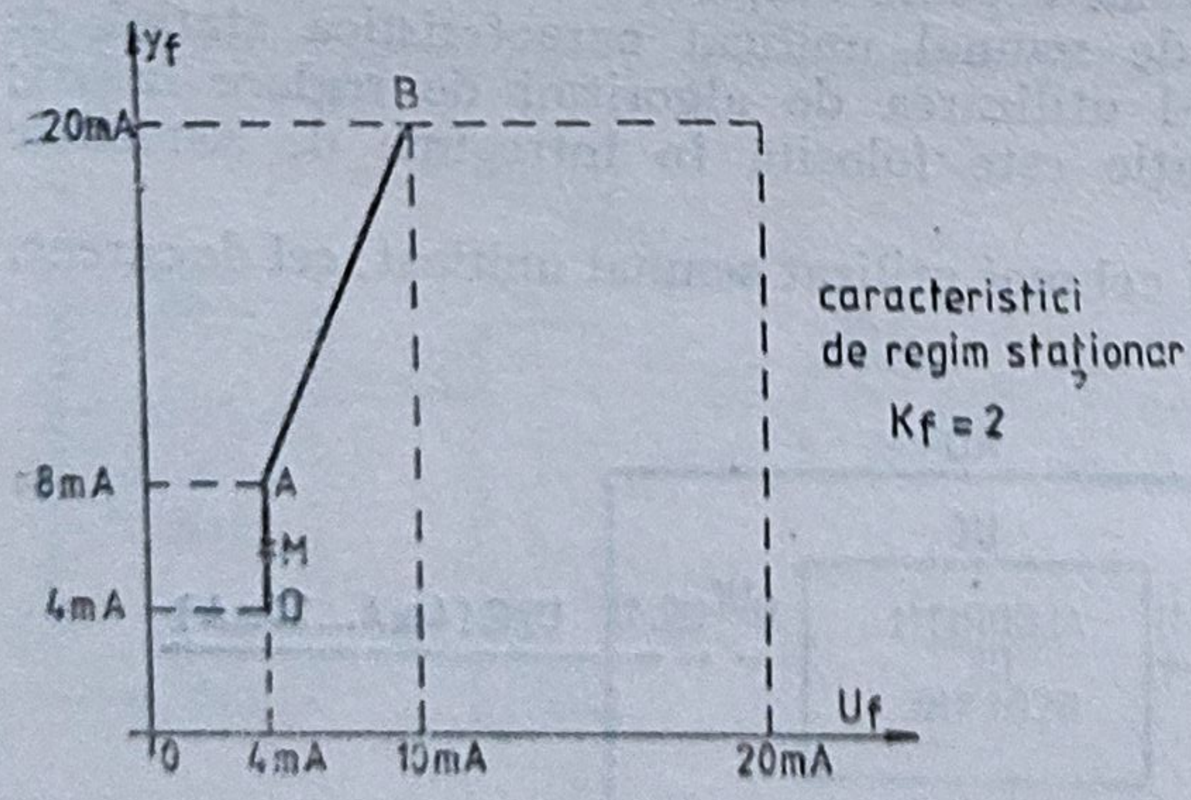


Fig. 2.33

Datorită condiției (2.120), dependența statică liniară este posibilă doar pe porțiunea AB a caracteristicii din fig. 2.32.

Pentru o comandă $u_f^{\text{staționar}} \in$ $\in$[10 mA; 20 mA], traductorul mărimii (reglate) măsurate y_f se saturează la valoarea maximală. Deci, singura porțiune liniară este AB, cînd $u_f^{\text{staționar}} \in$ $\in$[4 mA; 10 mA] și $y_f^{\text{staționar}} \in$ $\in$[8 mA; 20 mA]. Cauza constă în aceea că traductorul mărimii reglate, TR, nu este calibrat corect.

Cazul 2. Se presupune că măsura y_f utilizează în întregime plaja de semnal unificat; deci, $y_f^{\text{staționar}} \in$ [4 mA; 20 mA] și K_f are valoarea din (2.120), $K_f = 2$. Conform condiției (2.120), comanda $u_f^{\text{staționar}}$ va utiliza doar plaja de valori 4 ... 10 mA.

Caracteristica statică de transfer a părții fixate este prezentată în fig. 2.33. Porțiunea liniară este cea notată cu

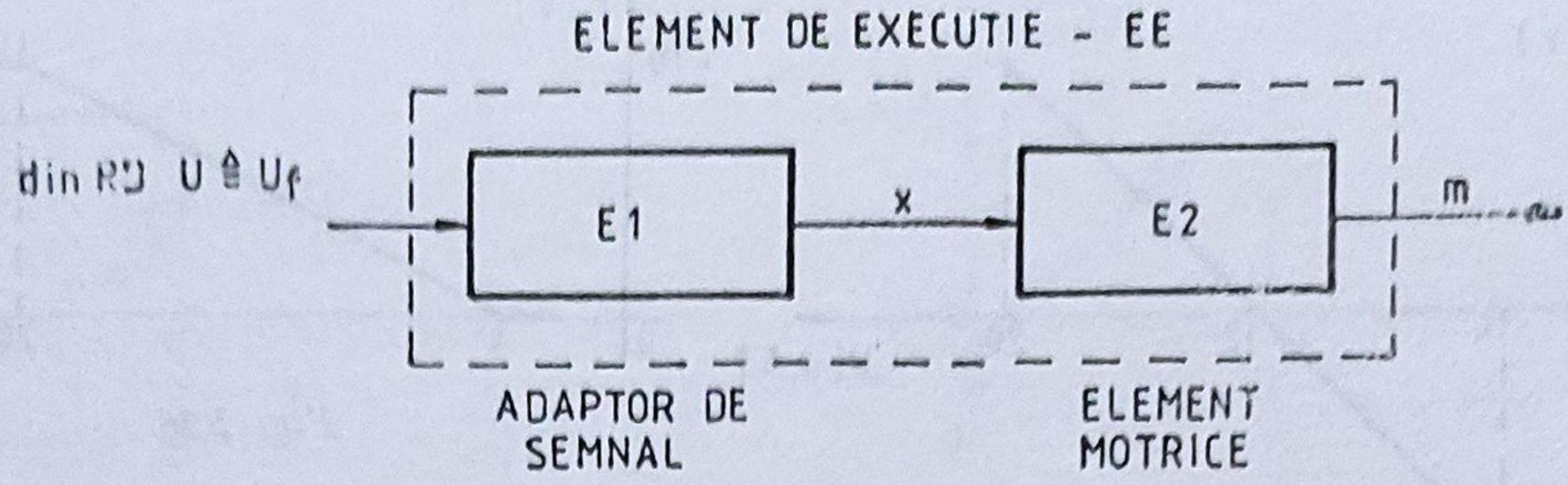


Fig. 2.34

AB. Cînd măsura $y_f^{\text{staţionar}} = 20$ mA, $u_f^{\text{staţionar}} = 10$ mA; deci, comanda nu utilizează valorile din plaja [10 mA; 20 mA]. Cauza se referă la faptul că elementul de execuţie nu este corect calibrat.

• Se proiectează un algoritm de reglare liniar, care să menţină în regim automat mărimea reglată y_f în jurul punctului nominal de funcţionare, N (fig. 2.32), unde $N \in BC$. Oriunde va fi ales punctul N, conform situaţiei din cazul 1, traductorul fiind saturat, în regim static procesul este necontrolabil prin mărimea u_f; ca urmare, situaţia este aceeaşi şi în regim dinamic, astfel încît reglarea devine imposibilă (pe porţiunea BC dn fig. 2.32, $K_f = 0$).

• Se proiectează un algoritm de reglare liniar, care — în regim automat — să menţină mărimea reglată în punctul $M \in DA$ (fig. 2.33). Oriunde se alege $M \in DA$ — deci $y_f^{\text{staţionar}} \in [4\text{ mA}, 8\text{ mA}]$ — mărimea y_f este insensibilă la comandă; pe această porţiune $K_f = \infty$, deci y_f nu poate fi reglată în puncte cuprinse în plaja de valori precizată. (A nu se confunda $K_f = \infty$ cu $\lim\limits_{s \to 0} H_p(s) = \infty$, situaţie care apare dinamic prin prezenţa unui pol în origine; starea $K_f = \infty$ este prezentă aici în *absenţa* unui pol în origine.)

Calibrarea EE. Configuraţia EE, format din două module, este prezentată în fig. 2.34.

În cazul general, semnalul unificat de la ieşirea RD, $u \triangleq u_f$, variază în plaja $u \in [u_m, u_M]$, iar semnalul intermediar, x, în plaja $x \in [x_1, x_2]$.

Fie situaţia uzuală $u_m = 4$mA şi $u_M = 20$ mA. Din punctul de vedere al elementului E_1, sînt posibile două cazuri.

Cazul 1. Adaptorul E_1 are caracteristică simetrică, deci,

$$\text{sign}\, x_1 x_2 = -1 \text{ şi } |x_1| = |x_2|. \tag{2.121}$$

Fie, de exemplu, semnalele de tensiune $x_1 = -10$ V şi $x_2 = +10$ V. Dependenţa între mărimile x şi u este dată de relaţia:

$$x = a + bu, \tag{2.122}$$

unde coeficienţii a şi b se determină prin:

$$\begin{aligned} -10\,[\text{V}] &= a + b\,4\,[\text{mA}]; \\ +10\,[\text{V}] &= a + b\,20\,[\text{mA}]. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Rezultă:

$$b = \frac{20}{16}\,[\text{V/mA}], \quad a = -15\ [\text{V}]. \tag{2.124}$$

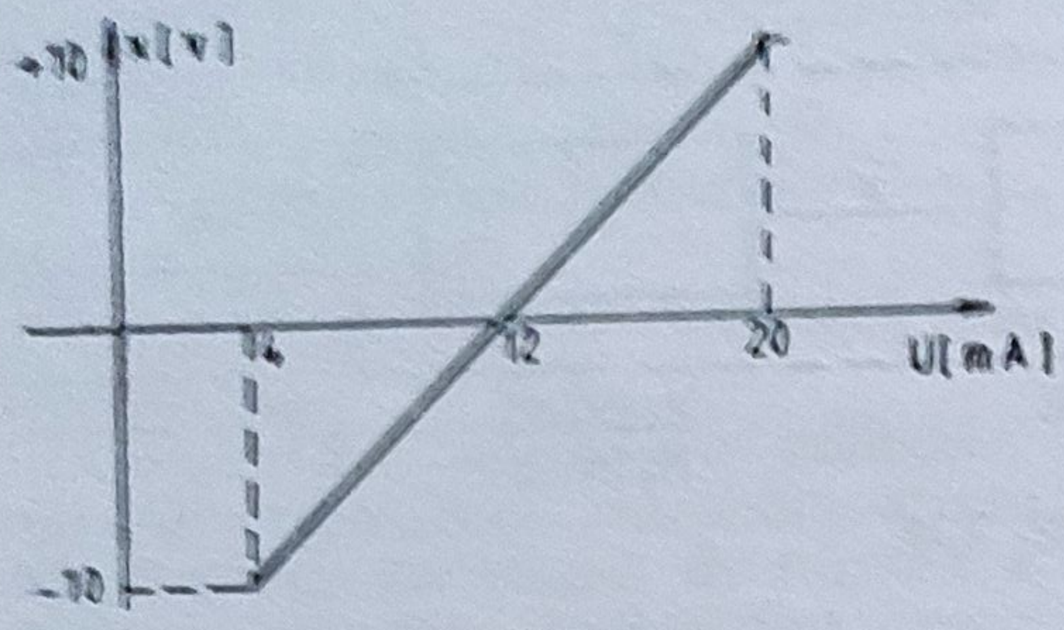


Fig. 2.35

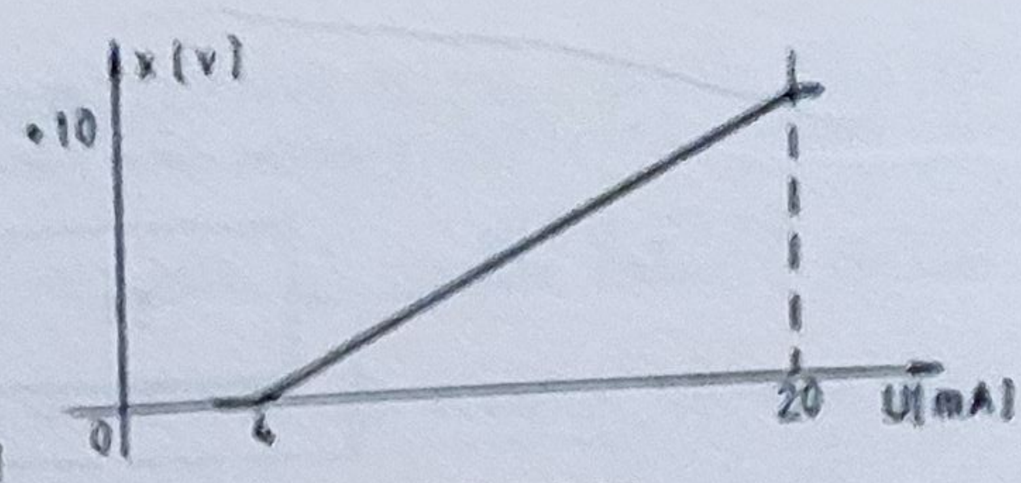


Fig. 2.36

Ecuația de transfer staționară a adaptorului E_1 este:

$$x = -15\,[\mathrm{V}] + \frac{20}{16}\,[\mathrm{V/mA}]\,u\,[\mathrm{mA}] = -15 + 1{,}25\,u\,[\mathrm{V}] \qquad (2.125)$$

cu reprezentarea grafică dată în fig. 2.35.

Astfel de caracteristici ale adaptorului sînt necesare atunci cînd mărimea x are două sensuri de variație și poziție de repaus.

Cazul 2. Adaptorul E_1 are caracteristică nesimetrică; deci,

$$\operatorname{sign} x_1 x_2 = +1 \text{ și } 0 \leqslant x_1 < x_2. \qquad (2.126)$$

Dependența $x = x(u)$ are aspectul din (2.122); dacă, de pildă, $x \in [0\ \mathrm{V};\ 10\ \mathrm{V}]$ rezultă coeficienții:

$$\begin{aligned} 0\,[\mathrm{V}] &= a + b\,4\,[\mathrm{mA}]; \\ 10\,[\mathrm{V}] &= a + b\,20\,[\mathrm{mA}]; \end{aligned} \qquad (2.127)$$

$$b = \frac{10}{16}\,[\mathrm{V/mA}];\quad a = -\frac{5}{2}\,[\mathrm{V}].$$

Așadar, adaptorul E_1 trebuie calibrat conform relației:

$$x = -2{,}5 + 0{,}625\,u\,[\mathrm{V}], \qquad (2.128)$$

reprezentată grafic în fig. 2.36.

Asemenea caracteristici sînt tipice atunci cînd

$$m \in [m_m,\ m_M] \text{ și } \operatorname{sign} m_m m_M = +1.$$

Calibrarea TR. Traductoarele de proces sînt formate din două module funcționale (fig. 2.37). Semnalul de ieșire al TR este $y \triangleq y_f$, unificat în plaja $y \in [y_m,\ y_M]$. Mărimea $i \in [i_m,\ i_M]$ este semnalul din proces, iar $x \in [x_1,\ x_2]$, de regulă electric, este furnizat de elementul sensibil.

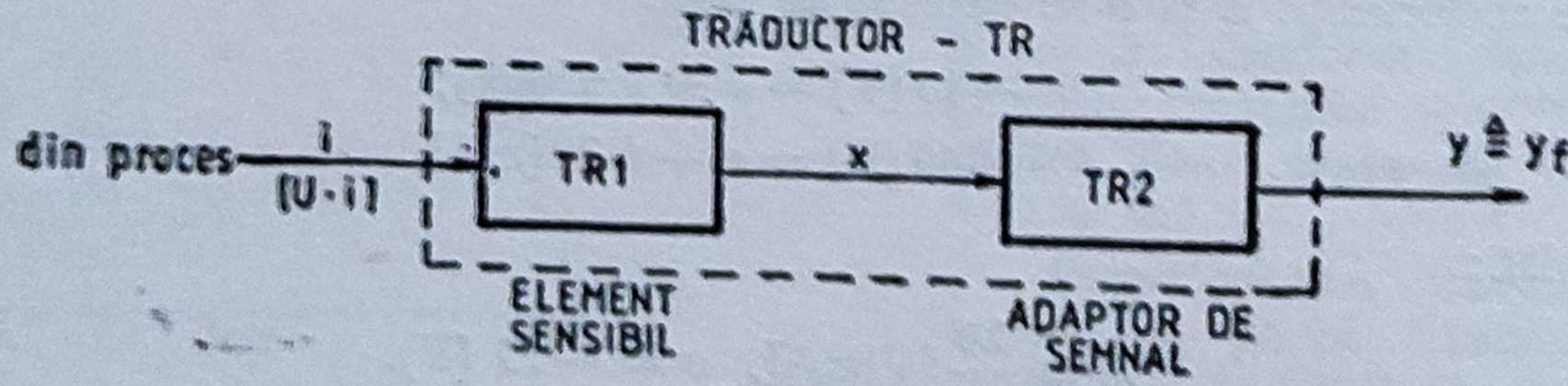


Fig. 2.37

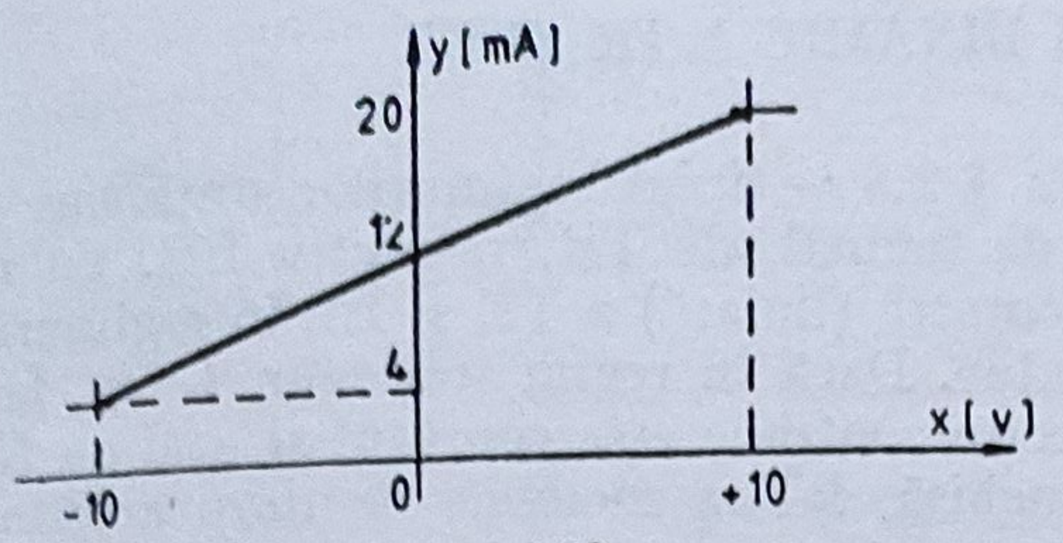


Fig. 2.38

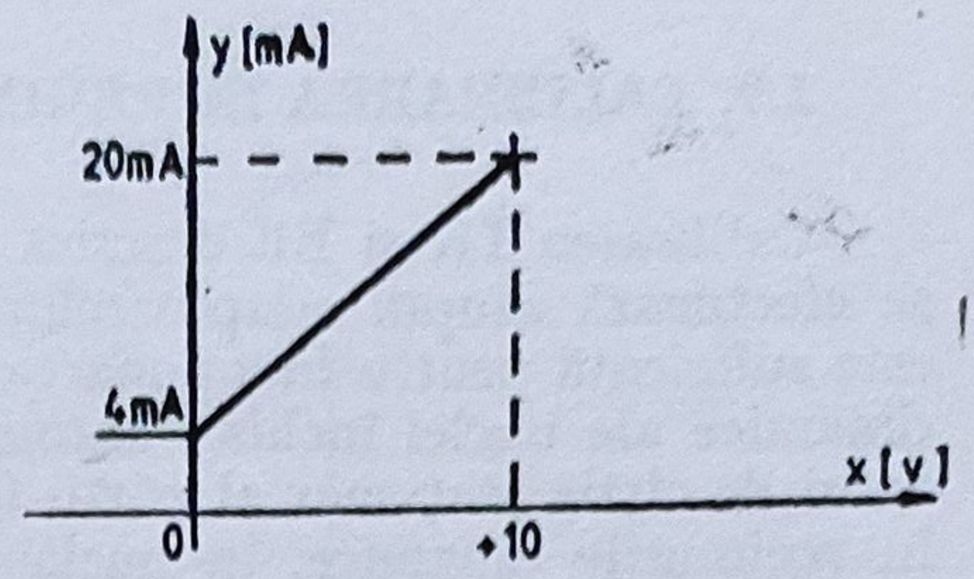


Fig. 2.39

În funcție de condițiile de tipul (2.121) și (2.126) sînt posibile două cazuri:

Cazul 1. Elementul sensibil furnizează semnalul x în plajă simetrică (nu este obligatorie simetria), cu sign $x_1 x_2 = -1$. Fie $x \in [-10\ \text{V};\ +10\ \text{V}]$ și $y \in [4\ \text{mA};\ 20\ \text{mA}]$.

Dependența $y = y(x)$ se exprimă prin:

$$y = c + dx. \tag{2.129}$$

Din condițiile:

$$\begin{aligned} 4\,[\text{mA}] &= c + d\,(-10)\,[\text{V}], \\ 20\,[\text{mA}] &= c + d\,(+10)\,[\text{V}], \end{aligned} \tag{2.130}$$

rezultă coeficienții:

$$d = \frac{16}{20}\,[\text{mA/V}] \text{ și } c = 12\,[\text{mA}]. \tag{2.131}$$

Ecuația de transfer a adaptorului este:

$$y = 12 + 0{,}8\,x\ [\text{mA}], \tag{2.132}$$

fiind ilustrată în fig. 2.38.

Cazul 2. Elementul sensibil generează semnalul x în plaja $x \in [x_1, x_2]$, cu sign $x_1 x_2 = +1$. Fie $x_1 = 0$ V, $x_2 = +10$ V și ecuația de transfer din (2.129). Pentru $y_m = 4$ mA și $y_M = 20$ mA, rezultă coeficienții $c = 4$ mA, $d = 1{,}6$ mA/v și ecuația de transfer:

$$y = 4 + 1{,}6\,x\,[\text{mA}], \tag{2.133}$$

reprezentată grafic în fig. 2.39.

OBSERVAȚIE. În adaptoarele de semnal, atît ale EE cît și ale TR, expresiile (2.122) și (2.129) se implementează analogic, folosindu-se de regulă amplificatoare operaționale.

Valorile alese pentru mărimea de ieșire a adaptoarelor de semnal, x, (figurile 2.34 și 2.37), de 0, ± 10 V, au fost arbitrar alese, ele depinzînd de fiecare tip de adaptor utilizat.

2.9. CALIBRAREA ÎN REGIM DINAMIC A TR ȘI EE

Calibrarea TR și EE descrisă în § 2.8 — tipică regimurilor staționare — se efectuează asupra adaptoarelor de semnal ale TR, respectiv EE. Ea nu este suficientă pentru funcționarea corectă (liniară) a TR și EE în regimurile dinamice ale buclei închise, automate . Dacă în regim staționar, $t \to \infty$, factorul de cîștig staționar al părții fixate continue este constant și egal cu K_f, în regimurile dinamice, în buclă închisă, la un moment de timp arbitrar, $t < \infty$, raportul $\frac{y(t)}{u(t)} \triangleq K_t$ este diferit de K_f. Acest fapt poate determina saturarea minim/maxim a TR sau (și) EE, care, introducînd caracteristici de transfer neliniare, deteriorează profund calitatea reglării sau provoacă cicluri-limită. Pentru evitarea acestor fenomene neliniare, calibrarea dinamică a TR și EE constă în alegerea corectă a plajei de valori a mărimii reglate procesuale, i (fig. 2.37), respectiv a plajei de valori extimale corespunzătoare mărimii de acționare m (fig. 2.34).

De regulă, calibrarea dinamică a TR și EE se efectuează experimental în buclă închisă și uneori printr-o procedură iterativă [9], depinzînd exclusiv de aplicația particulară în care este utilizat RD. Operațiunile de calibrare experimentală se efectuează după sinteza algoritmului de reglare, prin „închiderea" „buclei automate în proces. Această calibrare necesită următoarele etape:

- Din condițiile impuse de tehnologia procesului industrial, se determină plaja de valori extremală a mărimii de referință fizice (procesuale), $r \in [r_m, r_M]$ (în UI);
- Se determină plaja extremală de variație controlată prin comenzi a mărimii reglate fizice, $i \in [i_m, i_M]$, valoare care apoi este convertită, scalată și utilizată în algoritmul de reglare sub aspectul fracționar $y^{UC} \in [0, 1]$ — plaja normată, echivalentă (biunivoc) cu plaja de intrare în RD (de exemplu, 4 ... 20 mA).

Plaja $[r_m, r_M]$ este inclusă întotdeauna în domeniul $[i_m, i_M]$, dar valorile i_m și i_M nu se cunosc inițial cu exactitate, întrucît „gradul de saturație" al TR nu este cunoscut. Situația este similară și pentru mărimea de acționare $m \in [m_m, m_M]$ de la ieșirea EE, pentru care, în UC-RD, $u^{UC} \in [0, 1]$.

Cînd variația este de tip treaptă, de la i_m la $r_m > i_m$, în buclă închisă, reală, se generează un regim tranzitoriu (indicial). În mod similar, pentru treapta maximală $r_M - i_m$, în buclă închisă, se declanșează un răspuns indicial.

În ipoteza stabilității buclei închise, aceste răspunsuri indiciale sînt oscilatoriu amortizate (fig. 2.40). Cu notațiile din această figură, traductorul este corect calibrat (nesaturat) dacă, simultan, sînt adevărate relațiile:

$$r_m - \sigma_2 \geqslant i_m \text{ și } r_M + \sigma_1 \leqslant i_M. \tag{2.134}$$

Cînd relația (2.134) este îndeplinită, $(\forall)\ r \in [r_m, r_M]$, iar TR rămîne nesaturat în orice regim dinamic oscilant de tipul răspunsului indicial, considerat cel mai „violent" din punct de vedere dinamic. Ca urmare, și oscilațiile comenzii $u^{UC} \in [0,1]$ conduc la valori ale mărimii de acționare, $m \in [m_m, m_M]$. În UC-RD, valorilor m_m, m_M le corespund biunivoc 4 mA și 20 mA, respectiv 0 și 1.

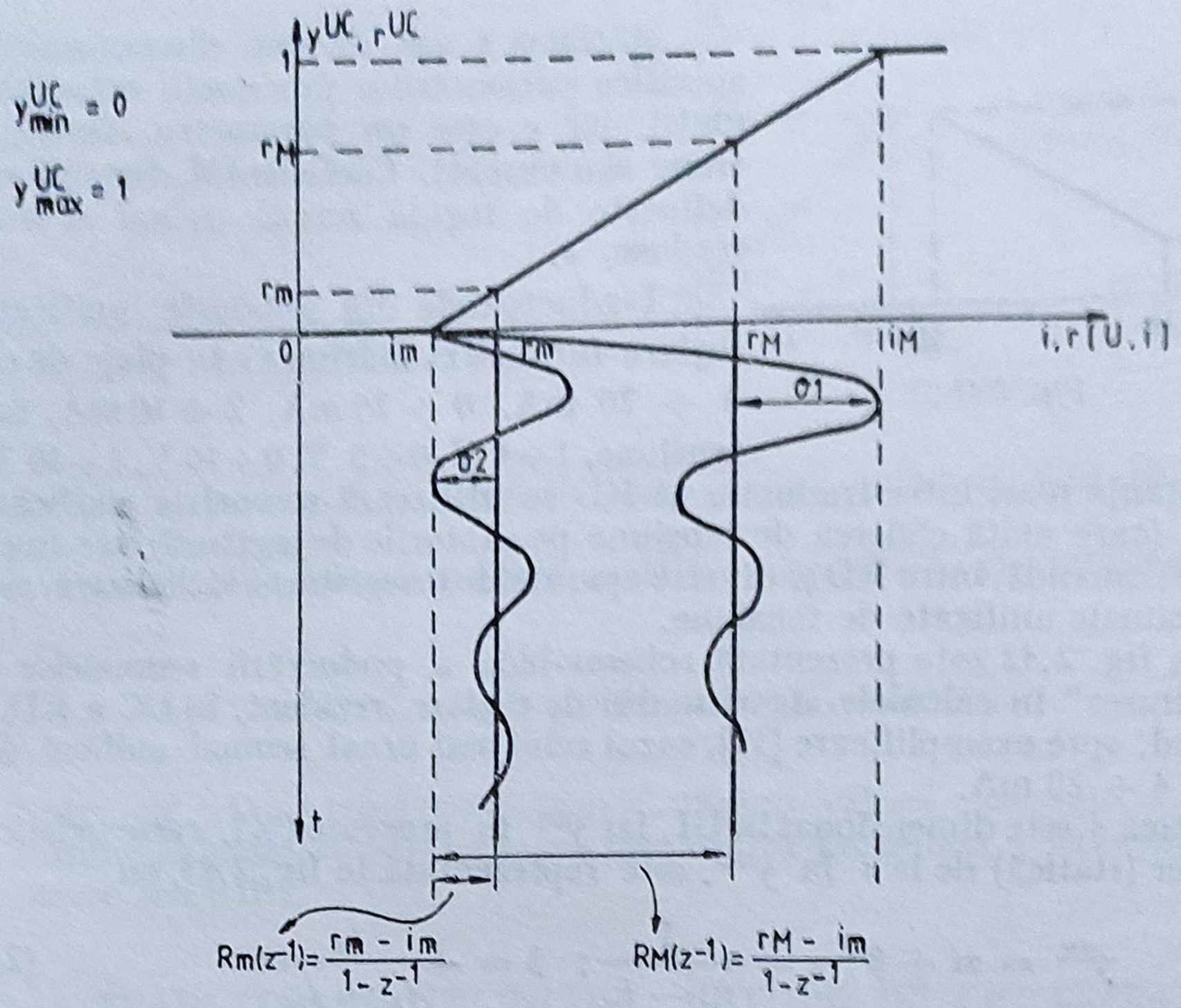


Fig. 2.40

Dacă una din inegalitățile (2.134) nu este satisfăcută (se constată saturarea TR pe lungi perioade de timp relativ la scala de timp real a buclei), atunci valorile i_m, i_M trebuie reconsiderate în mod corespunzător. Situația este similară și din punctul de vedere al mărimii de acționare m.

Se reține ca o observație faptul că plaja admisibilă a referinței normate $r^{UC} \in [r^{UC}_m, r^{UC}_M] \subset (0,1)$; în consecință, nu orice mărime de referință normată (cazul referinței interne a RD) este admisă din punctul de vedere al nesaturării TR și EE, deși RD dispun pe consola de date de intrare de domenii egale pentru referința normată și mărimea reglată, r^{UC}, $y^{UC} \in [0,1]$.

Prin calibrarea dinamică corectă a TR și EE se evită apariția regimurilor autooscilante (cicluri limită) datorate caracteristicii la saturație a TR și EE, menținînd sistemul închis, liniar, atît în regimurile dinamice extreme, cît și în cele staționare.

2.10. AFIȘAREA VALORILOR MĂRIMII REGLATE (MĂSURATE) PROVENIND DIN TRADUCTOARELE LINIARE

Traductoarele liniare au o caracteristică de forma:

$$e = Ai + B, \tag{2.135}$$

unde i/e este intrarea/ieșirea traductorului. Graficul corespunzător relației (2.135) este ilustrat în fig. 2.41.

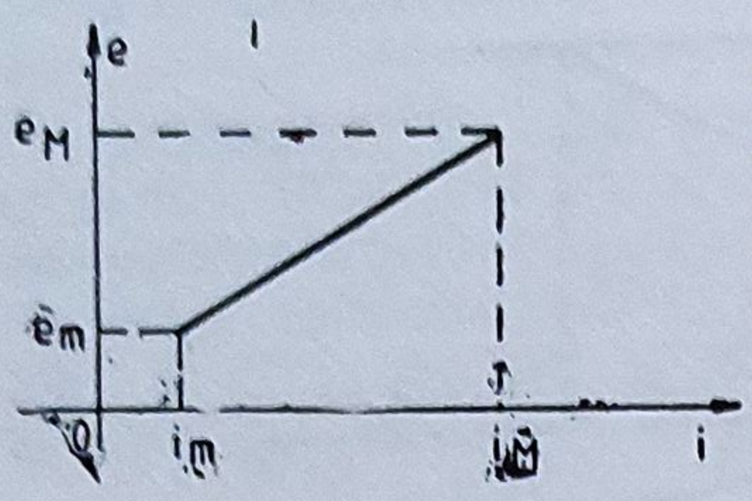


Fig. 2.41

Mărimea i are diverse dimensiuni fizice, specifice parametrilor procesuali măsurați (reglați), iar e este un parametru electric (tensiune sau curent). Coeficientul dimensional B definește de regulă zeroul virtual al mărimii traduse, e.

Traductoarele din sistemele unificate de reglare furnizează mărimea e în plaje de curent $4 \div 20$ mA, $0 \div 20$ mA, $2 \div 10$ mA, sau de tensiune, $1 \div 4$ V, $0 \div 5$ V, $0 \div 10$ V, $1 \div 10$ V ș.a. La distanțe mari între traductor și RD se utilizează semnalele unificate de curent (care evită căderea de tensiune pe cablurile de legătură), iar în camerele de comandă, între RD și diverse aparate de înregistrare/vizualizare, se folosesc semnale unificate de tensiune.

În fig. 2.42 este prezentată schema-bloc a prelucrării semnalelor pînă la „intrarea" în calculele algoritmului de reglare, rezident, în UC a RD, considerînd, spre exemplificare [17], cazul celui mai uzual semnal unificat de reglare, $4 \div 20$ mA.

Dacă i este dimensionat în UI, iar y^{UC} în procente (%), caracteristica de transfer (statică) de la i la y^{UC}, este reprezentată în fig. 2.43, cu

$$y^{UC} = \alpha i + \beta;\ \alpha = \frac{1}{i_M - i_m};\ \beta = -\frac{i_m}{i_M - i_m}. \qquad (2.136)$$

Prin translația $i' \triangleq i - i_m$, caracteristica ilustrată în fig. 2.43 va avea aspectul din fig. 2.44.

În RD, mărimea reglată (măsurată) se afișează fie în procente (%), fie în UI [8], [17].

Dacă afișarea se face în procente din valoarea maximală $y^{uc}_{max} = 1$, atunci valoarea afișată este exact $y^{UC} \in [0,1]$. În al doilea caz, utilizîndu-se caracteristica translatată din fig. 2.44 și relația (2.136), rezultă:

$$i = i_m + y^{UC}(i_M - i_m)\ \ [UI]. \qquad (2.137)$$

Din punctul de vedere al reglării, valoarea folosită în cadrul algoritmilor de reglare este y^{UC}, iar din punctul de vedere al afișării, se afișează fie y^{UC} [%], fie i[UI].

Exemplu. Fie valorile:

$$i_m = 100°C,\ i_M = 500°C;$$

$$e_m = 4\ mA,\ e_M = 20\ mA.$$

Se presupune că în UC-RD se prelucrează valoarea $y^{UC} = 0{,}25 = 25\%$. Atunci, valoarea afișată în procente

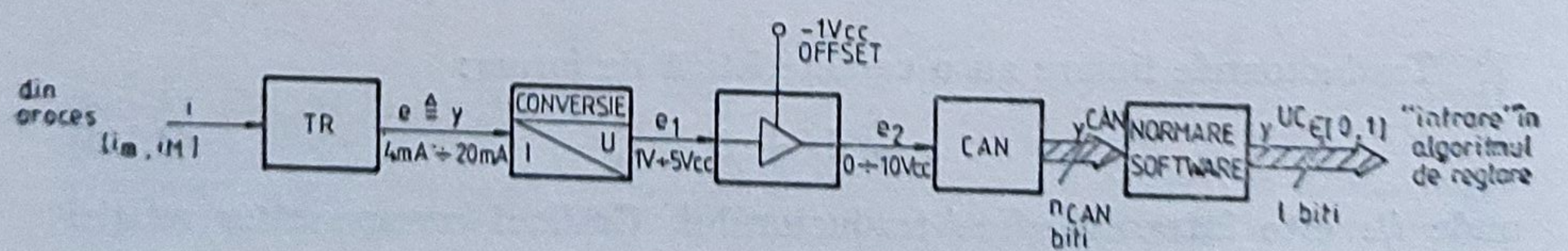


Fig. 2.42

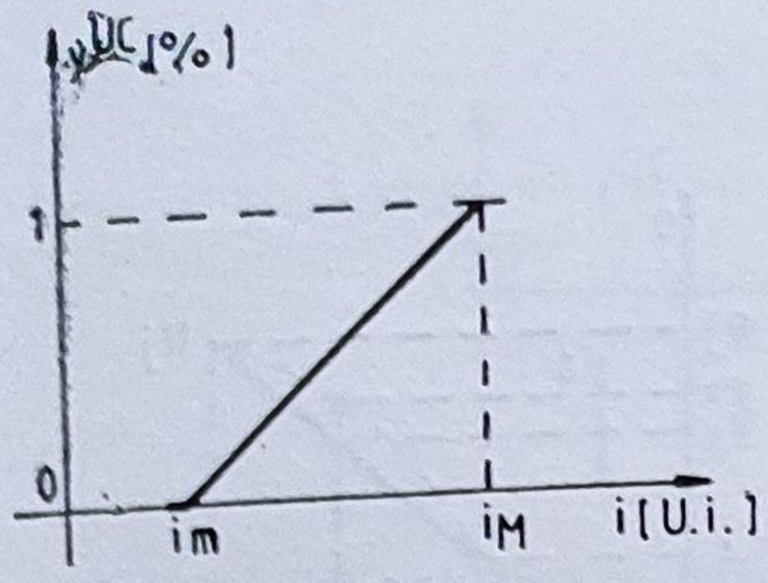


Fig. 2.43

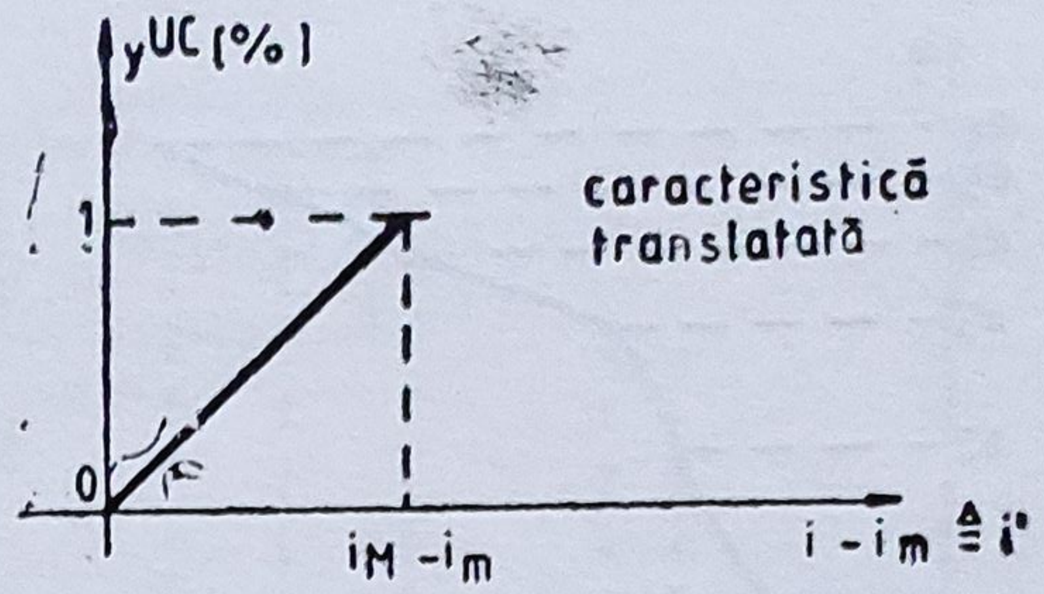


Fig. 2.44

este exact 25%; procentajul indică 25% din plaja maximă de variație activă a lui i, adică $(i_M - i_m)$.

Conform (2.137) valoarea afișată în UI a măsurii este (în mărime absolută):

$$i[°C] = 100°C + \frac{25}{100}(500°C - 100°C) = 200°C.$$

Pentru ca RD să aibă posibilitatea afișării valorii măsurate — în UI și în mărime absolută — este necesară memorarea prealabilă a valorilor i_m și i_M (numere zecimale).

2.11. TRADUCTOARE NELINIARE. METODE DE LINIARIZARE

Dacă dependența $e = f(i)$ nu este liniară, atunci această neliniaritate statică poate afecta profund funcționarea buclelor de reglare liniară, determinînd de multe ori imposibilitatea reglării cu algoritmi liniari. Pentru a rămîne într-un cadru sistemic liniar este necesară liniarizarea măsurii în fluxul de prelucrare de la mărimea măsurată, i, pînă la cea normată, y^{UC}, utilizată în algoritmul de reglare liniar.

În sistemele analogice de reglare funcția de liniarizare este efectuată în diverse module fizice (adaptoare electronice), costisitoare din punct de vedere al prețului, gabaritului, consumului de materiale etc.

Sistemele de reglare numerice moderne sînt prevăzute cu funcțiuni de liniarizare a caracteristicilor neliniare ale traductoarelor ce se efectuează prin *software*, la prețuri și consumuri incomparabil mai mici decît în cazul precedent.

În funcție de gradul de neliniaritate al caracteristicii și de numărul de puncte de pe această caracteristică, cunoscute apriori, se utilizează două metode de liniarizare [34]: prin interpolare liniară pe porțiuni și, respectiv, prin interpolare polinomială.

• *Liniarizarea prin interpolare liniară pe porțiuni*. Se consideră caracteristica traductorului, $e=f(i)$, din fig. 2.45. Pentru plajele de valori $i \in [i_m, i_M]$ și $e \in [e_m, e_M]$ fie o acoperire minimală de $(n + 1)$ puncte, $N_j(i_j, e_j)$, cunoscute apriori, alese astfel încît fiecare rampă $N_{j-1}\ N_j$ să stabilească cu precizia dorită porțiunea de curbă reală.

În fig. 2.46, curba reală e este reprezentată punctat, iar aproximarea liniară, $\tilde{e}$ $(N_{j-1} N_j)$, prin linie continuă.

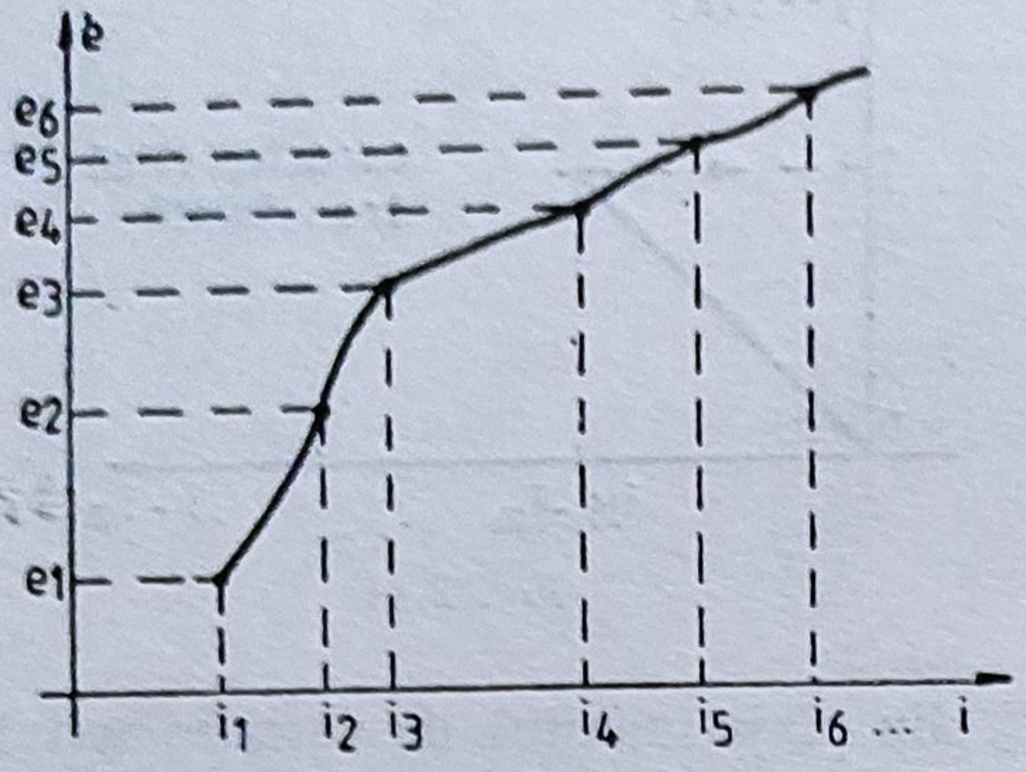


Fig. 2.45

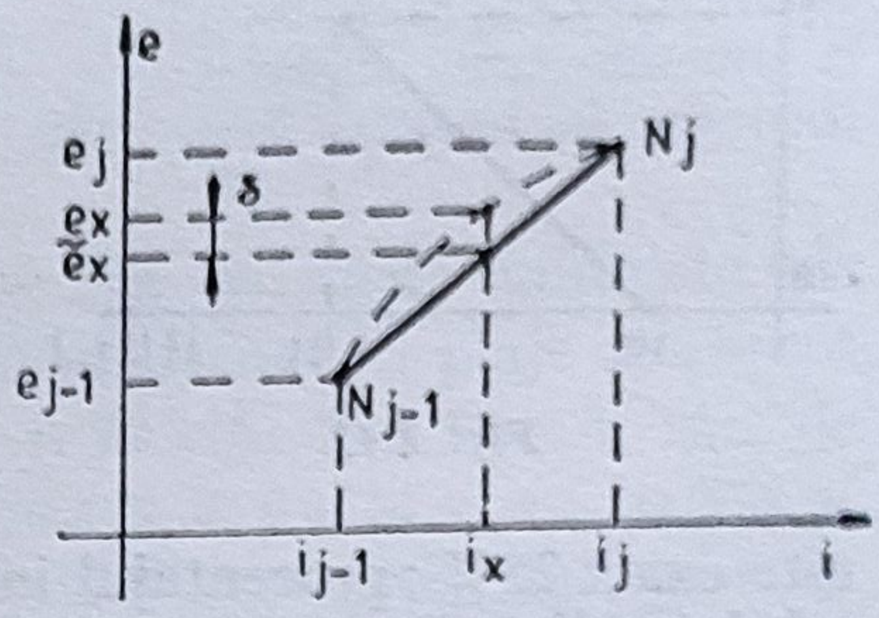


Fig. 2.46

Panta rampei $N_{j-1}N_j$ este $p_j \triangleq \frac{e_j - e_{j-1}}{i_j - i_{j-1}}$, $j = \overline{1, n+1}$.

Pe fiecare porțiune aproximată, $i \in (i_{j-1}, i_j)$, $\max | e - \hat{e} | <$ eroarea dată apriori.

Fie o valoare măsurată, i_x, care nu coincide cu nici una din valorile memorate, $i_1, i_2, \ldots, , i_{n+1}$; ca urmare, nici valoarea e_x corespunzătoare nu va aparține mulțimii memorate $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$.

Folosindu-se interpolarea liniară, după încadrarea prin comparații succesive a valorii i_x în intervalul (i_{j-1}, i_j), se obține valoarea liniarizată aproximată:

$$\tilde{e}_x = e_{j-1} + p_j(i_x - i_{j-1}), \tag{2.138}$$

unde p_j este panta memorată a segmentului $N_{j-1}\ N_j$ definită anterior.

Procedură:

— se memorează apriori punctele $N_1, N_2, \ldots, N_{n+1}$ ale caracteristicii reale $e = f(i)$, conform cerințelor de mai sus;

— se măsoară valoarea curentă i_x și se încadrează în intervalul adecvat (i_{j-1}, i_j), cu $i_x \neq i_j$, $j = \overline{1, n+1}$;

— conform relației (2.138), se calculează valoarea liniarizată, $\tilde{e}_x$.

Cînd caracteristica $e = f(i)$ este neliniară, numărul de puncte $(n+1)$ crește excesiv, din care motiv metoda devine ineficientă din punct de vedere operațional. Această situație este specifică și reglărilor rapide sau foarte rapide, cînd timpul de calcul necesar multiplicării lui p_j cu $(i_j - i_{j-1})$ devine critic în contextul duratei totale a calculelor pe care le presupune aplicarea algoritmului de reglare [17].

• *Liniarizarea prin interpolare polinomială*. Cînd se cunosc un număr redus de puncte ale caracteristicii reale care nu mai permit aproximarea liniară pe porțiunile marcate la extremități, se folosesc polinoame de interpolare ce aproximează mult mai precis curba reală. În acest mod se realizează nu numai cunoașterea aproximativă a tuturor punctelor caracteristicii, ci și liniarizarea ei.

Se preferă polinoamele pentru calcul iterativ care solicită numai multiplicări.

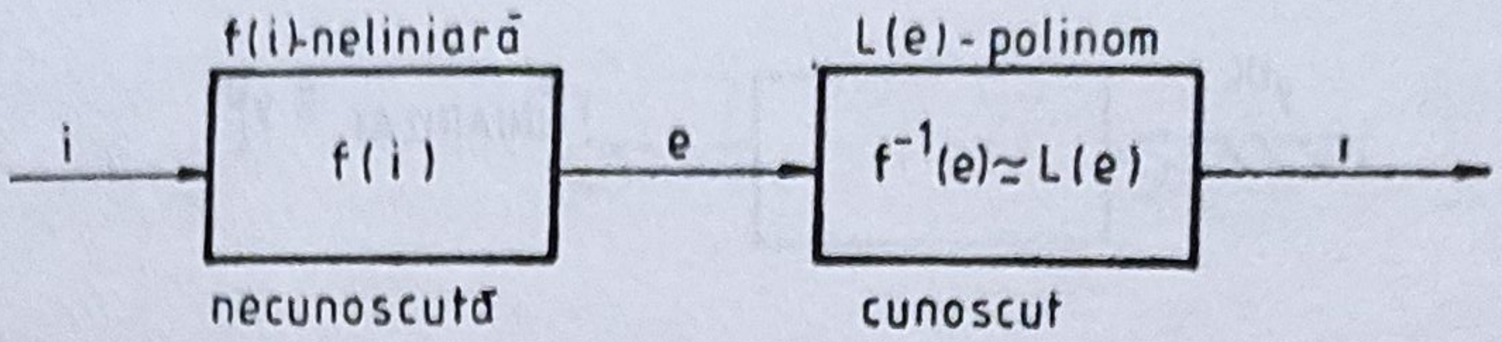


Fig. 2.47

Din punct de vedere matematic, liniarizarea se bazează pe următoarele aspecte teoretice [17], [34].

Se consideră traductorul descris prin caracteristica statică $e = f(i)$, unde $f(i)$ este o funcție inversabilă pe întreg intervalul $i \in [i_m, i_M]$, condiție absolut necesară pentru realizarea liniarizării. Fie $f^{-1}(e) \stackrel{\Delta}{=} g(e) = i$, inversa funcției $f(i)$.

Cunoscînd un număr de n puncte (i_j, e_j), se determină polinomul de interpolare $L(e)$, care aproximează $g(e)$ și nu pe $f(i)$. Deci, $L(e) \simeq g(e)$. Evident, inversa acestui polinom, $g^{-1}(i) \stackrel{\Delta}{=} f(i)$, nu mai este o funcție polinomială, dar aspectul ei nu interesează.

Găsind din datele experimentale $\tilde{i} = L(e)$ (s-a folosit notația $\tilde{i}$ și nu i, pentru că $L(e)$ este o aproximație a lui $g(e) \stackrel{\Delta}{=} f^{-1}(e) = i$, operațiile se succed în conformitate cu algoritmul prezentat în fig. 2.47.

Valoarea interpolată este:

$$\tilde{i} = L(e) \simeq f^{-1}(e) = f^{-1}(f(i)) = i. \tag{2.139}$$

Din relația (2.139) și fig. 2.47 se remarcă atingerea a două obiective:

— cunoașterea punctelor $\tilde{i}$, calculate din $L(e)$ prin valorile e, obținute la ieșirea traductorului;

— asigurarea caracterului liniar al dependenței $\tilde{i} \stackrel{\Delta}{=} h(i) \simeq i$, adică realizarea liniarizării semnalului (funcția neliniară $f(i)$ dispare).

În realitate, interfața de intrare introduce factori de transfer neunitari și, în plus, se ține seama și de zerourile virtuale $i_m \neq 0$, $e_m \neq 0$, astfel încît dependența liniară din (2.139) nu include aceste efecte reale.

Se consideră lanțul de prelucrare a semnalului la intrarea RD pînă în momentul operării lui în algoritmul de reglare rezident în UC-RD, conform fig. 2.48. În figura menționată, K_{IN} este factorul de transfer global al feței de intrare, iar K_N — factorul de transfer al elementului software de normare.

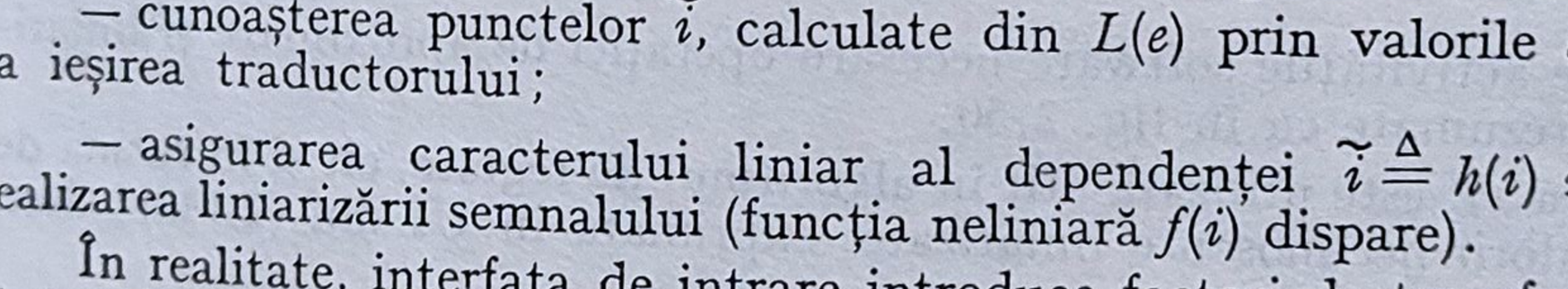


Fig. 2.48

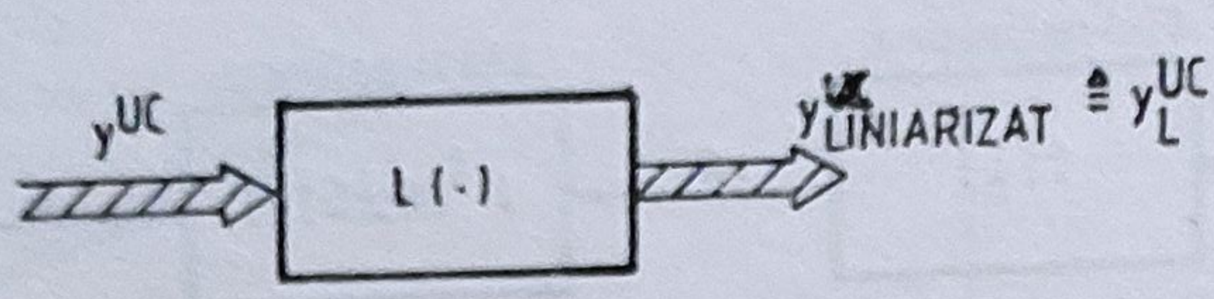


Fig. 2.49

Dependența globală dintre y^{UC} și i este neliniară și poate fi reprezentată prin relația:

$$y^{UC} = K_N K_{IN} f(i) \tag{2.140}$$

sau

$$y^{UC} = \tilde{K} f(i),\ \tilde{K} \triangleq K_N K_{IN}. \tag{2.141}$$

Cunoscînd polinomul de interpolare determinat *off-line* din date experimentale măsurate, $L(e)$, prelucrarea mărimii interne y^{UC} continuă prin modalitatea ilustrată în fig. 2.49.

Rezultă:

$$y^{UC}_L = L(y^{UC}) = L(\tilde{K} f(i)) = Ai + B. \tag{2.142},$$

Se remarcă diferența dintre relația (2.142), cînd $\tilde{K} \neq 1$, și relația (2.139), cînd — teoretic — $\tilde{K} = 1$, deci, în mod real $B \neq 0$ și $A \neq 1$. Coeficienții A și B din (2.142) sînt dimensionali dacă i este exprimat în UI, iar y^{UC}_L în procente.

Toate activitățile software necesare operației de aproximare și liniarizare pot fi rezumate ca în fig. 2.50.

Mărimea y^{UC}_L este utilizată atît în algoritmul de reglare, cît și în rutina de afișare a valorii necunoscute liniarizate, exprimată în UI din (2.142); deci,

$$i = -\frac{B}{A} + \frac{1}{A} y^{UC}_L \quad [UI]. \tag{2.143}$$

dacă y^{UC}_L este cunoscut în procente.

Detalii privind determinarea polinoamelor de interpolare minimale utilizate în liniarizarea traductoarelor industriale, sînt prezentate în [34].

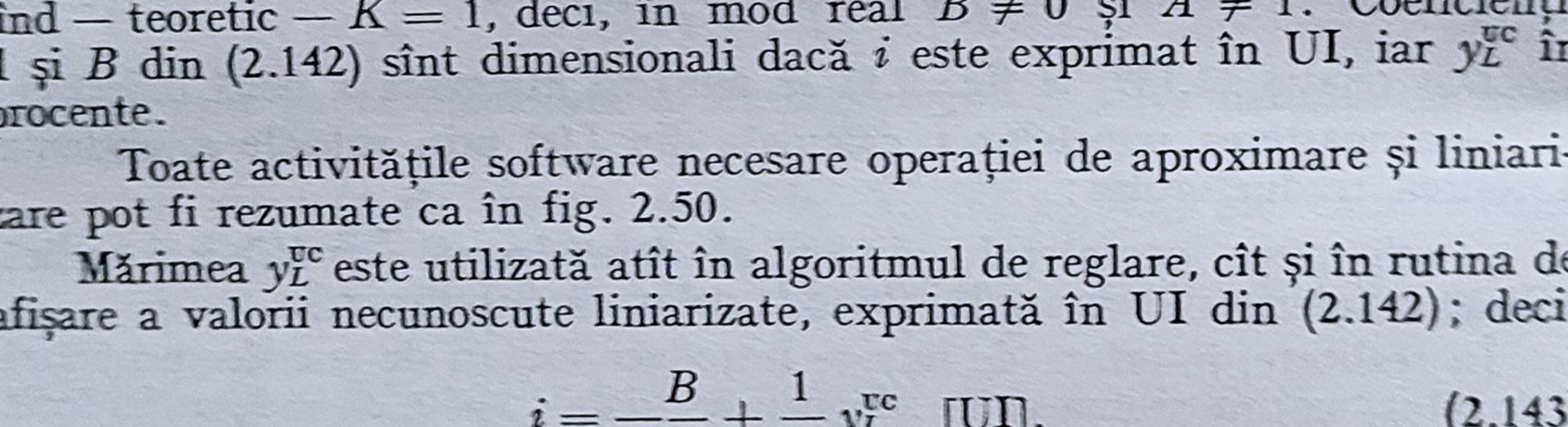


Fig. 2.50

BIBLIOGRAFIE

1. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eșantionare*, Editura Tehnică, București, 1967.
2. Stanomir, D.; Stănășilă, O., *Metode matematice în teoria semnalelor*, Editura Tehnică, București, 1980.
3. Steiglitz, K., *The equivalence of digital and analog signal processing*, Inform. Control, 8, 1965.
4. Fogel, L. J., *A Note of the Sampling Theorem*, IRE Trans. on Inform. Theory, 1, 1955.
5. Linvill, W. K., *Sampled-Data Control Systems, Studied Trough Comparison of Sampling With Impulse Modulation*, Trans. A.I.E.E., 70, 1051.
6. Ragazzini, J. R.; Zadeh, L. N., *The Analysis of Sampled-Data Systems*, Trans. A.I.E.E., 71, 1952.
7. Tîpkin, I. Z., *Sampled-Data Systems With Extrapolating Devices*, Autom. Telemch, 19, 5, 1958.
8. Ionescu, T., *Sisteme și echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
9. Hanselmann, H., *Implementation of Digital Controllers — A survey*, Automatica, 23, 1, 1987, p. 7-32.
9. Hanselmann, H., *Implementation of Digital Controllers — A survey*, Automatica, 23, 1, 1987, p. 7—32.
10. Neuman, C. P.; Baradello, C. S., *Digital transfer functions for microcomputer control*, I.E.E.E. Trans. Sys. Man. Cybern., SMC-9.
11. Davidoviciu, A.; Diatcu, E.; Freidzon, I. R.; Filippov, L. G., *Minicalculatoarele și microcalculatoarele în conducerea proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1983.
12. Davies, E., *Sample and hold — the key to fast A to D convesion*, Electronic Engng. 67, 1985.
13. Latzel, W., *Regelung mit Prozessrechner*, A. G., Zürich, 1977.
14. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
15. Besekerskii, V. A.; Popov, B. P., *Teoria sistem avtomaticeskogo regulirovania*, Nauka, Moskva, 1972.
16. Stratulat, P., *Asupra sistemelor cu eșantionare variabilă*, 4th Intern. Conf. on Contr, Systems — SAII 4, 1, București, 1981, p. 52-56.
17. Sângeorzan, D. C., *Regulatoare digitale multifuncționale*, Studiu IPA, 1987-1988.
18. Sângeorzan, D. C. *Ipoteza lui Latzel's o conjectură?*, al II-lea simpozion, structuri algoritmi și echipamente de conducere a proceselor, Iași, 1989.
19. Mosziynski, M., *Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale orinare*, Editura Tehnică, București, 1973.
20. Șerban, S., Corâci, I. C.; *Frequency methods for discrete-time systems design*, 7th Intern. Conf. on Contr. Systems-SAII 7, 1, București, 1987, p. 236-240.
21. Tertisco, M.; Petrache, Gh,; Russ, I.; Stoica, P., *Identificarea proceselor*, Partea 1, Note de curs, Litografia I. P. București, 1978.
22. Călin, S.; Popescu, Th.; Jora, B.; Sima, V., *Conducerea adaptivă și flexibilă a proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1988.
23. Henrici, P., *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equaticns*, Wiley, New, York, 1964.
24. Radu, O.; Săndulescu, Gh., *Filtre numerice, Aplicații*, Editura Tehnică, București, 1979.
25. Ahmed, M. E.; Belanger, P. R., *Scaling and round off in fixed-point implementation of control algorithms*, IEEE, Trans. Ind. Electron., IE-31, 228, 1984.
26. Katzenelson, J., *On errors introduced by combined sampling and quantization*, IRE Trans. Aut. Control., AC-72, 1962.
27. Ahmed, M. E.; Belanger, P. R., *Limit cycles in fixed-point implementation of control algorithms*, IEEE Trans. Ind. Electron., IE-31, 235, 1984.
28. Barnes, C. B., Tran. N.; Leung S. H., *On the statistics of fixed-point round off error*, IEEE Trans. Acoust. Speech Sig. Process, ASSP-33, 595, 1985.

29. Boite, R., *On the quantization of low-level signals: the fixed-point case*, Proc. Eur. Conf. Cat. Theory and Design, Stuttgart, 1983.

30. Avenhaus, E., *On the design of digital filters wiht coefficients of limited word length*, IEEE Trans. Audio Electroacoust., AU-20, 206, 1972.

31. Knowles, J. B.; Edward, R., *Effect of a finite-word length compuler in a sampled-data feedback system*, Proc. IEE, *112*, 1965.

32. Weinstein, C.; Oppenheim, A. V., *A comparison of round off noise in floating point and fixed-point digital filter realizations*, Proc. IEEE, *57*, 1969.

33. Călin, S.; Tertișco, M.; Dumitrache, I.; Popeea, C., Popescu, D., *Optimizări în automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1979.

Capitolul 3

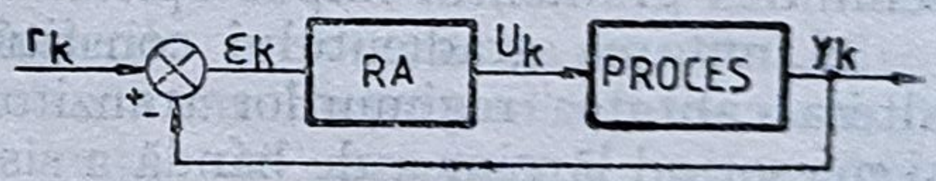
MODULE AUXILIARE DE CONTROL IMPLEMENTATE PRIN SOFTWARE ÎN REGULATOARELE DIGITALE

Algoritmii numerici de reglare utilizează frecvent *Z*ona-*M*oartă (*ZM*), ca o metodă de reducere a sensibilității RA la zgomotul existent cu prepon-derență în sistemele cu eșantionare [1], [2].

Se consideră configurația tipică de sistem automat (fig. 3.1). Comanda curentă, $u_k = u(kT)$, este calculată printr-un algoritm de forma $u_k = f(u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots \varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \ldots)$. Dacă u_{k-1} este comanda precedentă memorată, atunci algoritmul cu ZM funcționează conform organigramei schițate în fig. 3.2.

Coeficientul ZM este programabil. Dacă în calculele algoritmului de reglare eroarea ε_k este normată, $\varepsilon_k \in [-1, +1]$, coeficientul ZM se introduce direct în procente, în plaja uzuală, 0 ... 10% sau 0, ... 0,1.

Utilizîndu-se ZM $\neq 0$, fluctuațiile dinamice ale erorii ε_k datorate măsurii y_k (provenite din traductorul de proces) nu generează noi comenzi (calculate) dacă aceste fluctuații nu depășesc o limită im-pusă aprioric ($ZM \geqslant 0$).



Eig. 3.1

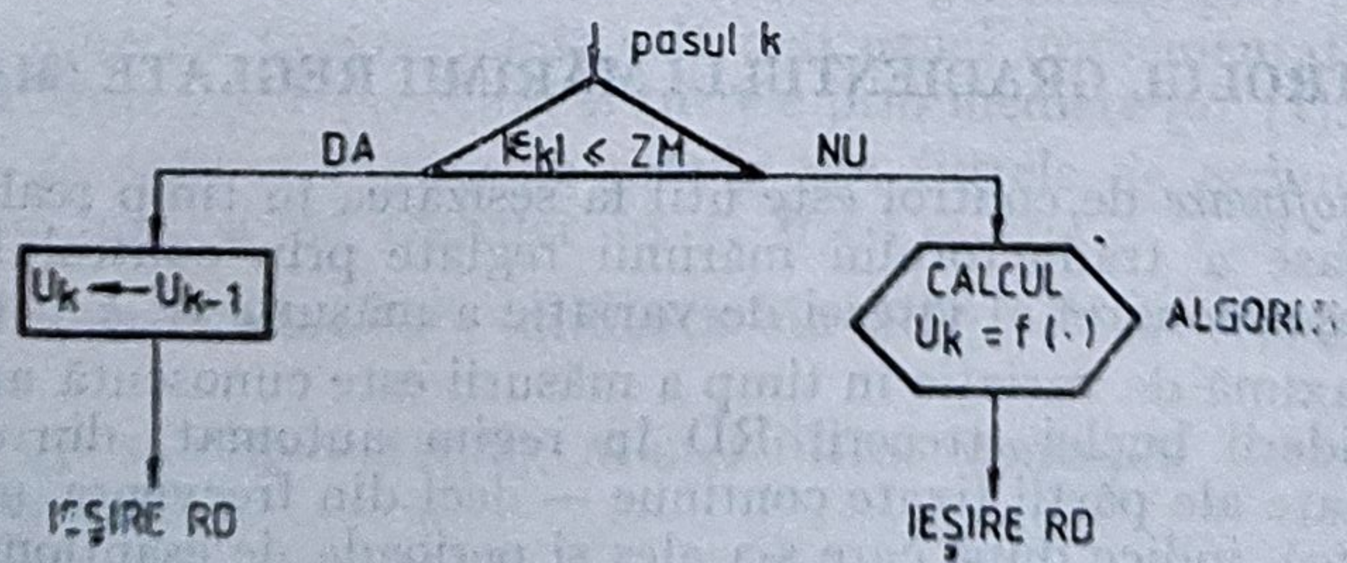


Fig. 3.2

3.1. CONTROLUL LIMITELOR MIN/MAX ALE COMENZII

Limitele min/max ale comenzii, calculate prin algoritmul de reglare — valori normate, $u_k \in [0,1]$ — se controlează în conformitate cu algoritmul de limitare:

$$u_k^{\text{OUT}} = \begin{cases} u_{\min}, \text{ dacă } u_k \leqslant u_{\min}, \\ u_k, \text{ dacă } u_{\min} \leqslant u_k \leqslant u_{\max}, \\ u_{\max}, \text{ dacă } u_k \geqslant u_{\max}, \end{cases} \tag{3.1}$$

unde $0 \leqslant u_{\min} < u_{\max} \leqslant 1$.

Coeficienții $u_{\min}$ și $u_{\max}$ sînt programabili, fiind introduși ca numere fracționare, deci în procente din valoarea maximă normată internă, egală cu 1.

3.2. CONTROLUL GRADIENTULUI COMENZII

În situațiile practice în care viteza de variație în timp a comenzii este foarte mare, îndeosebi în momentul cuplării RD în regim automat (buclă închisă) sau la modificarea în trepte a mărimii de referință a sistemului automat, elementul de execuție poate fi protejat prin limitarea vitezei de variație a comenzii finale [5], [3].

Un indice al vitezei de variație a comenzii este diferența $u_k - u_{k-1}$, denumită comandă *incre ntală*, unde k este pasul curent.

Algoritmul de c trol al gradientului comenzii este [3] $u_k^{\text{OUT}} \leftarrow u_k$, dacă $u_k \leqslant u_{k-1} + \gamma_u u_{k-1}$. Al tel,

$$u_k^{\text{OUT}} \leftarrow (1 + \gamma_u)\, u_{k-1} \tag{3.2}$$

cu condiția:

$$0 \leqslant (1 + \gamma_u)\, u_{k-1} \leqslant 1, \tag{3.3}$$

comenzile interne fiind normate.

Coeficientul programabil γ_u, introdus uzual în formatul zeximal X, X, semnifică gradientul impus apriori comenzii la ieșirea RD.

Limitarea gradientului constituie și o restricție sistemică, care poate altera calitatea regimurilor tranzitorii (mărind durata regimului tranzitoriu și micșorînd lărgimea de bandă a sistemului închis); în consecin ă, ea trebuie realizată în mod adecvat fiecărei aplicații particulare, în etapa de acordare experimentală a RD.

3.3. CONTROLUL GRADIENTULUI MĂRIMII REGLATE (MĂSURATE)

Modulul *software* de control este util la sesizarea în timp real a funcționării defectuoase a traductorului mărimii reglate prin controlul ciclic (cu frecvența de eșantionare) al vitezei de variație a măsurii y_k, $k \geqslant 0$.

Viteza maximă de variație în timp a măsurii este cunoscută aproximativ înaintea închiderii buclei (trecerii RD în regim automat) din constantele de timp estimate ale părții fixate continue — deci din frecvența maximală a spectrului $Y(j\omega)$, indice după care s-a ales și perioada de eșantionare a sistemului discret.

Algoritmul de control al gradientului măsurii y_k este similar cu cel descris în relația (3.2), dar are o finalitate diferită [3]. Dacă

$$y'_k \leqslant y'_{k-1} + \gamma_v y'_{k-1}, \tag{3.4}$$

atunci traductorul funcționează corect (nu se emite nici un mesaj exterior). Altfel, mesaje la operator ⇒ traductor suspect.

Mesajul este transmis vizual sau sonor operatorului RD, preîntîmpinînd situații nedorite în instalația automatizată (de exemplu, exclude RD de la responsabilitatea funcționării defectuoase, *on-line*, a traductorului mărimii reglate).

3.4. FILTRE NUMERICE PROGRAMABILE UTILIZATE ÎN RD

Deoarece comanda emisă de RD are aspectul unei funcții-scară, reprezentînd ieșirea extrapolatorului de ordinul zero, ea poate produce — îndeosebi la perioade de eșantionare mari (algoritmi de reglare necvasicontinui) —oscilații de înaltă frecvență, ÎF, ale mărimii reglate, frecvența fiind mai mare decît cea de eșantionare. Aceste componente de ÎF se suprapun peste componenta utilă, de JF, a măsurii și — convertite în binar prin convertorul A/N — sînt prelucrate de algoritmii de reglare, care — la rîndul lor — vor genera o componentă de comandă parazită (se admite superpoziția efectelor, algoritmul fiind liniar). Evident, paraziții industriali care afectează mărimea analogică de intrare în RD (măsura y) sînt filtrați cu filtre analogice, de frecvență fixă, cu efecte neglijabile în dinamica buclei închise din interfața intrărilor analogice.

Filtrele numerice programabile sînt destinate îndeosebi filtrării componentelor cu frecvența minimă egală cu cea de eșantionare, într-o bandă cu frecvență de tăiere programabilă (de obicei, frecvența de tăiere este programabilă în banda $\frac{1}{10\,T} \ldots \frac{1}{T}$).

Din punct de vedere sistemic, întîrzierile introduse de aceste filtre (de tip FTJ) trebuie să fie neglijabile pentru a nu micșora marginea de fază a sistemului deschis, indiferent de frecvența de eșantionare admisibilă utilizată de RD.

Din considerente referitoare la reducerea numărului de calcule (*on-line*, în buclă închisă) și a numărului de coeficienți (introduși prin toate zecimale) ai filtrelor numerice programabile cele mai uzual implementate în RD sînt filtrele de ordinul I și II, precum și filtrele prin mediere [6], [1], [3].

Filtrele de ordinul I discrete provin din filtrele de ordinul I continue, descrise prin funcția de transfer în s, $H_F(s) = 1/(1 + T_F s)$, discretizate cu perioada de eșantionare T (utilizată de RD). Dacă $H_F(s) \triangleq \frac{E(s)}{I(s)}$, cu $E(\,) \triangleq \mathfrak{L}\{e(t)\}$ și $I(s) = \mathfrak{L}\{i(t)\}$, atunci filtrul continuu este descris prin ecuația diferențială':

$$e(t) + T_F \dot{e}(t) = i(t), \tag{3.5}$$

Ecuația cu diferențe finite a filtrului discret se obține utilizîndu-se pentru aproximare fie *metoda dreptunghiului*, fie *metoda trapezelor* [1], [9], [3].

Folosindu-se metoda dreptunghiului, din (3.5) rezultă:

$$e_k = e_{k-1} + c_{f_1}(i_k - e_{k-1}), \tag{3.6}$$

unde

$$e_k \triangleq e(kT); \; i_k \triangleq i(kT);$$

$$c_{f_1} = \frac{1}{1+\sigma}; \quad \sigma \triangleq \frac{T_F}{T}; \quad 0 < c_{f_1} \leqslant 1. \tag{3.7}$$

Efectul obținut prin utilizarea acestui filtru, în funcție de coeficienții σ, respectiv c_{f_1}, este sintetizat în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

σ	c_{f_1}	Efectul filtrării
0	1	nul
$0 < \sigma < 1$	$0{,}5 < c_{f_1} < 1$	neglijabil
$1 \leqslant \sigma \leqslant 2$	$0{,}33 \leqslant c_{f_1} \leqslant 0{,}5$	moderat
$2 < \sigma \leqslant 3$	$0{,}25 \leqslant c_{f_1} < 0{,}33$	semnificativ
$3 < \sigma \leqslant 9$	$0{,}1 \leqslant c_{f_1} < 0{,}25$	foarte puternic

Funcția de transfer discretă a filtrului (3.6), obținută prin notarea cu q^{-1} a operatorului de întîrziere cu o perioadă de eșantionare T, asimilat forțat cu variabila z^{-1} a transformatei $\mathfrak{Z}$ este:

$$H^{I}_{F_1}(z^{-1}) = \frac{1-c}{1-cz^{-1}}; \quad c \triangleq 1 - c_{f_1}. \tag{3.8}$$

Pentru $c_{f_1} = 1$, conform tabelului 3.1, $c = 0$ și $H^{I}_{F_1}(z^{-1}) = 1$; în consecință, nu există nici un efect de filtrare.

Teoretic, dacă $\sigma \to \infty$, $c_{f_1} \to 0$ și $c \to 1$, atunci $|H^{I}_{F_1}(z^{-1})| \to 0$.

Efectul filtrării crește cu apropierea polului c, din (3.8), de cercul unitar, $|z| = 1$.

Coeficientul programabil introdus prin tastatura zecimală a RD este fie $\sigma \in [0,9]$, și atunci (intern, în RD) trebuie calculat c_{f_1} (*on-line*, în buclă deschisă sau închisă), fie direct $c_{f_1} \in [0, 1 \ldots 1]$, cu semnificația din tabelul 3.1.

Apelîndu-se la *metoda trapezelor*, din (3.5) rezultă:

$$e_k = e_{k-1} + c_{f_1}(i_k + i_{k-1} - 2e_{k-1}), \tag{3.9}$$

unde

$$c_{f_1} \triangleq \frac{1}{1+2\sigma}.$$

Prin utilizarea acestui filtru, efectul filtrării în funcție de coeficienții σ, respectiv c_{f_2}, este sintetizat în tabelul 3.2.

Tabelul 3.2

σ	c_{f_2}	Efectul filtrării
0	1	nul
$0 < \sigma \leqslant 1$	$0{,}3 \leqslant c_{f_2} < 1$	neglijabil
$1 < \sigma \leqslant 2$	$0{,}2 \leqslant c_{f_2} < 0{,}3$	moderat
$2 < \sigma \leqslant 3$	$0{,}15 \leqslant c_{f_2} < 0{,}2$	semnificativ
$3 < \sigma \leqslant 9$	$0{,}05 \leqslant c_{f_2} < 0{,}15$	foarte puternic

Funcția de transfer discretă a filtrului (3.9) este:

$$H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{F}_2}(z^{-1}) = \frac{C_{f_2}(1+z^{-1})}{1+\dfrac{1-2\sigma}{1+2\sigma}z^{-1}}. \tag{3.11}$$

Polul introdus de filtrul $H^{\mathrm{I}}_{\mathrm{F}_2}(z^{-1})$ este $p = \dfrac{2\sigma-1}{2\sigma+1}$. Pentru $\sigma \to 0$ se obține $p \to -1$, iar dacă $\sigma \to \infty$, atunci $p \to 1$ (fig. 3.3).

Teoretic, filtrul (3.9) este o aproximație mai bună a celui continuu (3.5), dar — pentru anumite valori ale parametrului (stabil) σ introdus pe calea directă, filtrul fiind înglobat în modelul discret al părții fixate — polul negativ poate conduce la comenzi oscilante în buclă închisă (v. capitolul 7). Deci, se recomandă plaja de valori $\sigma = 0{,}5 \ldots 9$ sau $\sigma = 0$.

Filtrele de ordinul II se obțin prin discretizarea (cu *metoda dreptunghiului*) filtrului continuu de ordinul II:

$$H^{\mathrm{II}}_{\mathrm{F}}(s) \triangleq \frac{E(s)}{I(s)} = \frac{1}{T^2_{\mathrm{F}}s^2 + 2\xi_{\mathrm{F}}T_{\mathrm{F}}s + 1}, \quad 0 < \xi_{\mathrm{F}} < 1, \tag{3.12}$$

descris în timp prin ecuația diferențială:

$$T^2_{\mathrm{F}}\ddot{e}(t) + 2\xi_{\mathrm{F}}T_{\mathrm{F}}\dot{e}(t) + e(t) = i(t). \tag{3.13}$$

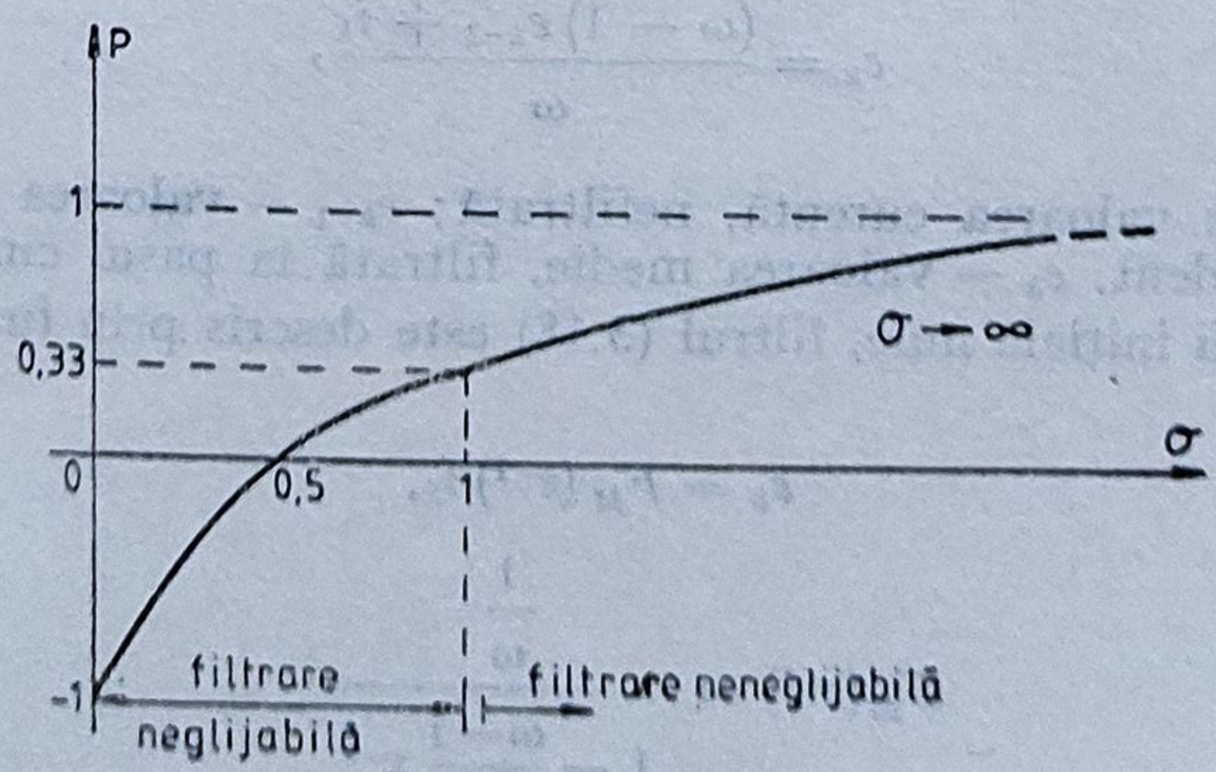


Fig. 3.3

Ecuația cu diferențe finite a filtrului discret devine:

$$e_k = a\,e_{k-1} - b\,e_{k-2} + d\,i_k, \tag{3.14}$$

unde

$$a = \frac{2(\sigma^2 + \xi_F\sigma)}{\sigma^2 + 2\,\xi_F\sigma + 1}; \quad b = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 2\,\xi_F\sigma + 1}; \quad d = \frac{1}{\sigma^2 + 2\,\xi_F\sigma + 1}.$$

Funcția de transfer discretă a filtrului (3.14) este:

$$H_F^{II}(z^{-1}) = \frac{d}{1 - az^{-1} + bz^{-2}}. \tag{3.15}$$

Filtrele de ordinul II sînt utilizate îndeosebi datorită atenuării mari introduse, dar — comparativ cu filtrele de ordinul I — implementarea lor necesită un număr însemnat de calcule *on-line*.

Filtrele prin mediere. Dacă i este mărimea de intrare curentă în filtru, iar valorile ei anterioare sînt memorate pînă la ordinul de regresie $\omega - 1$ atunci ieșirea filtrului, e_k, este dată de relația:

$$e_k = \frac{i_k + i_{k-1} + \ldots + i_{k-(w-1)}}{\omega}, \quad \omega \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$

O bună filtrare necesită un ordin de regresie $\omega - 1$ mare [1], ceea ce constituie un dezavantaj din punctul de vedere al consumului de memorie (cerut de memorarea regresorilor $i_{k-1}, i_{k-2}, \ldots i_{k-(w-1)}$) și al inițializării filtrului la cuplarea RD în regim automat.

În [2] se indică ca eficiență valoarea $\omega = 4$, filtrul obținut:

$$e_k = \frac{i_k + i_{k-1} + i_{k-2} + i_{k-3}}{4} \tag{3.17}$$

fiind utilizat în filtrarea componentei *D*erivative, *D*, a algoritmilor PID discreți. Pentru valori ω mari se recomandă filtrarea prin mediere [4] conform relației:

$$e_k = \frac{(\omega - 1)\,e_{k-1} + i_k}{\omega}, \tag{3.18}$$

în care i_k este valoarea curentă, nefiltrată; e_{k-1} — valoarea medie, filtrată la pasul precedent, e_k — valoarea medie, filtrată la pasul curent.

Cu condiții inițiale nule, filtrul (3.18) este descris prin funcția de transfer discretă:

$$e_k = F_M(z^{-1})\,i_k, \tag{3.19}$$

$$F_M(z^{-1}) = \frac{\frac{1}{\omega}}{1 - \frac{\omega - 1}{\omega}\,z^{-1}}. \tag{3.20}$$

Pentru $\omega \to \infty$, polul introdus de filtrul (3.19) este $p_M \triangleq \frac{\omega - 1}{\omega} \to 1$; deci, cu cît medierea se face utilizîndu-se mai mulţi regresori, cu atît întîrzierea introdusă de filtrul (3.19) este mai mare. Spre deosebire de acesta, la care frecvenţa de tăiere poate fi controlată fără dificultăţi, filtrului (3.16), pentru $\omega \geqslant 4$, i se poate calcula (şi deci programa) mult mai greu această frecvenţă, ceea ce-l face utilizabil, de regulă, pentru filtrarea diverselor mărimi procesuale, diferite de valoarea măsurată (reglată), mărimi care se cer afişate, vizualizate etc.

Filtrul cel mai utilizat în RD este filtrul de ordinul I — v. relaţia (3.6) —, descris prin funcţia de transfer discretă $H^{I}_{F_1}(z^{-1})$ din (3.8), notată în următoarele capitole cu $F(z^{-1})$.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu, T., *Sisteme şi echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

2. Călin, S., *Regulatoare automate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Studiu I.P.A., 1987—1988.

3. Sângeorzan, D. C., *Regulatoare digitale multifuncţionale*, Studiu I.P.A., 1987-1988

4. Rădoi, C.; Nelepcu, G.; Constantin, P.; Murgan, A. T.; Drăgulescu N.; Radu, O.; Lăzărescu, V., *Circuite şi echipamente electronice industriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986

5. Călin, S.; Popescu, Th.; Jora, B.; Sima, V., *Conducerea adaptivă şi flexibilă a proceselor industriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988.

6. Corripio, A. B.; Smith, C. L.; Murill, P. W., *Filter design for digital control loops*, Instrumentation Technology, January, 1973.

7. Leon, B. J.; Bass, S. C., *Designer's guide to digital filters*, EDN, June, 20, 1974.

8. Oppenheim, A. V.;Schafer, R. W., *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

9. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

Capitolul 4

ANALIZA ÎN PSEUDOFRECVENŢĂ A SISTEMELOR DISCRETE. ASPECTE TIPICE

4.1. INTRODUCERE

Ipoteza preliminară a acestui capitol constă în cunoașterea precisă, apriori, a modelului părții fixate continue, deci a tuturor constantelor de timp fixe. Această informație prealabilă este de regulă imposibil de obținut într-o aplicație de proiectare concretă. Estimînd însă valoarea celei mai mari constante de timp parazite și valorile constantelor de timp mari (constantele principale), se poate alege în mod adecvat perioada de eșantionare a SA (capitolul 2).

În literatura și practica de specialitate s-au impus două tendințe de abordare a analizei și sintezei în frecvență a sistemelor discrete, în funcție de separarea scalei de timp real, complete, a părții fixate prin valoarea aleasă a perioadei de eșantionare și, respectiv, de precizia modelului discret frecvențial obținut.

Pentru o perioadă de eșantionare aleasă în raport cu constantele de timp ale părții fixate continue, disponibile în momentul proiectării, se aplică o metodologie generală de obținere a modelului discret al părții fixate în variabila z a transformării discrete $\mathfrak{Z}$; apoi, prin diverse transformări omografice (r sau w) se obțin modele discrete frecvențiale a căror analiză în frecvență și apoi sinteză (corecție) se fac în domenii similare cu cel utilizat în cazul continuu.

Problema analizei și sintezei este adusă în cadrul teoretic, metodologic și procedural al analizei sistemelor continue, de unde se preiau masiv aproape toate metodele consacrate în practică [3], [6], [5], [2].

În cazul unor modele continue cu multe constante de timp, procedura generală de obținere a modelelor discrete frecvențiale (în variabilele r sau w) devine extrem de dificilă, acesta fiind handicapul principal al primei tendințe de abordare amintite anterior.

Cea de-a doua tendință de abordare pornește de la premisa separării nete a scalei complete de timp real a părții fixate continue prin perioada de eșantionare T, în scala de timp rapid, asociată dinamicii modelului continuu de ÎF, și scala de timp lent (principală), asociată dinamicii modelului continuu de JF. Principalele performanțe dinamice și îndeosebi staționare ale sistemului automat depind de modelul continuu de JF al părții fixate, modelul continuu de ÎF contribuind îndeosebi la realizarea marginii de fază

și de amplitudine. Acest fapt a impus metode de obținere directă a modelelor discrete frecvențiale, necesare în proiectare, din modelele continue de JF ale părții fixate, cu o anumită precizie, în care este implicat raportul valoric dintre perioada de eșantionare și constantele de timp mici, cunoscute sau necunoscute, omise în etapa de proiectare [1], [2], [4].

Ultima tendință de abordare are și avantajul unei similitudini complete cu metodologiile cazului continuu, fără a mai necesita, din punctul de vedere al calculului, aplicarea diverselor transformări omografice, care devin dificil de folosit pentru modele continue cu multe constante de timp, principale și parazite.

În acest capitol, accentul tratării va fi pus pe metodologia obținerii directe a modelelor discrete frecvențiale din modelele continue, procedurile de corecție în frecvență fiind exemplificate în capitolele 5 și 9.

4.2. TRANSFORMĂRI OMOGRAFICE

Analiza în frecvență a sistemelor discrete în cazul unei perioade mari de eșantionare, T, aleasă relativ arbitrar se face în intenția de a apropia procedural tehnicile din cazul continuu de cele din cazul discret. În acest sens se utilizează frecvent transformările omografice w și r, definite prin expresiile:

$$z = \frac{1 + w}{1 - w}, \qquad w = \frac{z - 1}{z + 1}, \tag{4.1}$$

respectiv,

$$z = \frac{r + 1}{r - 1}, \qquad r = \frac{z + 1}{z - 1}, \tag{4.2}$$

cu relația:

$$w = \frac{1}{r}. \tag{4.3}$$

Prin aceste transformări, discul $|z| \leqslant 1$, din domeniul z, este transformat în semiplanele:

$$\operatorname{Re} w \leqslant 0, \quad \operatorname{Re} r \leqslant 0 \tag{4.4}$$

din domeniul w, respectiv r; deci, există o analogie clară cu planul s (s — variabila transformării £).

Din punctul de vedere al stabilității modelului discret descris prin funcția de transfer discretă $H_f(z)$, interesează poziția polilor lui $H_f(z)$ în raport cu cercul unitar $|z| = 1$. Luîndu-se în calitate de criteriu de referință stabilitatea modelului continuu descris prin funcția de transfer continuă $H'_f(s)$, interesează poziția polilor lui $H'_f(s)$ în semiplanul $\operatorname{Re} s \leqslant 0$.

Legătura dintre $H_f(z)$ și $H'_f(s)$ este dată prin relația:

$$H_f(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}\left\{\frac{H'_f(s)}{s}\right\}, \tag{4.5}$$

dacă s-a utilizat extrapolatorul de ordinul zero. Deoarece $z \stackrel{\Delta}{=} e^{Ts}$, în care T este perioada de eșantionare, rezultă $\lim_{s\to 0} z = 1$, $\lim_{z\to 1} w = 0 = \lim_{s\to 0} s$, dar $\lim_{z\to 1} r = \infty \neq \lim_{s\to 0} s = 0$.

Se preferă transformarea omografică w, datorită faptului că $\operatorname{Im} w \stackrel{\Delta}{=} \omega$ și $\operatorname{Im} s \stackrel{\Delta}{=} \omega$ au același tip de monotonie, adică $\omega_w(\omega)$ este monoton crescătoare după ω, pe cînd la transformarea r situația este exact inversă.

Din relația (4.1) rezultă $w = \dfrac{z-1}{z+1}$; atunci, pentru $|z| = 1$ sau $z = e^{j\omega T}$,

$$w = \frac{e^{j\omega T} - 1}{e^{j\omega T} + 1} = j\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2} \stackrel{\Delta}{=} j\omega_w, \quad j \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{-1}. \tag{4.6}$$

S-a notat

$$\omega_w = \operatorname{Im} \quad w = \operatorname{tg}\frac{\omega T}{2} \tag{4.7}$$

pseudofrecvența relativă [4], [1], [3] folosită în descrierea în frecvență a sistemelor discrete.

În banda principală (primară) de frecvență a lui $|H_f(e^{j\omega T})|$ — funcție periodică, adică $-\pi \leqslant \omega T \leqslant +\pi$ sau $\dfrac{\omega T}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \quad +\dfrac{\pi}{2}\right]$ — pseudofrecvența relativă, ω_w, variază în plaja de valori:

$$\omega_w \in (-\infty, +\infty). \tag{4.8}$$

Dacă se notează

$$\lambda = \frac{2}{T}\omega_w = \frac{2}{T}\operatorname{tg}\frac{\omega T}{2}, \tag{4.9}$$

atunci λ este *pseudofrecvența absolută* [4], [1].

OBSERVAȚIE. Din punct de vedere dimensional, conform relației (4.7), ω_w este adimensională sau se ia în radiani, iar din (4.9) λ este exprimată în 1/s sau în rad/s, de unde provin și denumirile asociate — relativă și respectiv, absolută.

Pentru frecvențele $\omega = \operatorname{Im} s > 0$ se consideră două intervale de valori I_1 și I_2, astfel încît

$$I_1 = \left\{\omega \,|\, \omega < \frac{2}{T}\right\}; \quad I_2 = \left\{\omega \,|\, \omega > \frac{2}{T}\right\}. \tag{4.10}$$

Cînd $\omega \in I_1$, pseudofrecvența relativă ω_w definită în (4.7) poate fi aproximată prin

$$\omega_w \triangleq \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} \simeq \frac{\omega T}{2}; \tag{4.11}$$

atunci, pseudofrecvența absolută λ definită în (4.9) poate fi aproximată prin

$$\lambda = \frac{2}{T} \omega_w \simeq \frac{2}{T} \frac{\omega T}{2} = \omega. \tag{4.12}$$

Deci, pentru frecvențele $\omega \in I_1$, pseudofrecvența absolută coincide cu frecvența ω.

Se observă că pentru același interval $\omega \in I_1$, cu aproximația din (4.11), rezultă:

$$z = \frac{1+w}{1-w} = \frac{1+j\omega_w}{1-j\omega_w} \simeq \frac{1+j\dfrac{\omega T}{2}}{1-j\dfrac{\omega T}{2}},$$

care este exact transformarea Padé de ordinul unu a axei $\operatorname{Re} s = 0$,

$$z = e^{Ts} \simeq \left. \frac{1+\dfrac{Ts}{2}}{1-\dfrac{Ts}{2}} \right|_{\operatorname{Re} s = 0} \tag{4.13}$$

4.3. DIHOTOMIA SCALEI DE TIMP REAL A SISTEMELOR FIXATE

În [1] și [4] se consideră partea fixată continuă descrisă prin:

$$H_f'(s) = \frac{K_f}{s^2} \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + sT_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n} (1 + sT_{P_i})}, \quad m \leqslant n + 2. \tag{4.14}$$

Dacă frecvența de tăiere a caracteristicii logaritmice a părții fixate $|H_f'(j\omega)|^{[dB]}$ este ω_t, atunci perioada de eșantionare, T, se alege conform relației [4]:

$$T = \frac{2}{\omega_t} \quad \left(\text{mai general, } T \leqslant \frac{2}{\omega_t}\right). \tag{4.15}$$

Frecvența de tăiere, ω_t, separă frecvențele caracteristice proprii (polii) sistemului continuu (4.14) în două grupe distincte, *a* și *b*

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}: \{T_{P_1}, \quad T_{P_2}, \ldots, T_{P_q}\}; \quad T_{P_i} > \frac{T}{2}, \quad i = \overline{1,\ q}\ (\mathrm{JF}); \\ &\mathbf{b}: \{T_{P_{q+1}}, \quad T_{P_{q+2}}, \ldots, T_{P_n}\}, \quad T_{P_i} < \frac{T}{2}; \quad i = \overline{(q+1)\,n}\ (\hat{\mathrm{I}}\mathrm{F}). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Se constată că frecvențele caracteristice $\frac{1}{T_{P_i}}$ ale primei grupe aparțin intervalului I_1 din (4.10), iar frecvențele caracteristice ale celei de-a doua grupe, $\frac{1}{T_{P_i}}$, intervalului I_2.

Această dihotomie a mulțimii constantelor de timp ale modelului (4.14) permite obținerea modelului discret la joasă frecvență (JF), pentru $\omega \in I_1$, și a modelului discret la înaltă frecvență (ÎF), pentru $\omega \in I_2$.

Modelul la JF. Dacă $\omega \in I_1$ este valabilă aproximația din (4.12), $\lambda \simeq \omega$. Notînd [2]:

$$\bar{s} = \mathrm{j}\lambda, \tag{4.17}$$

rezultă formal [1]

$$H_f^{JF}(\bar{s}) = H_f'^{JF}(s)\,|_{s=\bar{s}}. \tag{4.18}$$

Deci,

$$H_f^{JF}(\bar{s}) = \frac{K_f}{\bar{s}^2} \frac{\prod_{i=1}^{m}(1+\bar{s}T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{q}(1+\bar{s}T_{P_i})}, \tag{4.19}$$

unde prezența neglijabilă, pentru $\omega \in I_1$, a constantelor parazite aparținînd celei de-a doua grupe a fost omisă din modelul (4.14).

Relația (4.18) denotă faptul că modelul discret la JF al părții fixate, descris în pseudofrecvențe absolute $\bar{s} = \mathrm{j}\lambda$, se obține direct din modelul continuu, la joasă frecvență, fără a mai utiliza transformările $z \to w \to \bar{s}$ greu de aplicat la modele continue cu multe constante de timp.

Dacă se preferă reprezentarea modelului discret la JF, din (4.19), în pseudofrecvențe relative $w = j\omega_w$, atunci din (4.12) rezultă

$$\lambda = \frac{2}{T}\omega_w = \omega, \quad w = \mathrm{j}\omega_w = \frac{T}{2}s = \frac{T}{2}\bar{s}, \quad s = \mathrm{j}\omega, \quad \omega \in I_1;$$

deci,

$$H_f^{JF}(w) = H_f'^{JF}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}w}. \tag{4.20}$$

Modelul la ÎF. Se notează:

$$T_\Sigma = T_{P_{q+1}} + T_{P_{q+2}} + \ldots + T_{P_n} \tag{4.21}$$

Conform [1], modelul discret la IF, descris în pseudofrecvențe absolute, este:

$$H_f^{IF}(\bar{s}) = \left(1 - \frac{T}{2}\bar{s}\right)\frac{2}{T}\,\frac{1 + \bar{s}\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)}{\bar{s}\left(1 + \frac{T}{2}\bar{s}\right)}. \tag{4.22}$$

La înaltă frecvență, $\omega \in I_2$, aproximația din (4.12) pentru pseudofrecvența absolută λ nu mai este valabilă, dar conform (4.9) $\lambda = \frac{2}{T}\omega_w$ și $\omega_w = \frac{T}{2}\lambda$. Indiferent de aproximarea (4.12), relația dintre w și $\bar{s}$ este:

$$w = j\omega_w = j\frac{T}{2}\lambda = \frac{T}{2}\bar{s}. \tag{4.23}$$

Substituindu-se relația (4.23) în (4.22), se obține modelul discret la IF în pseudofrecvențe relative

$$H_f^{IF}(w) = \frac{1 - w}{1 + w}\,\frac{1 + (1 - a)w}{w}, \tag{4.24}$$

în care s-a folosit notația:

$$a = \frac{2T_\Sigma}{T}. \tag{4.25}$$

Utilizîndu-se transformarea inversă din (4.1), $w = \frac{z - 1}{z + 1}$, se obține reprezentarea în domeniul z [8]:

$$H_f^{IF}(z) = (2 - a)\frac{z + b}{z(z - 1)}, \tag{4.26}$$

unde s-a folosit notația:

$$b \triangleq \frac{a}{2 - a} = \frac{T_\Sigma}{T - T_\Sigma}. \tag{4.27}$$

Zeroul funcției discrete din (4.26) este $z_1 \triangleq -b = \frac{T_\Sigma}{T_\Sigma - T}$.

Interesează [8] poziția zeroului z_1 în raport cu cercul unitar $|z| = 1$ pentru

$$T > 2T_\Sigma, \quad |b| < 1, \tag{4.28}$$

și

$$T < 2T_\Sigma, \quad |b| > 1. \tag{4.29}$$

În primul caz modelul la ÎF din (4.26) este de fază minimă, iar în cel de-al doilea, de fază neminimă.

Dacă $T_{P_y} = \min\limits_{i=\overline{1,q}} \{T_{P_i}\}$ adică T_{P_y} este cea mai mică dintre constantele de timp principale, atunci — conform (4.16) și (4.28) — perioada de eșantionare, T, se poate alege în plaja:

$$2T_\Sigma < T < 2T_{P_y}; \tag{4.30}$$

calcularea ei exactă, folosindu-se relația (4.15), nu este posibilă, întrucît pentru modelele continue cu multe constante de timp, frecvența de tăiere, ω_t, este determinată cu aproximație.

Condiția (4.30) este ilustrată în fig. 4.1.

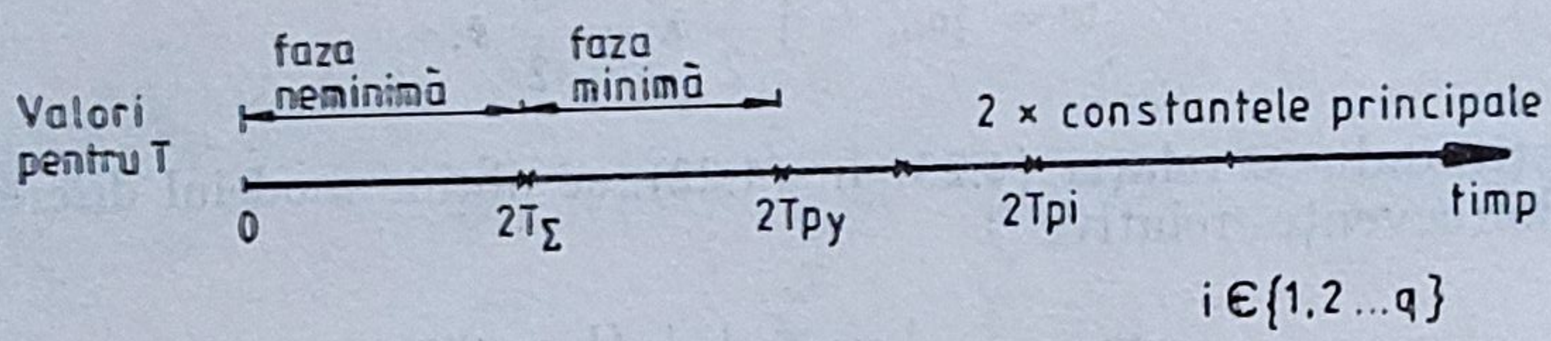


Fig. 4.1

În proiectarea algoritmilor cvasicontinui există tendința de a micșora perioada de eșantionare, astfel încît constantele mici ale grupei **b** să intre în grupa **a**. Micșorîndu-se perioada de eșantionare, se considera două cazuri.

Fie T_{P_x} cea mai mare constantă parazită din grupa **b**:

$$T_{P_x} = \max\limits_{i=\overline{1,n-q}} T\{_{P_{q+i}}\}. \tag{4.31}$$

Se dorește micșorarea perioadei T, astfel încît T_{P_x} să aparțină grupei **a** și nu grupei **b**, situație în care $T < 2T_{P_x}$.

$$\text{Fie } T_{\Sigma'} \triangleq T_\Sigma - T_{P_x} < T_\Sigma.$$

Cazul 1. $T < 2T_{P_x}$ și $2T_{P_x} < 2T_{\Sigma'}$. (fig. 4.2)

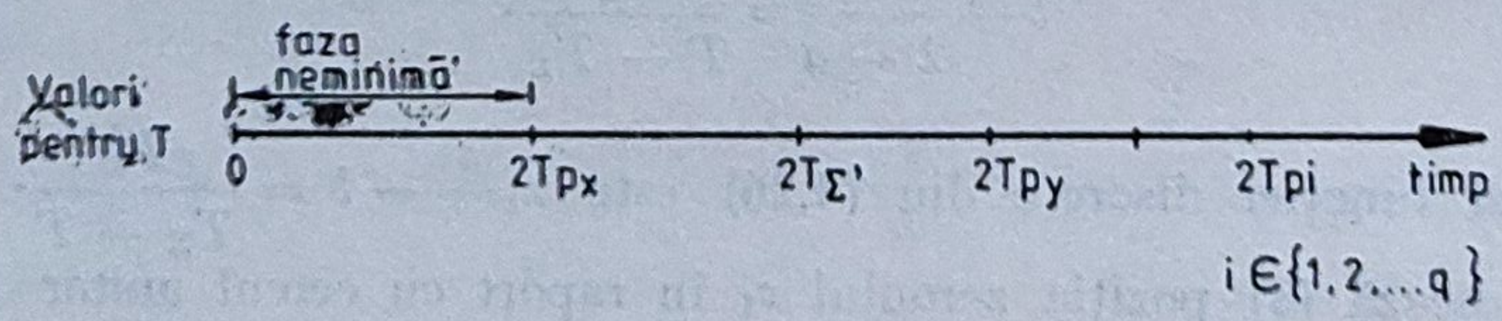


Fig. 4.2

Deoarece $T < 2T_{P_x} < 2T_{\Sigma'}$, atunci — conform relației (4.29) — $|b'| > 1$; deci, zeroul $z_1 = -b'$ este în modul supraunitar, modelul la IF fiind de fază neminimă ($b' = b'(T_{\Sigma'})$). În această situație T_{P_x} nu poate fi introdus în grupa **a**, decît cu handicapul fazei neminime al modelului la IF.

Cazul 2. $T < 2T_{p_x}$, dar $2T_{p_x} > 2T_{\Sigma'}$ (fig. 4.3).

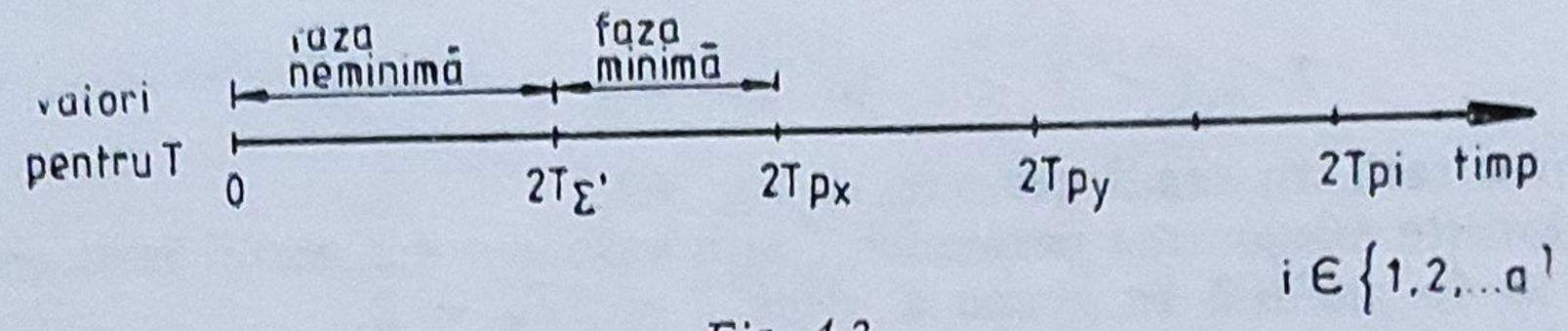


Fig. 4.3

Dacă T este ales în intervalul $T \in (2T_{\Sigma'}, 2T_{p_x})$, atunci — conform relației (4.28) — zeroul $z_1 = -b'(T_{\Sigma'})$ satisface $|b'| < 1$, iar modelul la ÎF este de fază minimă. T_{p_x} poate fi introdus în grupa a, deci perioada de eșantionare poate fi micșorată, de la $T < 2T_{p_y}$ la $T < 2T_{p_x}$, în plaja $T \in (2T_{\Sigma'}, 2T_{p_x})$.

Concluzii practice privind micșorarea perioadei T. Se consideră inegalitatea:

$$T_{p_x} < \frac{1}{2} T_{\Sigma}. \tag{4.32}$$

Dacă $T_{p_x} < \frac{1}{2} T_{\Sigma}$, rezultă $2T_{p_x} < T_{\Sigma}$ sau $T_{p_x} < T_{\Sigma} - T_{p_x} = T_{\Sigma'}$; deci, $T_{p_x} < T_{\Sigma'}$, sau $2T_{p_x} < 2T_{\Sigma'}$.

Reciproc, dacă $T_{p_x} > \frac{1}{2} T_{\Sigma}$, atunci $2T_{p_x} > 2T_{\Sigma'}$.

Satisfacerea sau nesatisfacerea inegalității (4.32) a condus exact la cele două cazuri prezentate anterior.

Cazul 1, cu perioada T micșorată pînă la valoarea $T < 2T_{p_x}$, determină o fază neminimă pentru modelul discret la IF; în cazul 2, corespunzător intervalului $T \in (2T_{\Sigma'}, 2T_{p_x})$, modelul la ÎF este de fază minimă; ca urmare, T_{p_x} poate fi inclus în grupa **a** prin micșorarea perioadei de eșantionare.

Deoarece frecvența de tăiere, ω_t — v. relația (4.15) —, se calculează cu exactitate cu anumite dificultăți, proiectantul separă de regulă constantele de timp dominante (grupa **a**) de cele parazite (grupa **b**).

Alegerea perioadei T și posibilitățile de micșorare a acestui parametru fără consecințe negative din punct de vedere sistemic sînt ilustrate prin două exemple corespunzătoare celor două cazuri teoretice prezentate.

Exemplu:

$$H'_f(s) = \frac{1 + 8s}{(1 + 20s)(1 + 10s)(1 + s)(1 + 0{,}6\,s)(1 + 0{,}5\,s)};$$

$$T_{p_1} = 20,\ T_{p_2} = 10,\ T_{p_3} = 1,\ T_{p_4} = 0{,}6,\ T_{p_5} = 0{,}5.$$

O modalitate practică de separare a valorilor T_{p_i} conduce la:

a: $\{T_{p_1},\ T_{p_2}\} = \{20,\ 10\}$,

b: $\{T_{p_3},\ T_{p_4},\ T_{p_5}\} = \{1;\ 0{,}6;\ 0{,}5\}$;

$T_{p_y} = \min\{T_{p_1},\ T_{p_2}\} = 10$;

$T_{p_x} = \max\{T_{p_3},\ T_{p_4},\ T_{p_5}\} = 1$;

$T_{\Sigma} = T_{p_3} + T_{p_4} + T_{p_5} = 2{,}1\ \ T_{\Sigma'} = 1{,}1$.

Conform relației (4.30), pentru perioada T se recomandă următoarea plajă de valori:

$$2 \cdot 2{,}1 < T < 2 \cdot 10, \text{ sau } 4{,}2 < T < 20,$$

situație ilustrată, în cazul general, în fig. 4.1.

Se dorește micșorarea perioadei T sub valoarea 4,2, astfel încît constanta $T_{p_x} = 1$ să fie inclusă în grupa **a**, deci $T < 2T_{p_x} = 2$.

Se tastează condiția (4.32), adică $1 < \frac{2{,}1}{2}$, stabilindu-se dacă este îndeplinită; deci, T nu poate fi micșorată sub valoarea 2. Orice altă reducere $T \in (2;\ 4{,}2)$ nu modifică situația inițială; ca urmare, conținutul grupelor **a** și **b** rămîne nemodificat pentru $T \in (2;\ 4,\ 2)$. Faza modelului la ÎF devine însă neminimă, deoarece $T < 4{,}2 = 2T_{\Sigma}$, conform (4.29)

Situația valorilor critice și necritice corespunzătoare perioadei T este ilustrată în fig. 4.4.

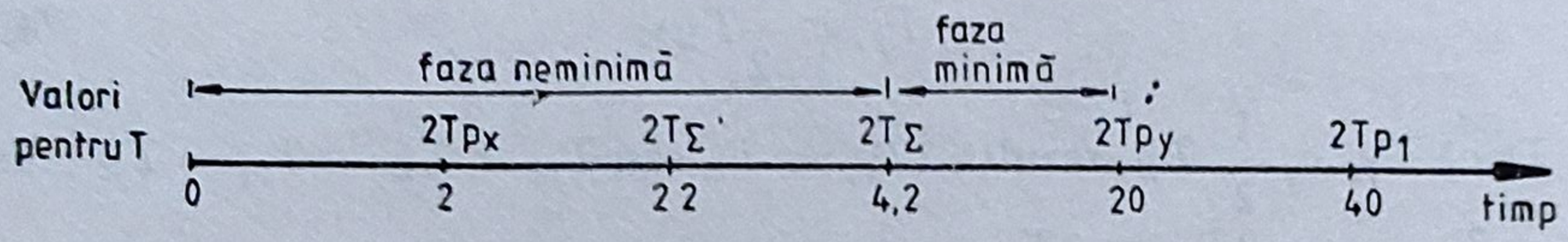


Fig. 4.4.

Exemplu:

$$H_f'(s)\ \frac{1 + 7\,s}{(1 + 20\,s)\,(1 + 10\,s)\,(1 + s)\,(1 + 0{,}4\,s)\,(1 + 0{,}3\,s)};$$

$T_{p_1} = 20,\ T_{p_2} = 10,\ T_{p_3} = 1,\ T_{p_4} = 0{,}4,\ T_{p_5} = 0{,}3.$

Grupele **a** și **b** se obțin după cum urmează:

a: $\{T_{p_1},\ T_{p_2},\} = \{20,\ 10\}$;

b: $\{T_{p_3},\ T_{p_4},\ T_{p_5}\} = \{1;\ 0{,}4;\ 0{,}3\}$;

$T_{p_y} = \min\{T_{p_1},\ T_{p_2}\} = 10$;

$T_{p_x} = T_{p_3} = 1$;

$T_{\Sigma} = T_{p_3} + T_{p_4} + T_{p_5} = 1{,}7,\ T_{\Sigma'} = 0{,}7.$

Conform relației (4.30), se recomandă ca perioada T să se aleagă în plaja de valori $2 \cdot 1{,}7 < T < 2 \cdot 10$ sau $3{,}4 < T < 20$.

Se dorește ca perioada T să se micșoreze astfel încît T_{p_3} să fie inclusă în grupa **a**. Se testează condiția (4.32), deci $1 < \frac{1{,}7}{2}$, constatîndu-se că ea nu este îndeplinită; așadar, $T_{px} > \frac{1}{2} T_{\Sigma}$ și pentru $T \in (2T_{\Sigma'},\ 2T_{px})$ sau $T \in (1{,}4;\ 2)$ modelul la IF este de fază minimă (fig. 4.5). În acest caz T se poate micșora sub valoarea 3,4, mai corect, $T \in (1{,}4;\ 2)$. Dacă T se micșorează ($T < 3{,}4$), dar $T > 2$, atunci situația grupelor **a** și **b** rămîne nemodificată; totuși, pentru $T \in (2;\ 3,\ 4)$ modelul la IF nu este de fază minimă (fig. 4.5).

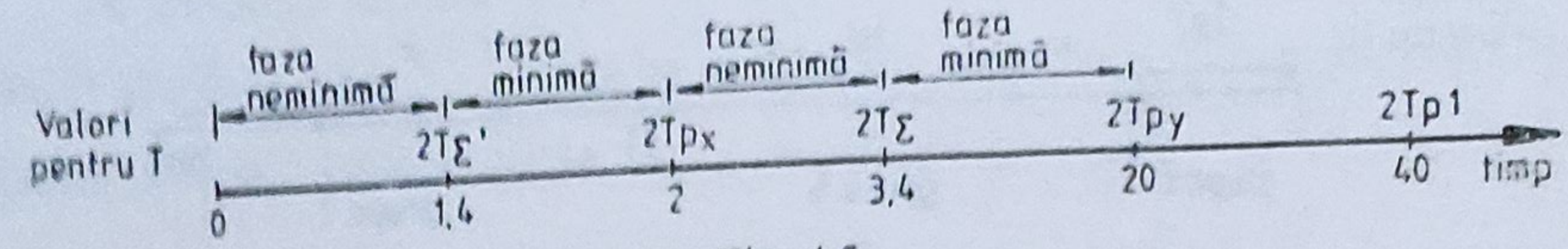


Fig. 4.5

În consecință, dacă se intenționează obținerea unui model la ÎF de fază minimă, se recomandă $T \in (3, 4; 20) \cup (1, 4; 2)$. Cînd $T \in (2; 3, 4) \cup (0; 1,4)$ modelul la ÎF nu este de fază minimă.

Exemplele prezentate conduc concluzia alegerii unei perioade de eșantionare, T, cu o valoare destul de mare, prin care se evită ca faza modelului discret la ÎF să nu fie minimă.

Practic, posibilitatea micșorării perioadei T — reflectată prin relația (4.32) — este condiționată de configurația valorică a constantelor de timp parazite. Dacă expresia (4.32) este îndeplinită, atunci perioada de eșantionare nu poate fi micșorată; în caz contrar ea se poate reduce, dar pe intervale disjuncte [8].

Modelul discret, frecvențial complet. La JF și ÎF, modelul discret complet este de tip factorizat:

$$H_f(\bar{s}) = H_f^{JF}(\bar{s}) H_f^{\hat{I}F}(\bar{s}), \tag{4.33}$$

cu $H_f^{JF}(\bar{s})$ din (4.19) și $H_f^{\hat{I}F}(\bar{s})$ din (4.22); deci,

$$H_f(\bar{s}) = \frac{K_f}{\bar{s}^2} \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + \bar{s}T_{z_i})}{\prod_{i=1}^{q} (1 + \bar{s}T_{p_i})} \left(1 - \frac{T}{2}\bar{s}\right) \frac{1 + \bar{s}\left(\frac{T}{2} - T_\Sigma\right)}{\frac{T}{2}\bar{s}\left(1 + \frac{T}{2}\bar{s}\right)}. \tag{4.34}$$

Indiferent de alegerea perioadei T, prezența polului în origine $\bar{s} = 0$ sau $z = 1$ în relația (4.26) denotă o influență negativă a modelului părții fixate la ÎF asupra întregului model (4.34), indiferent de numărul polilor în zero, $\bar{s} = 0$, ai modelului de JF.

Tendința de a evita dihotomia și de a include *toate* constantele de timp în grupa a este practic imposibilă datorită necunoașterii exacte a tuturor constantelor de timp parazite ale părții fixate continue; considerațiile referitoare la modelele de ÎF, precum și exemplele date recomandă alegerea cu precauție a perioadei de eșantionare, T, pentru a evita, la înaltă frecvență, introducerea fazei neminime.

De remarcat faptul că, la JF și ÎF, ambele modele coexistă în modelul complet (la orice frecvență) într-o relație multiplicativă, conform (4.33).

4.4. TRIHOTOMIA SCALEI DE TIMP REAL A SISTEMELOR FIXATE

În [2] se consideră partea fixată continuă, descrisă prin modelul continuu din (4.14), dar polul $s = 0$ poate avea multiplicitatea $\alpha = 0; 1; 2$; deci,

$$H_f'(s) = \frac{K_f}{s^\alpha} \frac{\prod_{i=1}^{m} (1 + sT_{z_i})}{\prod_{i=1}^{n} (1 + sT_{p_i})}. \tag{4.35}$$

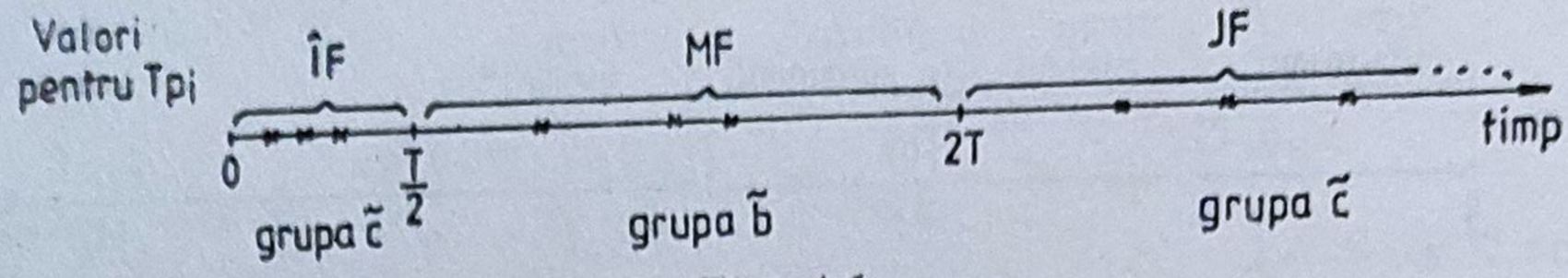


Fig. 4.6

Se alege o perioadă de eșantionare arbitrară, T. Mulțimea constantelo de timp, T_{pi}, ale modelului (4.35) se divide acum în trei grupe, conform rela țiilor:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}:\ T_{p_i} > 2T, \quad i = \overline{1,l} \\ &\mathbf{b}:\ \frac{T}{2} < T_{p_i} < 2T, \quad i = \overline{l+1,\ l+r'}, \\ &\mathbf{c}:\ T_{p_i} < \frac{T}{2}, \quad i = \overline{l+r'+1,\ n}, \end{aligned} \tag{4.36}$$

care determină trei modele discrete, prezentate în fig. 4.6.

Modelul continuu $H_f'(s)$ din (4.35) se descompune în fracții simple:

$$H_f'(s) = \frac{a_{11}}{s} + \frac{a_{12}}{s^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{1 + sT_{P_i}}, \tag{4.37}$$

unde pentru

$$\begin{aligned} &\alpha = 2;\ a_{11} = K_f \left[\sum_{i=1}^{m} T_{z_i} - \sum_{i=1}^{n} T_{p_i} \right],\ a_{12} = K_f; \\ &\alpha = 1;\ a_{11} = K_f,\ a_{12} = 0; \\ &\alpha = 0;\ a_{11} = 0 \quad a_{12} = 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Se consideră extrapolatorul de ordinul zero, rezultînd modelul discret în domeniul z:

$$H_f(z) = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{H_f'(s)}{s} \right\}$$

sau

$$H_f(z) = a_{11} \frac{T}{z-1} + \frac{a_{12}}{2} T^2 \frac{z+1}{(z-1)^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{1 - d_i}{z - d_i}, \tag{4.39}$$

în care

$$d_i = e^{-\frac{T}{T_{p_i}}},\ i = \overline{1,\ n},$$

și

$$b_i = K_f \frac{(-T_{p_i})^{\alpha} \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{T_{z_j}}{T_{p_i}}\right)}{\prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} \left(1 - \frac{T_{p_l}}{T_{p_i}}\right)}. \tag{4.40}$$

În modelul discret (4.39) se efectuează transformarea omografică w din (4.1); deci, $z=\dfrac{1+w}{1-w}$, iar $w=\dfrac{T}{2}s$ din (4.23). În [2] se preferă însă variabila $\bar{s}=j\lambda$. Aşadar, în (4.39), z se substituie prin

$$z=\frac{1+\dfrac{T}{2}s}{1-\dfrac{T}{2}s}. \tag{4.41}$$

După substituire se obţine modelul discret în pseudofrecvenţe absolute:

$$H_f(\bar{s})=\left(1-\frac{T}{2}\bar{s}\right)\left(\frac{a_{11}}{\bar{s}}+\frac{a_{12}}{\bar{s}^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{1+\bar{s}\dfrac{T}{2}\operatorname{cth}\dfrac{T}{2T_{fi}}}\right). \tag{4.42}$$

În funcţie de apartenenţa constantelor T_{fi} la una din grupele **a** sau **c** din (4.36), se fac aproximările:

$$\begin{aligned}&\operatorname{cth}\frac{T}{2T_{fi}}\approx\frac{2T_{fi}}{T},\ \text{pentru } T_{fi} \text{ din grupa } \mathbf{a};\\ &\operatorname{cth}\frac{T}{2T_{fi}}\approx 1,\ \text{pentru } T_{fi} \text{ din grupa } \mathbf{c}.\end{aligned} \tag{4.43}$$

Atunci, modelul $H_f(\bar{s})$ din (4.42) se scrie într-o relaţie aditivă corespunzătoare celor trei modele, conform trihotomiei din (4.36), prin:

$$H_f(\bar{s})=\left(1-\frac{T}{2}\bar{s}\right)H_f^{IF}(\bar{s})+\left(1-\frac{T}{2}\bar{s}\right)H_f^{MF}(\bar{s})+\left(1-\frac{T}{2}\bar{s}\right)H_f^{\hat{I}F}(\bar{s}), \tag{4.44}$$

unde

$$H_f^{IF}(\bar{s})=H_f^{1,\,IF}(s)\big|_{s=\bar{s}}, \tag{4.45}$$

rezultat identic cu cel obţinut în § 4.3.

Detaliat, ţinîndu-se seama de aproximările (4.43), rezultă:

$$H_f^{IF}(\bar{s})=\frac{a_{11}}{\bar{s}}+\frac{a_{12}}{\bar{s}^2}+\sum_{i=1}^{l}\frac{b_i}{1+sT_{fi}}; \tag{4.46}$$

$$H_f^{MF}(\bar{s})=\sum_{i=l+1}^{l+r}\frac{b_i}{1+\bar{s}\dfrac{T}{2}\operatorname{cth}\dfrac{T}{2T_{fi}}}; \tag{4.47}$$

$$H_f^{\hat{I}F}(\bar{s})=\sum_{i=l+r+1}^{n}\frac{b_i}{1+\bar{s}\dfrac{T}{2}}. \tag{4.48}$$

OBSERVAȚII. Sînt considerate ordonate descrescător toate constantele de timp T_{p_i}, adică dacă $i<j$, rezultă $T_{p_i}>T_{p_j}$, pentru $(\forall)$ $i, j=\overline{1, n}$, $i \neq j$.

Modelul la ÎF din relațiile (4.48) și (4.44) are aspectul global:

$$H_f^{*,IF}(s) \triangleq \left(1-\frac{T}{2}s\right) \sum_{i=l+r'+1}^{n} \frac{b_i}{1+s\frac{T}{2}}. \tag{4.49}$$

Notîndu-se $c \triangleq \sum_{i=l+r'+1}^{n} b_i$, rezultă:

$$H_f^{*,IF}(s) = c\frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s} = cz^{-1}. \tag{4.50}$$

Așadar, constantele parazite introduc o întîrziere de o perioadă de eșantionare, asimilîndu-se ca un element de întîrziere.

În concluzie, se poate afirma că dihotomia scalei de timp real a procesului din §4.3, respectiv trihotomia din §4.4, determinate de valoarea perioadei de eșantionare T în raport cu toate constantele de timp ale părții fixate continue permit utilizarea eficientă a modelului discret la joasă frecvență obținut direct din cel continuu, dacă, din (4.16) și (4.36) se alege perioada de eșantionare:

$$T<\frac{1}{2}\min_i\{T_{p_i}\}, \tag{4.51}$$

în care $\min_i\{T_{p_i}\}$ este cea mai mică dintre constantele de timp principale ale părții fixate continue (modelul la JF).

O margine inferioară pentru alegerea lui T este dată de relația:

$$T>2T_\Sigma, \tag{4.52}$$

unde T este suma constantelor de timp parazite.

Dacă T_{p_x} din relația (4.31) este cea mai mare constantă de timp parazită, atunci perioada de eșantionare poate fi micșorată sub valoarea $2T_\Sigma$, cînd $T_{p_x}>\frac{1}{2}T_\Sigma$. În caz contrar, $T_{p_x}<\frac{1}{2}T_\Sigma$, iar modelul discret la IF nu va fi de faza minimă.

Reunindu-se restricțiile (4.51) și (4.52), rezultă plaja de valori recomandată pentru T,

$$2T_\Sigma<T<\frac{1}{2}\min_i\{T_{p_i}\}, \tag{4.53}$$

micșorarea ei făcîndu-se cu nerespectarea condiției (4.32).

Reducerea excesivă a perioadei de eșantionare pentru mărimile sistemice din proces generează [10] comenzi violente la ieșirea RD în momentul

comutării M/A sau la modificarea *(on-line)* în treaptă a mărimii de referință a buclei automate. În aceste condiții modelul discret la JF se obține direct din cel continuu, devenind, ulterior, modelul utilizat atît în analiza, cît și în sinteza discretă.

4.5. CAZUL GENERAL DE ANALIZĂ ÎN FRECVENȚĂ

În cazul general, modelul discret în domeniul z cu extrapolator de ordinul zero se obține din relația:

$$H_f(z) = (1 - z^{-1})\, \mathfrak{Z}\left\{\frac{H_f'(s)}{s}\right\}.$$

Apoi, se utilizează transformarea w din (4.1), $z = \dfrac{1 + w}{1 - w}$ și, în final, se obține modelul discret descris în domeniul pseudofrecvențelor relative, w:

$$H_f(w) = \frac{2w}{1 + w}\, \mathfrak{Z}\left\{\frac{H_f'(s)}{s}\right\}_{z = \frac{1+w}{1-w}}. \tag{4.54}$$

În expresia (4.54) se calculează întîi transformata $\mathfrak{Z}$, după care se aplică transformarea w.

Pentru modele $H_f'(s)$ cu multe constante de timp, calculele sînt laborioase. În final se obține $H_f(w)$. Din punct de vedere procedural, începînd cu această etapă, analiza și sinteza în pseudofrecvențe relative sînt identice cu cele din cazul continuu [3], [5], [6].

Se remarcă clar tendința de a utiliza fie direct modelul continuu, fie de a transfera metodele cazului continuu în contextul sistemelor discrete.

Aspectele concrete privind metodele de analiză tipice sînt detaliat descrise în [3].

Exemplu. Pentru un model sistemic continuu al părții fixate se obține — în scopul utilizării procedurilor de corecție în frecvență — modelul discret în pseudofrecvențe relative w, direct din modelul continuu la JF și indirect prin relația generală (4.54), examinîndu-se volumul calculelor și erorile de model introduse prin prima metodă.

Fie partea fixată continuă descrisă prin expresia:

$$H_f'(s) = \frac{1}{(1 + 10\,s)\,(1 + 0{,}1\,s)}, \tag{4.55}$$

unde $T_{f_1} = 10$ s este constanta de timp principală, iar $T_{f_2} = 0{,}1$ s, constanta de timp parazită.

Perioada de eșantionare, T, se alege conform prescripției generale (4.53), $T = 1$ s. Această valoare satisface inegalitățile $2 \cdot 0{,}1 < 1 < \dfrac{1}{2} \cdot 10$ din (4.53) și separă mulțimea constantelor de timp în două grupe:

a: (JF) $= T_{f_1}$; b: (IF) $= T_{f_2}$.

Pentru *obținerea directă* a modelului discret în pseudofrecvențe relative, w, funcția $H'_f(s)$ se scrie astfel:

$$H'_f(s) = \frac{100}{99} \cdot \frac{1}{1 + 10\,s} - \frac{1}{99}\,\frac{1}{1 + 0{,}1\,s} = H_f^{JF}(s) + H_f^{\hat{I}F}(s).$$

Utilizîndu-se extrapolatorul de ordinul zero, conform formulei generale din (4.44), și ținîndu-se seama de relația (4.45) și de transformarea (4.23), $\bar{s} = \frac{2}{T}\,w = 2w$, se obține direct modelul la JF, în pseudofrecvențe relative, necesar corecției în frecvență:

$$H_f(w) = (1 - w)\,H_f^{JF}(s)\Big|_{s=\bar{s}=2w} = (1 - w)\,H_f^{JF}(2w) = \frac{100}{99}\,\frac{1 - W}{1 + 20\,w}. \tag{4.56}$$

Folosindu-se *abordarea generală* din relația (4.54), rezultă $H_f(z) \triangleq (1 - z^{-1})\,\mathfrak{Z}\left\{\frac{H'_f(s)}{s}\right\}$, iar

$$\frac{H'_f(s)}{s} = \frac{1}{s(s + 0{,}1)\,(s + 10)} = \frac{1}{s} - \frac{100}{99}\,\frac{1}{s + 0{,}1} + \frac{1}{99}\,\frac{1}{s + 10}.$$

Aplicîndu-se transformata $\mathfrak{Z}$, se obține:

$$\mathfrak{Z}\left\{\frac{H'_f(s)}{s}\right\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{100}{99}\,\frac{1}{1 - z^{-1}\,e^{-0{,}1}} + \frac{1}{99}\,\frac{1}{1 - z^{-1}\,e^{-10}}, \tag{4.57}$$

unde $e^{-0{,}1} \approx 0{,}9048$, iar $e^{-10} \approx 4{,}54 \cdot 10^{-5} \approx 0$.

Rezultă:

$$H_f(z) = 1 - \frac{100}{99}\,\frac{1 - z^{-1}}{1 - 0{,}9048\,z^{-1}} + \frac{1 - z^{-1}}{99}. \tag{4.58}$$

Utilizîndu-se transformarea $z = \frac{1 + w}{1 - w}$, din expresia (4.58) se obține — după calcule destul de laborioase pentru acest model foarte simplu ales — modelul (cvasi) exact (s-a aproximat practic $e^{-10} \approx 0$) în pseudofrecvențe relative:

$$H_f(w) = H_f(z)\Big|_{z=\frac{1+w}{1+w}} = \frac{1 + 0{,}8088\,w}{1 + w}\,\frac{1 - w}{1 + 20{,}0084\,w} \tag{4.59}$$

sau, aproximînd la două zecimale exacte, prin rotunjire,

$$H_f(w) = \frac{1 + 0{,}81\,w}{1 + w}\,\frac{1 - w}{1 + 20\,w}. \tag{4.60}$$

Contribuția dipolului $\frac{1 + 0{,}81\,w}{1 + w}$ în planul caracteristicilor logaritmice de frecvență $\omega_w = Im\ w$ este neglijabilă.

Într-adevăr, la JF ($\omega_w \ll 1$) dipolul introduce o atenuare nulă, pînă la frecvența $\omega_w = 1$, și o atenuare constantă, de aproximativ — 1,85 dB, neglijabilă la frecvențe înalte.

În vecinătatea frecvenței de tăiere a caracteristicii $|H_f(j\omega_w)|^{[dB]}$, care este aproximativ $\omega'_w \simeq \frac{1}{20}$, dipolul introduce efecte neglijabile, căci $\frac{1}{20} \ll 1$ și atenuarea lui este nulă.

În consecință, neglijînd dipolul, deci cu $\frac{1 + 0{,}81\,w}{1 + w} \approx 1$, rezultă cu o aproximație suficientă în tehnicile de corecție pe caracteristici logaritmice de frecvență, modelul obținut direct din expresia (4.56).

4.6. EFECTE SISTEMICE NELINIARE INTRODUSE DE INTERFEȚELE DE INTRARE/IEȘIRE. ANALIZA ÎN FRECVENȚĂ

Principalele efecte neliniare sînt introduse de CAN din interfața de intrare și de CNA din interfața de ieșire a RD. De regulă, dimensiunea (în număr de biți):

$$n_{CAN} \geqslant n_{CNA} \tag{4.61}$$

Dacă se admit $n_{CAN} \geqslant n_{CNA}$ și $n_{CAN} \geqslant 12$, atunci neliniaritatea predominantă este introdusă de convertorul CNA.

Caracteristica de transfer a CNA (și CAN bineînțeles) se consideră statică (timpul de conversie A/N este incomparabil mai mic decît perioada de eșantionare), iar pasul de cuantificare al CNA este dat de relația:

$$\delta \triangleq \delta_{CNA} = \frac{A_{max}}{2^{n_{CNA}} - 1} \quad [V_{cc}/u.CNA] \tag{4.62}$$

unde A_{max} este valoarea maximă a mărimii analoge la ieșirea din CNA (tensiune de c.c).

În sinteza algoritmului de reglare, dependența statică intrare/ieșire a CNA luată în considerare în calculele de proiectare este asimilată cu dreapta desenată punctat în fig. 4.7, cu o pantă care intră în calculele coeficientului

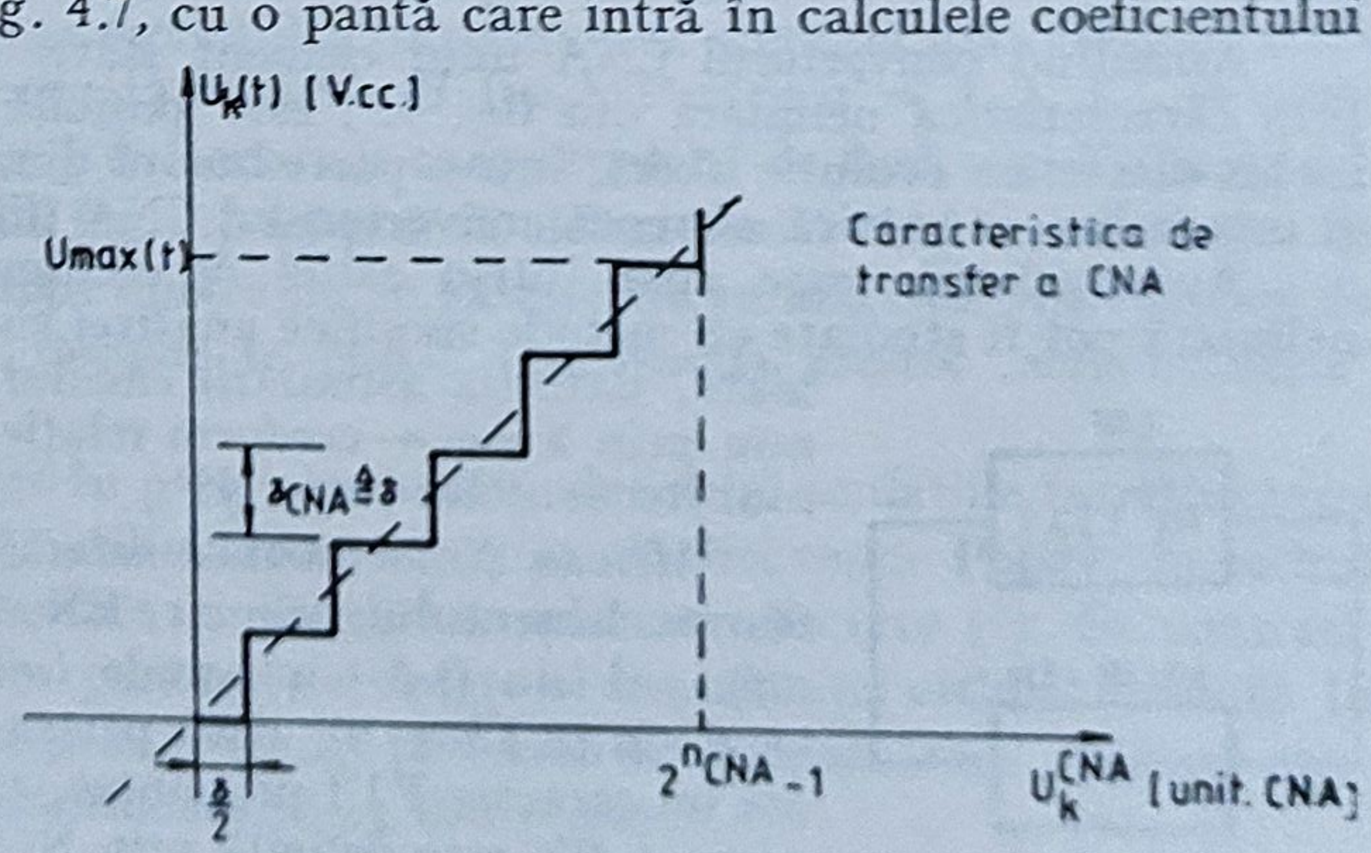


Fig. 4.7

static de transfer al interfeței de ieșire. Evident, această asimilare este o idealizare a situației reale din figură.

Fie u_k^{CNA} eșantionul binal al comenzii la momentul curent $t_k = kT$, introdus în intrarea CNA. Atunci, la ieșire rezultă comanda analogică cuantificată $u_k(t)$, multiplu întreg al pasului τ. Datorită caracteristicii reale, neliniare a CNA, în buclă închisă, pot apărea cicluri-limită (oscilații întreținute).

Frecvența regimurilor periodice este dependentă nemijlocit de frecvența cu care RD emite comenzile la ieșire, deci cu frecvența de eșantionare, $1/T$.

Aceste situații nedorite pot fi eliminate sau preîntîmpinate din faza de proiectare a RD, după sinteza algoritmilor de reglare, dacă se cunosc caracteristicile de frecvență ale părții fixate. Pentru RD dedicate reglării unor clase de procese, în funcție de aplicație, este necesară analiza unor posibile astfel de regimuri, analiza întreprinsă pentru un proces dat nefiind valabilă pentru altul.

De regulă, această analiză este dificilă în caz general; de aceea, în literatura de specialitate [1], [4], [9] ea se folosește doar în contextul în care perioada de eșantionare este suficient de mică pentru a nu introduce erori mari la obținerea directă a modelelor discrete din cele continue. În acest context, caracteristicile în pseudofrecvențe absolute, $\bar{s}$, sau relative, W, ale modelului discret la JF — $H_f(s)$, respectiv $H_f(w)$ — se obțin direct din modelul continuu la joasă frecvență, $H_f^{JF}(s)$. Modalitatea expusă este preferabilă îndeosebi la procesele continue, descrise prin multe constante de timp.

După sinteza algoritmului de reglare discret se cunoaște $H_R(z)$, și prin transformările omografice $z = \dfrac{1+w}{1-w}$ sau $z = \dfrac{1+\frac{T}{2}\bar{s}}{1-\frac{T}{2}\bar{s}}$ se obține $H_R(w)$ (în pseudofrecvențe relative, $\omega_w = \operatorname{Im} w^2$) ori $H_R(\bar{s})$ (în pseudofrecvențe absolute, $\lambda = \operatorname{Im} \bar{s}$).

Cunoscîndu-se așadar $H_f(\bar{s}) = H_f(j\lambda)$ și $H_R(j\lambda)$ se știe funcția de transfer discretă în pseudofrecvențe absolute a părții liniare a sistemului deschis:

$$H_L(j\lambda) \triangleq H_f(j\lambda)\, H_R(j\lambda). \tag{4.63}$$

Asimilînd convertorul CNA unui element static fără memorie, descris prin caracteristica neliniară din fig. 4.7, este posibilă separarea sistemului închis discret cu evoluție liberă, într-o parte liniară dinamică (stabilă), $H_L(j\lambda)$, și una neliniară statică aferentă convertorului CNA (fig. 4.8).

Autooscilațiile care apar într-o astfel de configurație sistemică global neliniară pot fi studiate cu metode specifice analizei sistemelor continue neliniare, datorită asimilării cazului discret cu cel continuu prin $\lambda \simeq \omega$ — conform relației (4.12) — , în domeniul frecvențelor joase, JF.

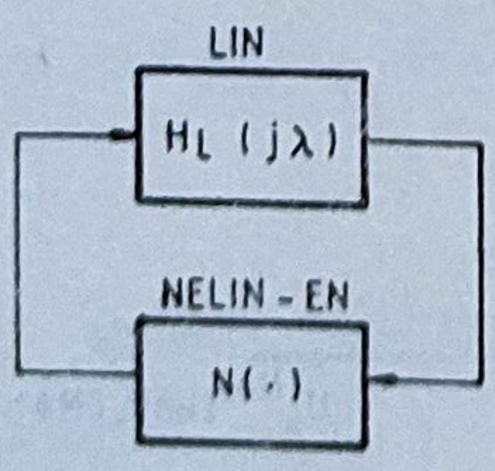


Fig. 4.8.

Metoda liniarizării armonice. Presupunînd la intrarea elementului neliniar, EN, o mărime sinusoidală $u(t) = A \sin(\lambda_s t + \varphi)$, unde $t = kT$, se obține $u_k = A \sin(\lambda_s Tk + \varphi)$, dacă partea liniară este stabilă și are un caracter FTJ pronunțat, atunci funcția de descriere a EN este definită prin $N(A, \varphi)$.

Conform [4], în sistemele discrete, funcția de descriere depinde și de faza semnalului de intrare.

Fie λ_s pseudofrecvența absolută proprie de oscilație la intrarea EN.

În domeniul JF, $\lambda \simeq \omega$. Atunci $\lambda_s = \omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$, iar în pseudofrecvențe relative $\omega_{w_s} = \lambda_s \dfrac{T}{2} = \pi \dfrac{T}{T_s}$.

Perioada autooscilațiilor (cînd apar) este întotdeauna un multiplu al perioadei de eșantionare, T [1]; deci,

$$\frac{T_s}{T} = n' \in \mathbb{N}. \tag{4.64}$$

Rezultă $T_s = n'T$ și pseudofrecvențele relative sau absolute de autooscilație devin:

$$\omega_{w_s} = \frac{\pi}{n'}, \quad \lambda_s = \frac{2}{T}\,\frac{\pi}{n'} = \omega_s, \tag{4.65}$$

Funcția de descriere, discretă, este dependentă și de numărul natural n', adică $N(A, \varphi, n')$.

În valorile $\lambda_s = \dfrac{2\pi}{n'T}$ din expresia (4.65) se studiază comportarea ecuației caracteristice a sistemului închis, din fig. 4.8, adică existența relației:

$$1 + N(A, \varphi, n')\, H_L(j\lambda_s) = 0, \tag{4.66}$$

pentru diferite valori ale lui n'.

Dacă funcția de descriere discretă, $N(\cdot)$, este relativ simplu de determinat, atunci pentru rădăcinile găsite analitic ale ecuației (4.66) se estimează stabilitatea tare sau slabă [11] a oscilațiilor întreținute, utilizîndu-se regula lui Loeb.

În general, însă, determinarea funcției de descriere (N $(\cdot)$ este dificilă și atunci, în [4], existența oscilațiilor întreținute se studiază folosindu-se caracteristicile în pseudofrecvență relativă, $H_L(j\omega_w)$. Pentru $n' = 1, 2, 3 \ldots$ se construiesc „zonele interzise" de acces ale caracteristicii de fază arg $H_L(j\omega_w)$.

Sistemul închis din fig. 4.8 nu posedă cicluri-limită cînd caracteristica de fază arg $H_L(j\omega_w)$ a părții liniare nu se găsește în vecinătatea frecvențelor de autooscilație posibile, definite în (4.65). Construcția acestor „zone interzise" este descrisă în [1].

În [4] sînt studiate în pseudofrecvențe relative și oscilațiile întreținute cu frecvențele din (4.56), utilizîndu-se criteriile de frecvență Popov, în cadrul teoriei stabilității absolute a sistemelor neliniare discrete [7]. Se constată aspectul favorabil, din punctul de vedere al inexistenței ciclurilor-limită în buclă închisă, obținut prin creșterea perioadei de eșantionare, T, și (sau) micșorarea pasului de cuantificare, δ_{CNA} din (4.62).

BIBLIOGRAFIE

1. Besekerskii, V. A.; Popov, E. P., *Teoria sistem avtomaticeskogo regulirovanie*, Nauka, Moskva, 1972

2. Şerban, S.; Corâci, I. C., *Frequency methods for discrete-time systems design*, 7th Internat. Conf. on Contr. Systems—SAII 7, I, Bucureşti, 1987, p. 236-240.

3. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eşantionare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

4. Davidoviciu, A.; Diatcu, E.; Freidzon, I. R.; Filippov, L. G., *Minicalculatoarele şi microcalculatoarele în conducerea proceselor industriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.

5. Linvill, W. K.; Sittler, R. W., *Extension of Conventional Techniques to the Design of Sampled-Data Systems*, I.R.E., Convention Record, part. 1., 1953, p. 99-104.

6. Schmidt, S. E., *Application of Continous System Design Concepts to the Design of Sampled-Data Systems*, Trans. A.I.E.E., part. 2, 1959, p. 74-79

7. Tipkin, I. Z., *Absolutnîi ustoicivosti polojenia ravnovenia i protessov v nelineinîh sistemah*, Avt. i telemeh, **24**, *12*, 1963

8. Sângeorzan, D. C., *Regulatoare digitale multifuncţionale*, Studiu I.P.A., 1987-1988.

9. Hanselmann, H., *Implementation of Digital Controllers — A Survey*, Automatica, **23**, *1*, 1987, p. 7-32

10. Călin, S.; Popescu, Th.; Jora, B.; Sima, V, *Conducerea adaptivă şi flexibilă a proceselor industriale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1988.

11. Voicu, M., *Tehnici de analiză a stabilităţii sistemelor automate*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1986.

Capitolul 5

CORECŢII ÎN PSEUDOFRECVENŢĂ RELATIVĂ, CU ALGORITMI *lead-lag* DISCREŢI

5.1. CONSIDERAŢII PRELIMINARE DE PROIECTARE

Prin folosirea transformărilor omografice w sau $\bar{s}$ asupra funcțiilor discrete de transfer ale părții fixate $H_f(z)$ se obține exprimarea acestora în domeniul pseudofrecvențelor relative, $\omega_w = \operatorname{Im} w$, sau al pseudofrecvențelor absolute, $\lambda = \operatorname{Im} \bar{s} : H_f(j\omega_w)$, respectiv $H_f(j\lambda)$.

Se presupune cunoașterea modelului continuu al părții fixate.

Utilizînd o perioadă de eșantionare, T, a SA aleasă după ordinul de mărime al constantelor de timp principale ale părții fixate continue conform relației (2.45), $T < \frac{1}{2} \min_i \{T_{fi}\}$, și considerînd că se folosește un extrapolator de ordinul zero, în ieșirea RD, rezultă direct modelul discret în pseudofrecvențe absolute, $\bar{s}$ (similar și în pseudofrecvențe relative w), la joasă frecvență, din modelul continuu la JF cu extrapolator de ordinul zero înglobat; așadar, $H_f^{JF}(\bar{s}) = \left(1 - \frac{T}{2}\bar{s}\right) H_f^{JF}(s)\Big|_{s=\bar{s}}$, conform relației (4.44), respectiv $H_f^{JF}(w) = (1-w)\, H_f^{JF}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}w}$, conform relației (4.23).

Modelul la ÎF nu interesează decît prin prisma efectelor pe care le poate introduce (faza neminimă, în funcție de perioada T, sau pol în $w = 0$ sau $s = 0$). Evident, această metodă folosește un model dinamic aproximativ al părții fixate, obținut direct din cel continuu.

Dacă se dorește modelul exact în variabilele w sau s, atunci — aplicîndu-se transformarea $\mathfrak{T}$ asupra modelului continuu $H_f'(s)$ cu extrapolator de ordinul zero înglobat conform relației (2.32) se obține $H_f(z)$, apoi — prin transformările $z = \frac{1+w}{1-w}$, respectiv $z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s}$ — rezultă $H_f(w)$ sau $H_f(s)$.

Această cale conduce la modele discrete exacte, dar — în cazul modelelor continue $H_f'(s)$, cu multe constante de timp — procedurile de calcul sînt complicate, ceea ce face ca precizia finală să nu difere mult de cazul anterior.

Metodele de compensare a caracteristicilor de pseudofrecvență $H_f(j\omega_w)$ sau $H_f(j\lambda)$ sînt principial identice cu cele din cazul continuu.

Algoritmii *lead-lag* (avans-întîrziere) din cazul discret provin din cei continui [6], descrişi prin:

$$\widetilde{H}_L(s) = \frac{1}{\beta}\,\frac{1+\beta T_L s}{1+T_L s}, \tag{5.1}$$

unde, pentru $\beta > 1$, elementul (5.1) este un avans de fază, iar pentru $\beta \in (0,1)$, cu întîrziere de fază.

5.2. ALGORITMUL *lead-lag* DISCRET CU AVANS DE FAZĂ

Acest algoritm este descris prin funcția de transfer discretă în pseudo-frecvențe relative w [1]:

$$H_L(w) = \frac{1}{\beta}\,\frac{1+\beta T_L w}{1+T_L w}, \quad T_L > 0,\ \beta > 1. \tag{5.2}$$

În planul w, polii și zerourile funcției $H_L(w)$ din relația (5.2) sînt:

$$p_w \triangleq -\frac{1}{T_L}, \quad z_w \triangleq -\frac{1}{\beta T_L}. \tag{5.3}$$

Prin transformarea inversă $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ aplicată în expresia (5.2) rezultă:

$$H_L(z) = \frac{1}{\beta}\,\frac{(1+\beta T_L)\,z + 1 - \beta T_L}{(1+T_L)\,z + 1 - T_L}, \tag{5.4}$$

cu polii și zerourile din planul z:

$$p_z \triangleq -\frac{1-T_L}{1+T_L}, \quad z_z \triangleq -\frac{1-\beta T_L}{1+\beta T_L}. \tag{5.5}$$

Pozițiile acestor poli-zerouri în planele w și z sînt ilustrate în fig. 5.1.

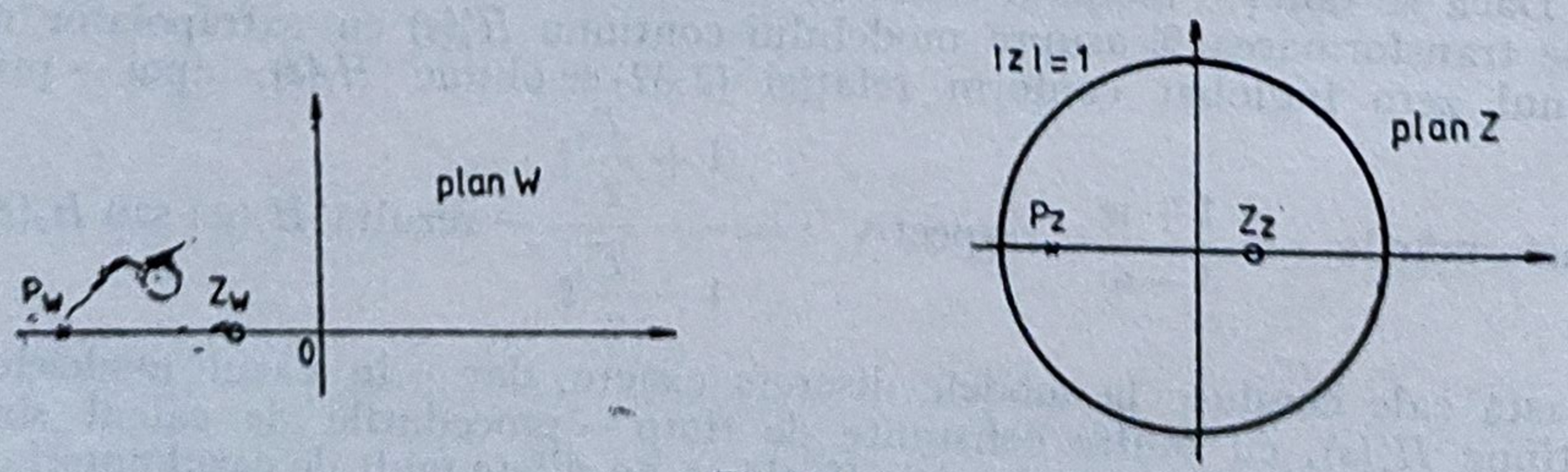


Fig. 5.1

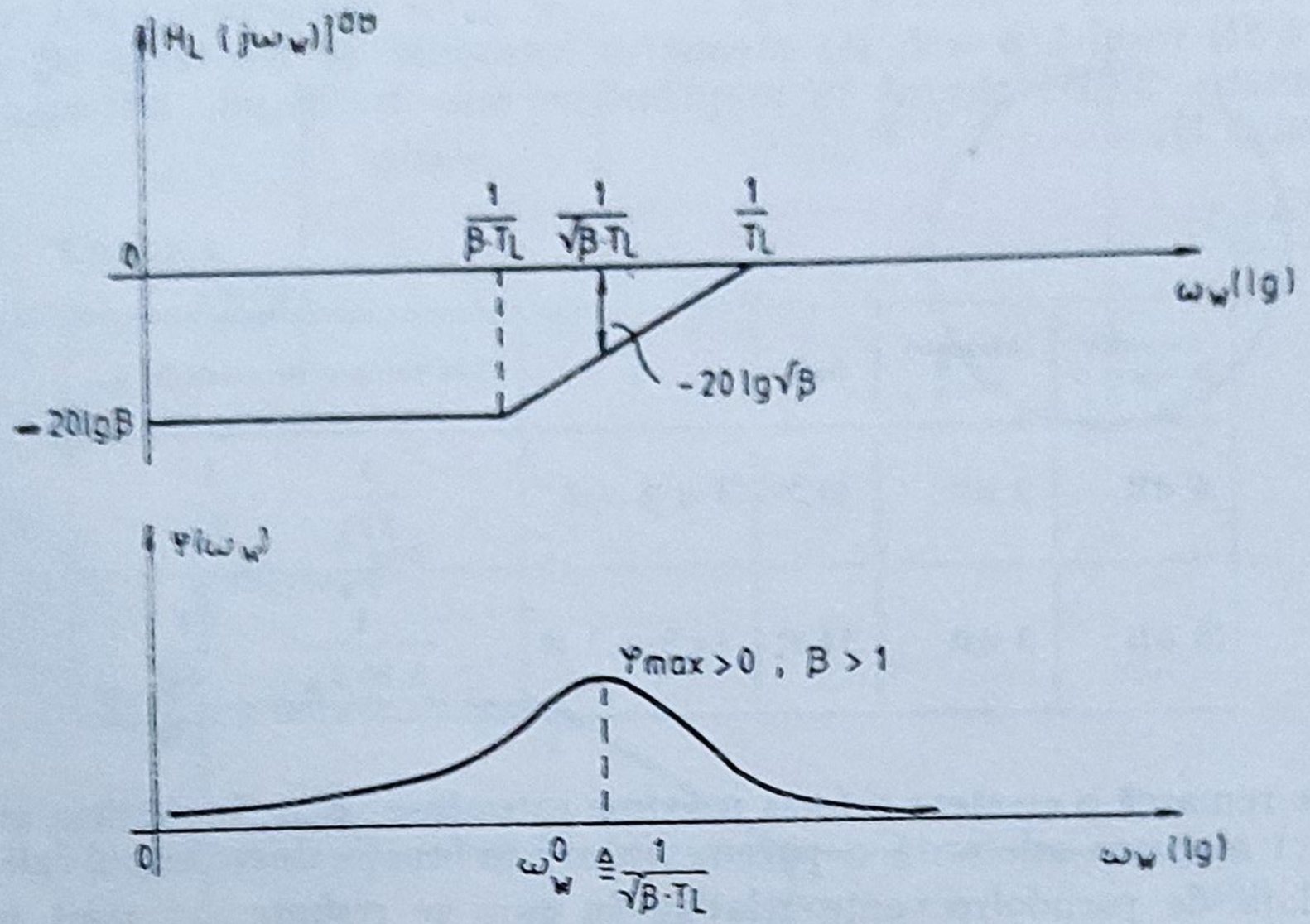


Fig. 5.2

Caracteristicile logaritmice de frecvență (ω_w) ale funcției $H_L(j\omega_w)$, cu avans de fază, sînt date în fig. 5.2.

Faza introdusă de $H_L(j\omega_w)$ este:

$$\varphi(\omega_w) = \operatorname{arc\,tg}(\omega_w \beta T_L) - \operatorname{arc\,tg}(\omega_w T_L) > 0,$$

cu un maxim la pseudofrecvența:

$$\omega_w^0 \triangleq \frac{1}{T_L\sqrt{\beta}}, \quad \varphi_{max} \triangleq \varphi(\omega_w^0) = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\beta} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{\beta}}. \tag{5.6}$$

Valoarea modulului $|H_L(j\omega_w)|^{[dB]}$, la pulsația ω_w^0, este aproximativ:

$$|H_L(j\omega_w^0)|^{[dB]} \simeq -20\lg\sqrt{\beta}. \tag{5.7}$$

Corecția cu avans de fază se introduce de regulă pentru a mări marginea de fază a părții fixate $H_f(j\omega_w)$ [1]. Efectul este maxim (favorabil) dacă valoarea ω_c^0 din (5.6) se alege apropiată de cea a frecvenței de tăiere, ω_w^t, a caracteristicii $H_f(j\omega_w)$ necompensată.

În consecință, se alege [3], [1]:

$$\omega_w^0 \simeq \omega_w^t \tag{5.8}$$

Efectul măririi marginii de fază a sistemului trebuie să fie neglijabil din punctul de vedere al caracteristicii de amplitudine.

La valoarea $\omega_w^0 \simeq \omega_w^t$, marginea de fază a sistemului $H_L(w)H_f(w)$ se mărește cu aproximativ φ_{max}, valoare dată în (5.6). La această frecvență (relativă) efectul în amplitudine este o atenuare de aproximativ $-20\lg\sqrt{\beta}$ dB.

Impunînd ca atenuarea finală, la $\omega_w \to 0$, să fie de exemplu egală cu maximum 6 dB rezultă $\beta = 2$, iar atenuarea introdusă la frecvența ω_w^0 este de aproximativ 3 dB; efectul în amplitudine este neglijabil, iar $\varphi_{max} \leqslant 19{,}5°$ (tabelul 5.1).

Tatlul 5.1

Atenuare la $w_w = 0$	Atenuare la ω_w^0	φ_{max}	β	Plaja efectu ui de avans (în w_w)
6 dB	3 dB	19,5°	$1 < \beta = 2$	$\frac{1}{2T_L} \cdots \frac{1}{T_L}$
10 dB	5 dB	31,3°	$1 < \beta = 3{,}16$	$\frac{1}{3{,}16\,T_L} \cdot \; \cdot \frac{1}{T_L}$

Se remarcă o creștere a fazei maxime introduse, φ_{max}, la mărirea atenuării, deci alegerea adecvată a parametrului β în funcție de contextul aplicației.

Plaja de pseudofrecvențe relative în care se resimte defazajul pozitiv este $\frac{1}{\beta T_L} \cdots \frac{1}{T_L}$.

Valorile celor doi parametri β și T_L se determină după următorul algoritm:

— se găsește valoarea maximă cerută în compensare, φ_{max}, astfel încît marginea de fază a sistemului compensat să fie în plaja de valori $m_\varphi = 30° \ldots 50°$, rezultînd β și atenuarea, la frecvența ω_w^0, din (5.7);

— cunoscînd pseudofrecvența relativă de tăiere a procesului, ω_w^t, se impune relația (5.8), de unde rezultă constanta adimensională T_L;

— dacă atenuarea introdusă de $H_L(j\omega_w)$, egală cu $-20 \lg \sqrt{\beta}$ dB, la frecvența ω_w^t înrăutățește sensibil marginea de amplitudine a sistemului, atunci se micșorează β, revenind la prima etapă a algoritmului.

Corecția cu avans de fază nu se indică în situațiile:

- $H_f(w)$ este instabilă sau ușor amortizată;
- $H_f(w)$ are o pereche de poli complex-conjugați situați în apropierea pulsației de tăiere ω_w^t;
- $H_f(w)$ are o pereche de poli foarte apropiați între ei și de pulsație de tăiere ω_w^t.

5.3. ALGORITMUL *lead-lag* DISCRET CU ÎNTÎRZIERE DE FAZĂ

Aspectul funcției de transfer în w este cel din relația (5.2), dar parametrii de proiectare, β și T_L, se aleg astfel încît

$$0 < \beta < 1, \quad T_L \gg 1. \tag{5.9}$$

Dacă în cazul precedent constanta T_L putea lua orice valoare (pozitivă), acum polul și zeroul se aleg astfel încît polul să fie mai mare decît zeroul atît în planul w, cît și în planul z (fig. 5.3).

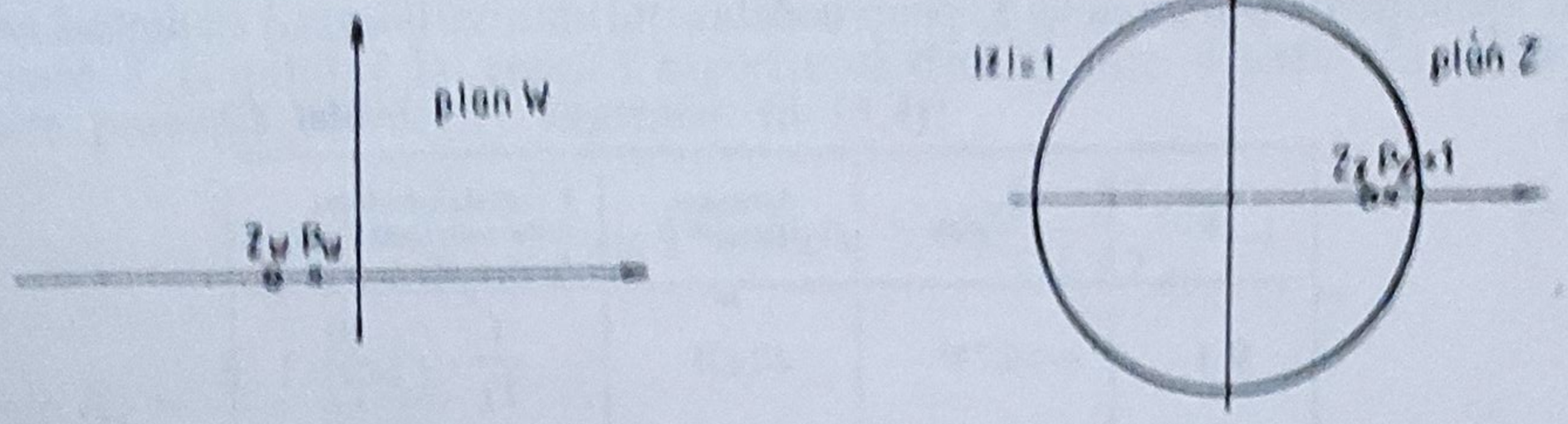


Fig. 5.3

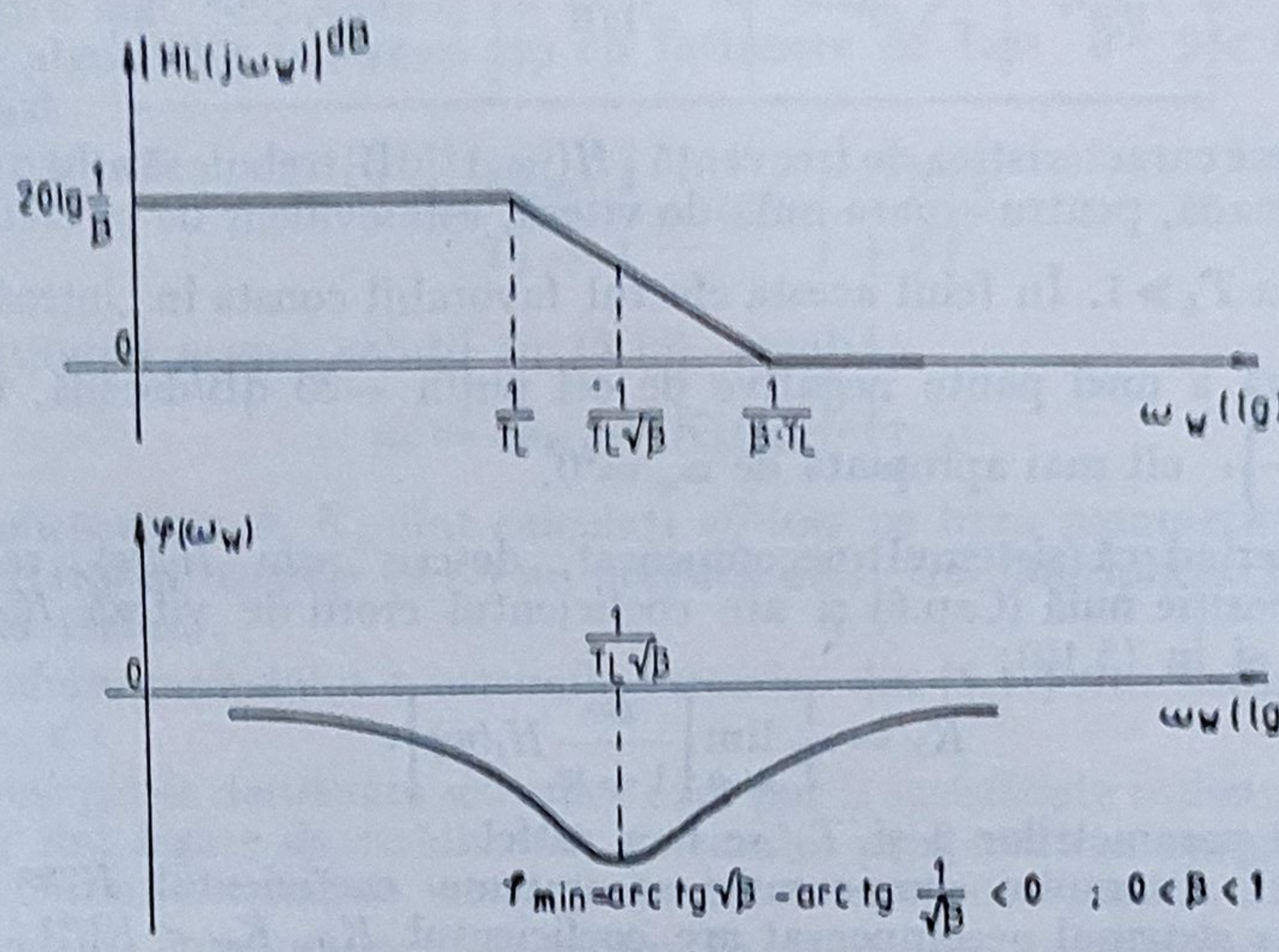


Fig. 5.4

Aspectul în z al funcției $H_L(w)$ este identic cu cel din relația (5.4). Caracteristicile logaritmice de frecvență (ω_w), ale funcției $H_L(j\omega_w)$ sînt date în fig. 5.4.

Faza $\varphi(\omega_w) = \arg H_L(j\omega_w) < 0$, cu un minim la frecvența ω_w^0 din (5.6). Valoarea $|H_L(j\omega_w^0)|$ [dB] este egală tot cu cea din (5.7).

Corecția cu întîrziere de fază, conform [1], se utilizează ca un mijloc de creștere a coeficientului erorii de viteză, K_v, definit prin

$$K_v^{comp} = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}[(z-1)H(z)] = \frac{1}{T}\lim_{w\to 0}\left[\frac{2w}{1-w}H(w)\right], \qquad (5.10)$$

unde $H(z)$ sau $H(w)$ este funcția de transfer discretă a sistemului discret deschis, descrisă în domeniul z sau w.

Pentru ca eroarea staționară de viteză, la mărime de referință tip rampă, să fie cît mai mică este necesar ca acest coeficient să fie cît mai mare (capitolul 6).

Conform fig. 5.3, poziția polului și zeroului, foarte apropiați între ei și de $z = +1$ în planul z, sau de $w = 0$ în planul w, sugerează exact configurația tipică a unui dipol de integrare. Orice altă configurație pol-zerou pentru acest tip de algoritm înrăutățește marginea de fază.

Din tabelul 5.2 se remarcă clar necesitatea alegerii parametrului β cît mai aproape de valoarea $+1$, pentru defazajul minim $(-\varphi_{max})$ să devină neglijabil.

Tabelul 5.2

β	$-\varphi_{max}$	Atenuare la $\omega_w = 0$	Plaja efectului de întîrziere (w_w)
0,1	$-66{,}74°$	20 dB	$\frac{1}{T_L} \cdots \frac{10}{T_L}$
0,9	$-3{,}02°$	$\simeq$ 1dB	$\frac{1}{T_L} \cdots \frac{1{,}1}{T_L}$

Deoarece caracteristica de frecvență $|H(j\omega_w)|$[dB] trebuie să aibă o pantă de -40 dB/decadă, pentru eroare nulă de viteză, este evident de ce trebuia ales $\frac{1}{T_L} \to 0$ sau $T_L \gg 1$. În felul acesta efectul favorabil consta în „introducerea" suplimentară a unei pante negative de cel puțin -20 dB/decadă, în plaja $\left(\frac{1}{T_L}, \frac{1}{\beta T_L}\right)$, cît mai apropiată de $\omega_w = 0$.

Considerînd că sistemul necompensat, descris prin $H_f(w)$, realizează eroare de poziție nulă (Cap.6) și are coeficientul erorii de viteză K_V definit similar ca și în (5.10):

$$K_V = \frac{1}{T} \lim_{w \to 0} \left[\frac{2w}{1-w} H_f(w) \right], \tag{5.11}$$

proiectarea parametrilor β și T_L se face astfel:

— dacă sistemului compensat i se impune coeficientul K_V^{comp} definit în (5.10) iar sistemul necompensat are coeficientul K_V, $K_V < K_V^{comp}$, atunci parametrul β se determină din condiția:

$$K_V^{comp} = \frac{K_V}{\beta}; \quad 0 < \beta < 1 \tag{5.12}$$

— Constanta T_L se alege din condiția:

$$\omega_w^0 \ll \omega_w^t \tag{5.13}$$

Observații privind compensarea cu avans sau întîrziere de fază

a. În cazul utilizării compensării cu avans de fază, pentru mărirea marginii de fază, fără modificarea coeficientului K_V din (5.11), $H_L(w)$ din (5.2) se modifică prin:

$$H_L(w) = \frac{1 + \beta T_L w}{1 + T_L w} \tag{5.14}$$

aspect care asigură condiția $\lim_{w \to} H_L(w) = 1$, caz în care și aspectul lui $H_L(z)$ din (5.4) se modifică corespunzător.

b. În unele cazuri compensarea cu întîrziere de fază se utilizează pentru deplasarea frecvenței de tăiere a amplificării la o valoare inferioară, unde marginea de fază are o valoare specificată. Chiar dacă defazajul negativ $(-\varphi_{max})$ poate fi mare (Tab.2), frecvența ω_w^0 trebuie aleasă conform condiției (5.13), de exemplu $\omega_w^t = 100\ \omega_w^0$.

5.4. FORMA REALĂ IMPLEMENTABILĂ A ALGORITMULUI

Asimilînd variabila z^{-1} cu operatorul de întîrziere cu o perioadă de eșantionare T (capitolul 2), rezultă algoritmul descris prin ecuația cu diferențe finite provenit din $H_L(z)$ exprimat în (5.4):

$$u_k = \frac{T_L - 1}{T_L + 1} u_{k-1} + K_L \varepsilon_k + K_L \frac{1 - \beta T_L}{1 + \beta T_L} \varepsilon_{k-1}, \tag{5.15}$$

unde $K_L = \frac{1}{\beta} \frac{1 + \beta T_L}{1 + T_L}$.

Pentru algoritmi *lead-lag* cu avans de fază, $\beta > 1$ și $K_L < 1$; în ceea ce privește algoritmii de același tip cu întîrziere de fază, $0 < \beta < 1$ și $K_L > 1$; se notează:

$$a \triangleq \frac{T_L - 1}{T_L + 1}, \quad b \triangleq \frac{1 - \beta T_L}{1 + \beta T_L} \tag{5.16}$$

și, substituind aceste notații în (5.15), rezultă:

$$u_k = a u_{k-1} + K_L(\varepsilon_k + b \varepsilon_{k-1}). \tag{5.17}$$

Coeficienții a, b, K_L sînt calculați *off-line* pe baza parametrilor β și T_L; deci, algoritmul recursiv (5.17) nu necesită decît trei multiplicări în timp real, în buclă închisă.

Conform capitolului 2, mărimile sistemice din (5.17) sînt normate: $|u_k| \leqslant \leqslant 1$; $|\varepsilon_k| \leqslant 1$.

Principalele deziderate sistemice care pot fi satisfăcute utilizînd algoritmi *lead-lag* sînt legate de stabilizarea sistemului prin mărirea marginii de fază sau a constantei erorii de viteză (micșorarea erorii de viteză).

Evident, folosindu-se compensări în frecvență cu algoritmi mult mai complicați se pot satisface și deziderate privind alți indici de calitate: suprareglaj mic, lărgime de bandă, eroare de poziție și viteză nulă, vîrf de rezonanță mic ș.a. Astfel de metode complexe utilizînd caracteristicile în pseudofrecvențe absolute $\bar{s}$ sînt descrise în [5].

O aplicație a acestui tip de algoritmi de reglare (compensare) o constituie automatizarea acționărilor electrice [4].

Exemple:

- *Mărimea marginii de fază a unui sistem în care se folosește algoritmul lead-lag cu avans de fază*. Fie partea fixată descrisă prin $H'_f(s) = \frac{1}{s(10\,s + 1)}$. Parametrul $T_f = 10$ s și se alege $T = 2$ s.

Modelul discret al părții fixate (cu extrapolator de ordinul zero) este:

$$H_f(w) = (1 - w)\, H'_f(s)\Big|_{s = \frac{2}{T} w} = \frac{1 - w}{w(10\,w + 1)}.$$

Datorită simplității modelului, se determină analitic valoarea exactă a frecvenței de tăiere ω'_w din $H_f(j\omega_w) = 1$, deci $\omega'_w = 0{,}316$.

La frecvența ω_w^t, faza $\varphi(\omega_w) = \arg H_f(j\omega_w) = -90° - \text{arc tg } \omega_w - \text{arc tg } 10\,\omega_w$ are valoarea $\varphi(\omega_w^t) \simeq -180°$; așadar, sistemul este la limită de stabilitate.

Utilizînd algoritmul *lead-lag* cu avans de fază, $H_L(w)$ din (5.2), se alege, conform tabelului 5.1, $\beta = 3{,}16$, valoare pentru care $\varphi_{max} = +31{,}3°$. După cum se observă din relația (5.8), pe baza condiției $\omega_w^0 = \dfrac{1}{T_L\sqrt{\beta}} = \omega_w^t$ rezultă $T_L = 1{,}78$.

Cu valorile $\beta = 3{,}16$ și $T_L = 1{,}78$, algoritmul discret *lead-lag* se implementează sub forma reală (5.17):

$$u_k = 0{,}2806\,u_{k-1} + 0{,}7541\,\varepsilon_k - 0{,}5264\,\varepsilon_{k-1}$$

și realizează pentru sistemul compensat în pseudofrecvențe relative, w, marginea de fază $m\varphi \simeq +30°$ (ținîndu-se seama că atenuarea introdusă de $H_L(j\omega_w)$ la frecvența $\omega_w^t = \omega_w^0$ este de aproximativ -5 dB, deci frecvența de tăiere a sistemului compensat se deplasează puțin spre stînga, avînd valoarea reală $\omega_{w,\,comp.}^t \leqslant \omega_w^t$).

• *Corecția cu algoritm lead-lag cu întîrziere de fază, pentru micșorarea erorii de viteză*. Se consideră modelul continuu la JF, $H_f'(s) = \dfrac{1}{s(2s+1)}$. Parametrul $T_f = 2\,s$ și se alege $T = 1$ s.

Modelul discret în pseudofrecvențe relative al părții fixate, cu extrapolator de ordinul zero, este:

$$H_f(w) = (1-w)\,H_f'(s)\Big|_{s=2w} = \frac{0{,}5(1-w)}{w(4w+1)}.$$

Coeficientul erorii de viteză al sistemului necompensat este:

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{w\to 0}\left[\frac{2w}{1-w}H_f(w)\right] = 1 \quad [s^{-1}].$$

Se dorește dublarea coeficientului, astfel încît sistemul compensat să aibă $K_v^{comp.} = 2$. Sistemul compensat $H(w) = H_L(w)\,H_f(w)$ are coeficientul erorii de viteză $K_v^{comp.} = \dfrac{K_v}{\beta} = \dfrac{1}{\beta} = 2$, ceea ce implică $\beta = 0{,}5$. Pentru $\beta = 0{,}5$, conform relației (5.6), faza negativă minimă introdusă la frecvența ω_w^0 este $-\varphi_{max} = -19{,}5°$. Amplificarea introdusă de $H_L(w)$ în regim staționar are valoarea $20\lg\beta^{-1} \simeq +6$ dB.

Frecvența de tăiere a sistemului necompensat calculată analitic pentru o precizie bună este $\omega_w^t \simeq 0{,}322$. Corespunzător acestei valori, faza sistemului necompensat este $\varphi(\omega_w^t) \simeq -160°$, obținîndu-se o margine de fază $m_\varphi \simeq +20°$C.

Dacă nu se dorește micșorarea marginii de fază a sistemului $H_f(w)$, se alege T_L din condiția (5.13), adică din $\omega_w^t = 100\,\omega_w^0$, de unde $T_L \simeq 439{,}19$. Se optează pentru $T_L = 400$, la care corespunde $\omega_w^0 = 3{,}5\cdot 10^{-3} \ll \omega_w^t$. La frecvența ω_w^0, sistemul necompensat avea valoarea fazei $\varphi(\omega_w^0) \simeq -91°$; ca urmare, faza negativă suplimentară introdusă de $H_L(w) = -19{,}5°$ nu influențează negativ marginea de fază, datorită condiției $\omega_w^0 \ll \omega_w^t$.

Algoritmul *lead-lag* se implementează sub forma din (5.17), dar precizia de reprezentare a coeficienților algoritmului trebuie crescută față de exemplul anterior pentru a atinge valoarea dorită $K_p^{comp.}$ cît mai exact:

$$u_k = 0{,}99501\, u_{k-1} + 1{,}00249\, \varepsilon_k - 0{,}99252\, \varepsilon_{k-1}.$$

Algoritmul realizează pentru sistemul compensat, în buclă închisă, o reducere la jumătate a erorii staționare la mărimi de referință tip rampă fără a afecta marginea de fază a sistemului necompensat (după cum rezultă din capitolul 6 și [1] eroarea staționară la referință-rampă $r(t) = Rt$ este $\varepsilon_{v\,st} = \frac{R}{K_v}\%$)

În ambele exemple, datorită simplității modelului $H_f(w)$, s-a preferat calculul direct și precis al valorilor ω_w^t și $\varphi(\omega_w^t)$. Pentru modele complicate se apelează inevitabil la caracteristicile logaritmice de frecvență $H_f(j\omega_w)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Kuo, B.C., *Sisteme automate cu eșantionare*, Editura Tehnică, București, 1967.
2. Linvill, W.K.; Sittler, R.W., *Extension of Conventional Techniques to the Design of Sampled-Data Systems*, IRE Convention Record, part. 1, 99, 1953.
3. Sângeorzan, D.C., *Regulatoare digitale multifuncționale*, Studiu I.P.A., 1987—1988.
4. Dumitrache, I.; Dumitriu, S.; Munteanu, F., *Algoritmi de reglare numerică a acționărilor de curent continuu*, Primul Simpozion Național de Teoria Sistemelor *1*, Craiova, 1980, p. 257—262.
5. Ionescu, V.; Șerban, S.; Corâci, I.C., *Continuous and discrete control systems synthesis. A unified approach*, 5th Internat. Conf. on Contr. — SAII — 5, *1*. București, 1983, p. 7—13.
6. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.

Capitolul 6

SINTEZĂ DISCRETĂ PRIN METODA POLI-ZEROURI. PROIECTARE ALGORITMIZATĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR

6.1. INTRODUCERE

Metoda poli-zerouri utilizată în sinteza sistemelor liniare continue [3], [4], [2] este frecvent folosită şi în cazul discret, datorită modului practic în care este abordată sinteza: se proiectează algoritmul de reglare pentru regimuri tranzitorii critice (standard-tipice, adică răspunsuri indiciale şi răspunsuri la impuls rampă), impunînd apriori prescripţii de proiectare acoperitoare, cu alte cuvinte valorile-limită ale indicilor de calitate.

Orice mărime de referinţă externă sau internă variabilă în timp poate fi aproximată pe porţiuni, prin segmente în treaptă şi rampă. Dacă sistemul automat are pentru fiecare astfel de referinţă (standardizată în teoria sistemelor) o comportare tranzitorie şi staţionară acceptabilă, atunci va avea o comportare bună şi la o mărime de referinţă arbitrar variabilă în timp, dar oricum mai lent variabilă decît mărimea reglată.

Pornind de la diversele prescripţii iniţiale de proiectare, sinteza are la bază, şi în cazul discret, o configuraţie de poli tipică: doi poli complex-conjugaţi, restul fiind situaţi fie foarte aproape de originea $z = 0$ a planului z, fie de cîte un zerou, formînd cu aceştia dipoli a căror contribuţie în cazul plasării lor în apropierea cercului unitar $|z| = 1$ este neglijabilă în regim tranzitoriu, dar favorabilă în regimuri staţionare (la referinţe tip rampă).

Manipulînd prin configuraţii poli-zerouri dorite un număr foarte redus de poli şi zerouri (maximum trei poli şi două zerouri) se pot realiza performanţe dinamice şi staţionare bune, în cazurile-limită (răspunsuri indiciale unitare), deci cu atît mai bune în situaţiile reale (uzuale) ale funcţionării proceselor.

Proiectarea este foarte elastică, întrucît aceleaşi „performanţe la limită" se obţin pentru o mulţime (teoretic infinită) de configuraţii poli-zerouri; totodată, proiectarea *off-line* a funcţiei de transfer dorite a sistemului închis discret se poate face algoritmizat, utilizînd rutine simple de proiectare automată.

Unele dificultăţi ale utilizării metodei se referă la următoarele aspecte:
— necesitatea identificării procesului şi obţinerii unui model liniar discret, de tipul funcţiei de transfer în z. Erorile de identificare, ca şi în cazul

metodei proiectării directe în timp, se resimt sensibil în performanțele algoritmilor de reglare proiectați;

— imposibilitatea aplicării metodei la procese cu modele neliniare, caracterizate prin parametri variabili în timp, în prezența unor perturbații exogene puternice. Sensibilitatea algoritmilor proiectați prin această metodă este similară cu cea a algoritmilor obținuți prin proiectarea directă în timp. Metoda este recomandată pentru cazul proceselor liniare, invariabile, puțin perturbate extern sau parametric și relativ ușor de identificat;

— dacă configurațiile poli-zerouri tipice nu permit atingerea performanțelor dorite (la care evident nu se poate renunța din motive tehnologice), atunci metoda devine practic inaplicabilă.

6.2. ALEGEREA FUNCȚIEI DE TRANSFER DISCRETE A SISTEMULUI ÎNCHIS

Funcția de transfer a sistemului închis discret se alege în raport de doi factori: aspectul funcției de transfer discrete a părții fixate și, respectiv, prescripțiile inițiale de proiectare [1].

6.2.1. Tipuri uzuale de modele discrete ale părții fixate, $H_f(z)$

Regulatoarele digitale de serie sînt utilizate îndeosebi în reglarea unor procese continue descrise prin una sau două constante de timp principale cu sau fără timp mort, conform relației:

$$H'_{f_1}(s) = \frac{K_f\, e^{-\tau s}}{1 + T_f s} \tag{6.1}$$

sau

$$H'_{f_2}(s) = \frac{K_f\, e^{-\tau s}}{(1 + T_{f_1} s)\,(1 + T_{f_2} s)}, \tag{6.2}$$

ce caracterizează în general procesele lente din industrie (care pot avea însă în unele cazuri și poli complex-conjugați).

În prezența extrapolatorului de ordinul zero la ieșirea RD, funcțiile de transfer discrete aferente modelelor (6.1) și (6.2) sînt:

$$H_{f1}(z) \triangleq (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{H'_{f_1}(s)}{s}\right\} = \frac{K_f(1-b)}{z-b}\, z^{-d}, \tag{6.3}$$

unde $d \triangleq \left[\frac{\tau}{T}\right] \in \mathbb{Z}^+$, T — perioada de eșantionare, d — timpul mort, în multiplii de T, $b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}$, și respectiv,

$$H_{f_2}(z) \triangleq (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{H_{f_2}(s)}{s}\right\} =$$

$$= K_f(1 + p'_2 b_2 - p'_1 b_1)\, \frac{z + \dfrac{p'_1 p'_2 + p'_1 b_2 - p'_2 b_1}{p'_2 b_2 - p'_1 b'_1 + 1}}{(z - p'_1)\,(z - p'_2)}, \tag{6.4}$$

în care

$$p_1' \triangleq e^{-\frac{T}{T_{f1}}}, \; p_2' \triangleq e^{-\frac{T}{T_{f2}}}, \; b_1 \triangleq \frac{T_{f1}}{T_{f1} - T_{f2}}, \quad b_2 \triangleq \frac{T_{f2}}{T_{f1} - T_{f2}}.$$

Pentru ambele modele discrete, (6.3) și (6.4), se constată un exces poli-zerouri:

$$(p - z)_{H_f(z)} \geqslant 1. \tag{6.5}$$

De remarcat că și pentru modele continue cu mai multe constante de timp excesul poli-zerouri nu depășește în general unitatea. Într-adevăr, fie

$$H_f'(s) = K_f \frac{\prod_{i=1}^{m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^{n} (s + p_i)}, \quad m < n.$$

Folosindu-se extrapolatorul de ordin zero, rezultă $H_f(z) = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z} \left\{ \frac{H_f'(s)}{s} \right\}$.

Din descompunerea raportului $\frac{H_f'(s)}{s}$ în funcții simple $\frac{H_f'(s)}{s} = \frac{A}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{s + p_i}$ și după aplicarea transformatei $\mathfrak{Z}$, se obține:

$$H_f(z) = A + (z - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z - b_i}, \quad b_i \triangleq e^{-p_i T}$$

sau

$$H_f(z) = A + (z - 1) \frac{R_{n-1}(z)}{P_n(z)},$$

unde $R_{n-1}(z)$ și $P_n(z)$ sînt polinoame rezultate după aducerea la același numitor. Deci,

$$H_f(z) = \frac{A P_n(z) + (z - 1) R_{n-1}(z)}{P_n(z)} \triangleq \frac{\widetilde{R}_n(z)}{P_n(z)}, \quad \partial \widetilde{R}_n(z) = \partial P_n(z) = n.$$

În cazul general, al modelelor continue cu poli reali, excesul poli-zerouri este:

$$(p - z)_{H_f(z)} \geqslant 0. \tag{6.6}$$

6.2.2. Tipuri de funcții de transfer dorite ale sistemului închis discret, $H_0(z)$

Principalii indici de calitate ai regimului tranzitoriu indicial se definesc în raport cu configurația poli-zerouri de bază:

$$H_0'(z) = K_0 \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - p_2)}, \quad p_2 = \bar{p}_1. \tag{6.7}$$

Prezența zeroului este deosebit de utilă în anumite situații practice, cînd partea fixată discretă (înglobînd extrapolatorul de ordin zero) poate avea zerouri instabile $|z_{f_i}| > 1$ sau stabile, dar negative, $z_{f_i} \in (-1, 0)$.

Deoarece

$$H_R(z) = \frac{1}{H_f(z)} \frac{H_0(z)}{1 - H_0(z)}, \tag{6.8}$$

rezultă că zerourile părții fixate devin poli ai regulatorului. În cazul unor zerouri critice (ca și cele de mai sus), se dorește proiectarea unui algoritm de reglare robust (la defectarea EE sau TR) și cu comenzi puțin oscilante.

Dacă partea fixată are un zerou instabil z_{f_1}, $|z_{f_1}| > 1$, sau stabil dar negativ, $z_{f_1} \in (-1, 0)$, atunci zeroul z_1 al funcției $H_0^{\text{I}}(z)$ din (6.7) se alege [1]:

$$z_1 = z_{f_1} \tag{6.9}$$

Dacă partea fixată discretă nu are zerouri critice, zeroul z_1 se poate alege arbitrar în intervalul $z_1 \in (-1, 1)$, fiind un parametru liber, de proiectare, prin care se poate optimiza configurația poli-zerouri, dintr-o mulțime admisibilă de configurații.

În cazul în care deși regimul tranzitoriu și staționar indicial are o calitate bună, dar cel staționar la mărimi de referință tip rampă nu este satisfăcător, în configurația din (6.7) se adaugă un dipol integrator în apropierea lui $z = +1$, din planul z, ce are ca efect micșorarea erorii staționare la semnal de referință tip rampă. Această configurație este sintetizată în următoarea funcție de transfer:

$$H_0^{\text{II}}(z) = K_0 \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \frac{z - z_i}{z - p_i}, \tag{6.10}$$

cu $1 > z_i > p_i > 0{,}9$.

Tot o îmbunătățire a regimului staționar la semnal de referință tip rampă se poate realiza și prin adăugarea unui zerou și a unui pol situat în apropierea originii. Această configurație este sintetizată în funcția de transfer:

$$H_0^{\text{III}}(z) = K_0 \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} \frac{z - z_2}{z - p_3}, \tag{6.11}$$

cu $z_2 > p_3$, $p_3 \gtrsim 0$.

Efectul introducerii dipolului integrator în (6.10) are caracter de compensare prin întîrziere de fază, iar cel al introducerii elementului similar în (6.11) este unul de compensare prin avans de fază.

Conform [1], compensarea cu avans de fază nu se preferă în sistemele cu eșantionare deoarece mărindu-se banda de trecere (prin micșorarea marginii de fază) sistemul automat devine și mai sensibil la zgomotul de ÎF, care oricum există în orice SA cu eșantionare. Din această cauză, configurația din (6.10) este preferată întotdeauna cînd se dorește îmbunătățirea unor indici ai regimului staționar la semnal de referință tip rampă.

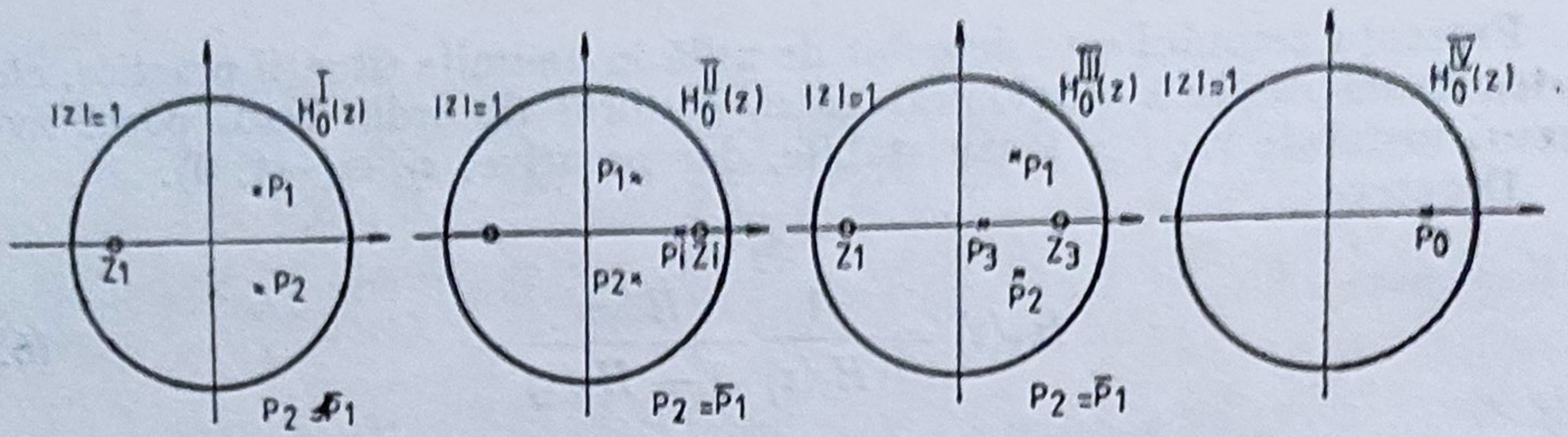


Fig. 6.1

Pentru procese aperiodice (de tipul $H_{f_1}(s)$, $H_{f_2}(s)$) se poate impune și o configurație cu un singur pol real, de forma:

$$H_0^{IV}(z) = \frac{K_0}{z - p_0}, \quad p_0 \in (0, 1). \tag{6.12}$$

Răspunsul indicial pentru acest tip de configurație este de tip aperiodic, avînd inconvenientul unei durate mai mari decît în cazul celorlalte configurații (6.7), (6.10), (6.11), care au un răspuns indicial oscilatoriu amortizat.

Cele patru configurații uzuale (6.7), (6.10), (6.11) și (6.12), în planul z, sînt ilustrate în fig. 6.1.

Se remarcă faptul că excesul poli-zerouri la toate configurațiile este:

$$(p - z)_{H_0(z)} \geqslant 1. \tag{6.13}$$

Din (6.8) cu (6.5), (6.6) și (6.13) rezultă că excesul poli-zerouri al funcției de transfer a RA, $H_R(z)$, este:

$$(p - z)_{H_R(z)} \geqslant 0, \tag{6.14}$$

deci $H_R(z)$ este cauzală la limită și în consecință, realizabilă fizic.

6.3. INDICI DE CALITATE AI REGIMURILOR STAȚIONARE STANDARD

În funcție de mărimea de referință, tip treaptă sau rampă, indicii de calitate se definesc în mod diferit.

Eroarea de poziție. Fie referința SA $r(t) = 1\eta(t)$, unde $\eta(t)$ este funcția lui Heaviside. Atunci,

$$R(z) = \mathcal{Z}\{r(t)\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}. \tag{6.15}$$

Pentru configurația definitorie a unui SA eroarea buclei închise este $\varepsilon(z) \triangleq (1 - H_0(z))\, R(z) = \dfrac{1}{1 + H(z)}\, R(z)$, dacă $H(z) \triangleq H_f(z)\, H_R(z)$ și $H_0(z) \triangleq \dfrac{H(z)}{1 + H(z)}$.

Corespunzător oricărui tip de referință, dacă sistemul închis este stabil, eroarea staționară se definește prin:

$$\varepsilon_{st} = \lim_{z \to 1}(1 - z^{-1})\,\varepsilon(z). \tag{6.16}$$

Pentru referința tip treaptă unitate, din (6.15) rezultă eroarea staționară:

$$\varepsilon_{poz_{st}} = \lim_{z \to 1}\left[(1 - z^{-1})\,\frac{1}{1 + H(z)}\,\frac{1}{1 - z^{-1}}\right] = \frac{1}{1 + \lim\limits_{z \to 1} H(z)}. \tag{6.17}$$

Se definește [1] coeficientul erorii de poziție:

$$K_p = \lim_{z \to 1} H(z); \tag{6.18}$$

atunci, eroarea de poziție este:

$$\varepsilon_{poz_{st}} = \frac{1}{1 + K_p}. \tag{6.19}$$

Deoarece algoritmul de reglare se proiectează întotdeauna astfel încît eroarea de poziție să fie nulă, rezultă condiția obligatorie pentru coeficientul erorii de poziție:

$$K_p = \lim_{z \to 1} H(z) = \infty. \tag{6.20}$$

Acest fapt este întotdeauna posibil dacă pe calea directă, $H(z)$, partea fixată, $H_f(z)$ sau $H_R(z)$, introduce cel puțin un pol în $z = +1$.

În mod practic, deoarece $H_0(z) = \dfrac{H(z)}{1 + H(z)}$ și $\lim\limits_{z \to 1} H_0(z) = \dfrac{K_p}{1 + K_p}$, iar $\varepsilon(z) = (1 - H_0(z))\,R(z)$, rezultă $\lim\limits_{z \to 1}(1 - z^{-1})\,R(z)\,(1 - H_0(z)) = \lim\limits_{z \to 1}(1 - H_0(z)) = 1 - H_0(1) = \varepsilon_{poz_{st}}$; deci, echivalent cu (6.19):

$$\varepsilon_{poz_{st}} = 1 - \lim_{z \to 1} H_0(z), \tag{6.21}$$

pentru mărimea de referință tip treaptă unitate.

Condiția $\varepsilon_{poz_{st}} = 0$ conduce la o altă exprimare a relației (6.20), și anume:

$$H_0(1) = 1. \tag{6.22}$$

Condiția de eroare de poziție nulă din (6.22) permite alegerea corespunzătoare a factorului K_0 din cele patru configurații uzuale:

— pentru $H_0^I(z)$ din (6.7) rezultă:

$$K_0^I = \frac{(1 - p_1)\,(1 - \bar{p}_1)}{1 - z_1}; \tag{6.23}$$

— pentru $H_0^{II}(z)$ din (6.10) se obține:

$$K_0^{II} = \frac{(1 - p_1)\,(1 - \bar{p}_1)}{1 - z_1}\,\frac{1 - p_i}{1 - z_i}; \tag{6.24}$$

— pentru $H_0^{III}(z)$ din (6.11) rezultă:

$$K_0^{III} = \frac{(1 - p_1)(1 - \bar{p}_1)}{1 - z_1} \frac{1 - p_3}{1 - z_2}; \tag{6.25}$$

— pentru $H_0^{IV}(z)$ din (6.12) se obține:

$$K_0^{IV} = 1 - p_0. \tag{6.26}$$

Eroarea de viteză. Pentru o mărime de referință tip rampă, $r(t) = Rt$, cu R panta rampei [%/s], rezultă:

$$R(z) = RT \frac{z}{(z-1)^2}, \tag{6.27}$$

unde T este perioada de eșantionare.

Dacă sistemul automat este stabil, conform relației generale (6.16), pentru $R(z)$ din (6.27), se obține eroarea de viteză:

$$\varepsilon_{v_{st}} = \lim_{z \to 1} \left[(1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + H(z)} \frac{RTz}{(z-1)^2} \right] =$$

$$= \lim_{z \to 1} \left[\frac{R}{\frac{z-1}{T} + \frac{z-1}{T} H(z)} \right],$$

sau

$$\varepsilon_{v_{st}} = \frac{R}{\frac{1}{T} \lim_{z \to 1} [(z-1)H(z)]}. \tag{6.28}$$

Coeficientul erorii de viteză, K_v, se definește prin:

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} [(z-1) H(z)], \ [s^{-1}]. \tag{6.29}$$

Eroarea de viteză, din (6.28), devine:

$$\varepsilon_{v_{st}} = \frac{R}{K_v} \quad [\%]. \tag{6.30}$$

Ea este nulă pentru $K_v = \infty$, situație în care $H(z)$ trebuie să aibă (cel puțin) un pol dublu în $z = 1$ (din (6.28)). Prezența unui pol dublu al funcției $H(z)$ conduce la instabilitate în buclă deschisă, situație inacceptabilă din punct de vedere practic. De aceea, de regulă, se preferă $\varepsilon_{v_{st}} \neq 0$. Se impune însă mărirea lui K_v, fără alterarea performanțelor răspunsului indicial; deci, $K_v < \infty$.

În [1], pentru $H_0(z)$ cu un număr arbitrar de poli și zerouri ($n > m$), coeficientul erorii de viteză se calculează cu relația

$$\frac{1}{K_v} = T \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - p_i} - \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{1 - z_i} \right). \tag{6.31}$$

6.4. DEPENDENȚA INDICILOR DE CALITATE AI RĂSPUNSULUI INDICIAL DE CONFIGURAȚIA POLI-ZEROURI DISCRETĂ

6.4.1. Ipoteze preliminare. Analogia cu cazul continuu

Se consideră configurația de bază descrisă în (6.7) prin

$$H_0(z) = K_0 \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)},$$

renunțîndu-se la indicele I.

Fie polii: $p_1 \stackrel{\Delta}{=} \rho e^{j\varphi}$, $p_2 \stackrel{\Delta}{=} \bar{p}_1$, (6.32)

unde

$$\rho \stackrel{\Delta}{=} |p_{1,2}| \in (0, 1), \pm \varphi \stackrel{\Delta}{=} \arg p_{1,2} \text{ și } j \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{-1}.$$

Se consideră modelul de bază al buclei închise utilizat în sinteza sistemelor continue:

$$H_0(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \tag{6.33}$$

în care ξ este factorul de amortizare, iar ω_n — pulsația naturală.

Pentru a folosi prin analogie directă dependențele explicite dintre indicii de calitate ai răspunsului indicial continuu, σ — suprareglajul, t_{max} — timpul de suprareglaj, t_r — durata regimului tranzitoriu ș.a., de polii sistemului închis, se consideră că performanțele răspunsului indicial al sistemului discret, $Y(z) = \frac{H_0(z)}{1 - z^{-1}}$, coincid cu performanțele răspunsului indicial continuu din (6.33), $Y(s) = \frac{H_0(s)}{s}$, iar eșantioanele răspunsului discret $y_k = \mathfrak{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ coincid cu valorile răspunsului continuu $y(t)$ în orice moment de eșantionare. Deci,

$$y_k = y(t)\Big|_{t=t_k \stackrel{\Delta}{=} kT}. \tag{6.34}$$

Dacă modelul continuu din (6.33) are polii:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}, \ \xi \in (0,1) \tag{6.35}$$

și legătura dintre variabilele complexe ale celor transformate este, prin definiție, $z \stackrel{\Delta}{=} e^{Ts}$, atunci se consideră următoarea dependență dintre $p_{1,2}$ din (6.32) și $s_{1,2}$ din (6.35):

$$p_{1,2} = e^{Ts_{1,2}}, \ |p_{1,2}| = \rho = e^{-\xi\omega_n T};$$

$$\arg p_{1,2} = \pm\varphi, \ \varphi = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}T. \tag{6.36}$$

Răspunsul indicial discret al modelului (6.7) este:

$$Y(z) = \frac{H_0(z)}{1 - z^{-1}} = K_0 \frac{z(z - z_1)}{(z - 1)(z - p_1)(z - \bar{p}_1)}. \tag{6.37}$$

Eșantioanele reale $y_k = \mathfrak{Z}^{-1}\{Y(z)\}$ sînt date de:

$$y_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} Y(z)\, z^{k-1}\, dz, \tag{6.38}$$

dacă sistemul închis, $H_0(z)$, este stabil.

Conform [1], dacă polii $p_{1,2}$ au aspectul din (6.36), atunci y_k este dat de relația:

$$y_k = 1 + 2\left|\frac{K_0(p_1 - z_1)}{(p_1 - 1)(\bar{p}_1 - 1)}\right| \rho^k \cos(k\varphi + \beta), \tag{6.39}$$

unde

$$\beta = \pm\alpha - \pi, \tag{6.40}$$

iar α este un unghi dependent de configurația poli-zerouri, ce va fi definit ulterior.

Din [1] rezultă:

$$\left|\frac{K_0(p_1 - z_1)}{(p_1 - 1)(\bar{p}_1 - 1)}\right| = \frac{1}{2}|\sec\alpha|. \tag{6.41}$$

În acest caz răspunsul discret (real) y_k, din (6.39), are expresia:

$$y_k = 1 + |\sec\alpha|\,\rho^k \cos(k\varphi \pm \alpha - \pi). \tag{6.42}$$

Cu ipoteza (6.34) îndeplinită și cu relația (6.36) rezultă că răspunsul continuu $y(t)$ are, la momentele de timp $t = kT$, exact valorile y_k din (6.42) și poate fi asimilat prin

$$y(t) = 1 + |\sec\alpha|\, e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}t \pm \alpha - \pi). \tag{6.43}$$

OBSERVAȚIE. Pentru un semnal eșantionat $\{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ există o infinitate de funcții continue $v(t)$, care — discretizate — să conducă la $v^*(kT) = v_k$.

Teorema WKS garantează biunivocitatea $\{v_k\} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\leftrightarrows} v(t)$ numai în cazul semnalelor $v(t)$ de bandă finită, $\omega_c < \infty$, și eșantionate cu o perioadă $T \leqslant \frac{2}{\omega_c}$, situație ideală în industrie.

Răspunsul indicial $y(t)$ din (6.43) are aspectul tipic din fig. 6.2.

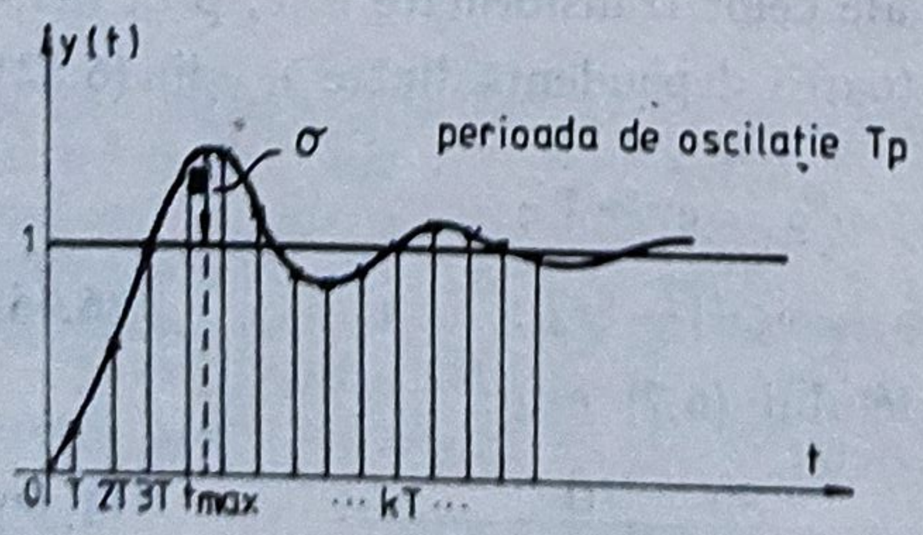


Fig. 6.2

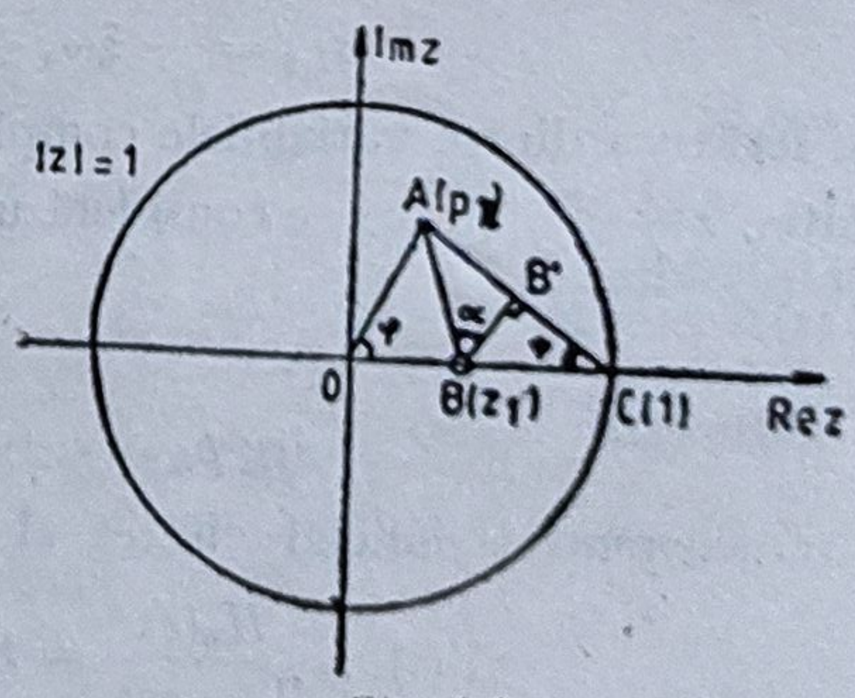


Fig. 6.3

6.4.2. Definirea unghiului α, tipic configurației $H_0(z)$

Se consideră configurația de bază din (6.7), zeroul z_1 putînd fi ales pozitiv $z_1 \in (0, 1)$ sau negativ $z_1 \in (-1,0)$.

Unghiul α exprimă dependența, în cadrul configurației poli-zerouri din (6.7), dintre poziția zeroului și poziția polilor $p_{1,2}$ din planul z în cele două cazuri.

Cazul 1. $\alpha > 0$, $z_1 \in (0,1)$ (fig. 6.3)

Se consideră, în planul z, punctele de afixe (fig. 6.3), $A(p_1)$, $C(1)$, $B(z_1)$, și fie B' piciorul înălțimii duse din punctul B pe dreapta AC, adică $BB' \perp AC$. Atunci,

$$\alpha \stackrel{\Delta}{=} A\hat{B}B' = \arg(p_1 - z_1) - \arg(p_1 - 1) + \frac{\pi}{2}. \tag{6.44}$$

Cazul 2. $\alpha < 0$, $z_1 \in (-1,0)$ (fig. 6.4)

Punctele A, B, C au aceeași semnificație ca și în cazul anterior, $\alpha > 0$, dar piciorul înălțimii duse din punctul B pe dreapta AC este în exteriorul segmentului AC. Atunci,

$$-\alpha \stackrel{\Delta}{=} B'\hat{B}A = -\arg(p_1 - z_1) + \arg(p_1 - 1) - \frac{\pi}{2}, \tag{6.45}$$

unde $z_1 = -z_1'$, cu $z_1' > 0$, deci la numărătorul lui $H_0(z)$ apare termenul $z + z_1'$.

6.4.3. Indici de calitate ai răspunsului indicial continuu (6.43)

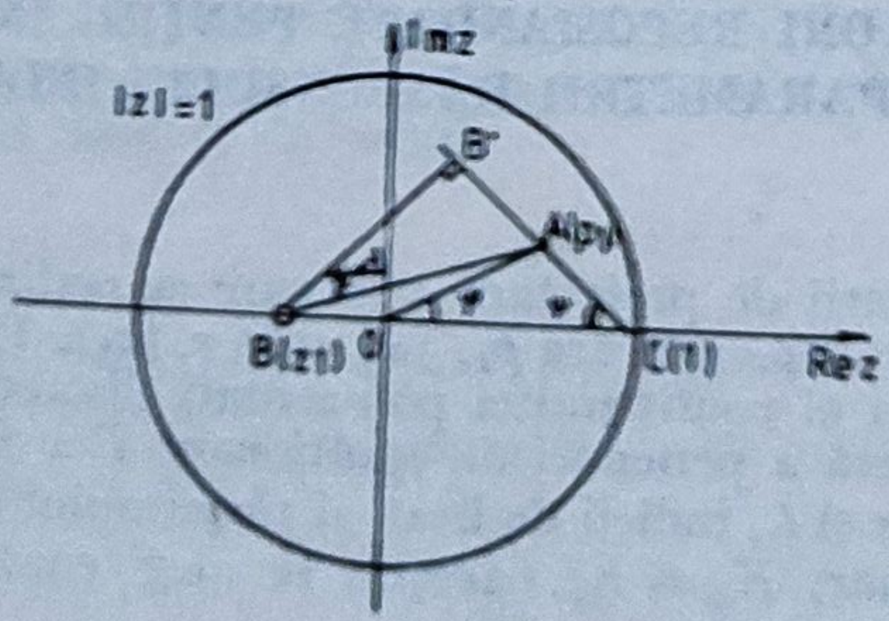
Indicii principali de calitate ai regimului tranzitoriu indicial, conform [2], [1], sînt suprareglajul, σ, și durata regimului tranzitoriu, t_r.

Suprareglajul răspunsului indicial, continuu, din (6.43), se obține din condiția $\frac{dy}{dt} = 0$, cu ajutorul mărimilor t_{max} și $y(t_{max})$:

$$t_{max} = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \mp \alpha + \pi \right), \tag{6.46}$$

rezultă suprareglajul $\sigma \stackrel{\Delta}{=} y(t_{max}) - 1$, unde 1 este amplitudinea-unitate a referinței normate, adică

$$\sigma = \sqrt{1-\xi^2}\,|\sec\alpha|\, e^{\left[-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \mp \alpha + \pi\right)\right]}. \tag{6.47}$$



$z_1 = -z_1'$; $z_1' > 0$

Fig. 6.4

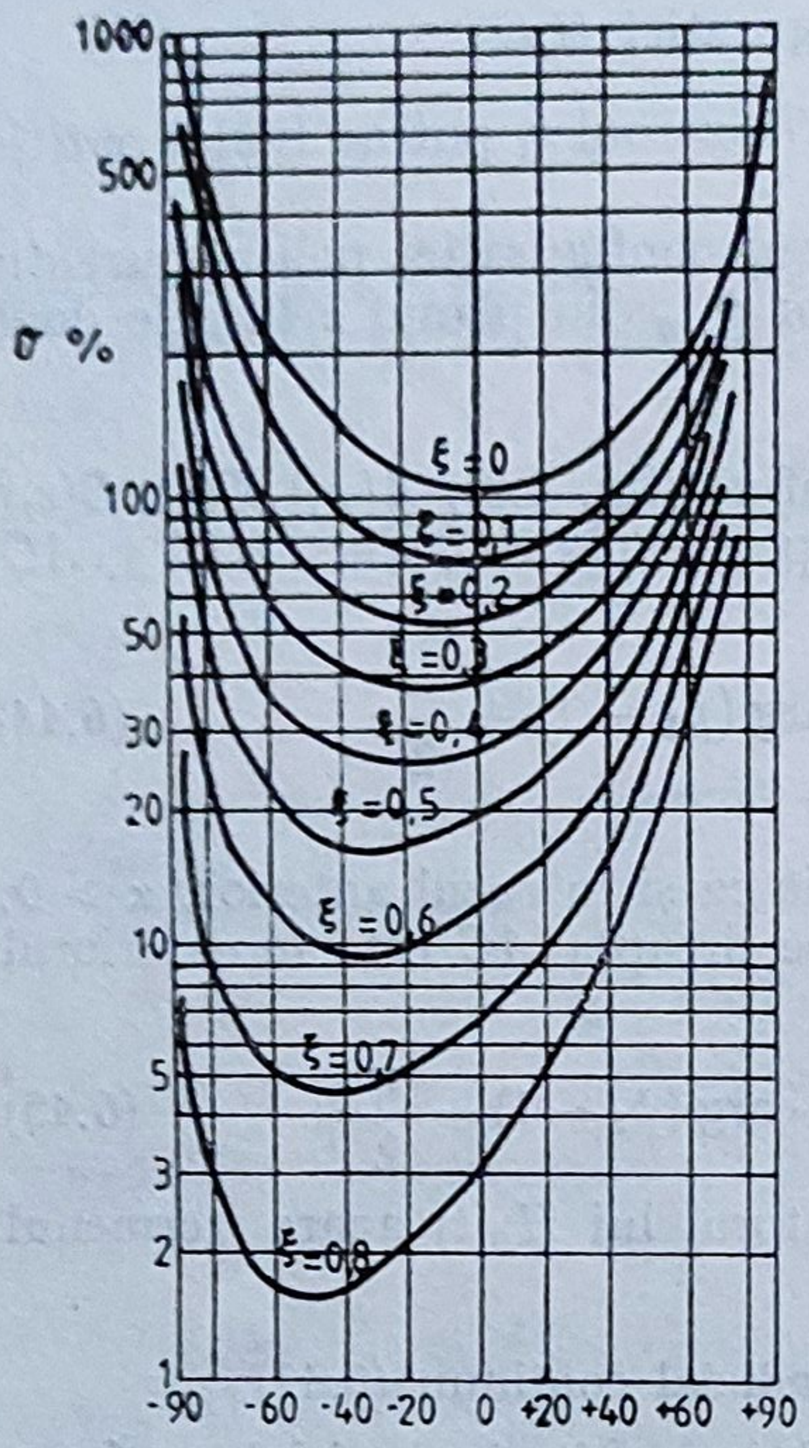


Fig. 6.5

De remarcat că probabilitatea ca răspunsul maxim continuu, y_{max}, atins la momentul t_{max} din (6.46), $t_{max} \stackrel{\Delta}{=} k'T$, să coincidă cu răspunsul maxim discret din (6.39), $y_{k\,max}$, este mică, adică $k' \neq k_{max}$ în general, pentru perioade T mari.

OBSERVAȚIE. Relația (6.47), privită ca relație de tip $\sigma = \sigma_\xi(\alpha)$, deci reflectînd dependența suprareglajului de unghiul α, parametrizată cu factorul de amortizare ξ, este ilustrată grafic, pentru unghiuri α negative, în fig. 6.5.

Durata regimului tranzitoriu t_r, a răspunsului continuu din (6.43) se obține din condiția:

$$|\varepsilon(t_r)| = |1 - y(t_r)| = 0{,}05, \quad (6.48)$$

unde $\varepsilon(t_r)$ este eroarea buclei închise (continue). Această condiție conduce la relația:

$$t_r = \frac{1}{\xi\omega_n} \ln \frac{|\sec \alpha|}{0{,}05}. \quad (6.49)$$

Conform [2], pentru unghiuri α alese în plaja de valori:

$$|\alpha| < 70°, \quad (6.50)$$

relația (6.49) poate fi aproximată printr-o expresie acoperitoare pentru t_r, adică

$$t_r \simeq \frac{4}{\xi\omega_n}. \quad (6.51)$$

6.5. DOMENII DE VALORI RECOMANDATE PENTRU INDICII DE CALITATE ȘI PARAMETRII RĂSPUNSULUI INDICIAL DISCRET

În cazul discret parametrii de proiectare prin care se realizează indicii de calitate doriți sînt: $|p_{1,2}| = \rho$, $\varphi = \arg p_1$, $|\alpha|$, sign α, $|z_1|$. Prin alegerea adecvată a acestor parametri ai configurației poli-zerouri discrete din (6.7), conjugată cu alegerea adecvată a perioadei de eșantionare T a SA, se realizează valorile dorite pentru σ și t_r, indicii de bază ai răspunsului indicial discret. Pentru regimul staționar, $K_0 = K_0^1$, aceștia se aleg conform (6.23), conducînd la eroare de poziție nulă.

Domenii de valori recomandate pentru polii $p_{1,2}$. Conform [2], [1], pentru $\varphi = \arg p_1$ definită în (6.32) și cu aspectul din (6.36) se recomandă sectorul ⊛:

$$\frac{\pi}{10} \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{5}, \tag{6.52}$$

conform fig. 6.6.

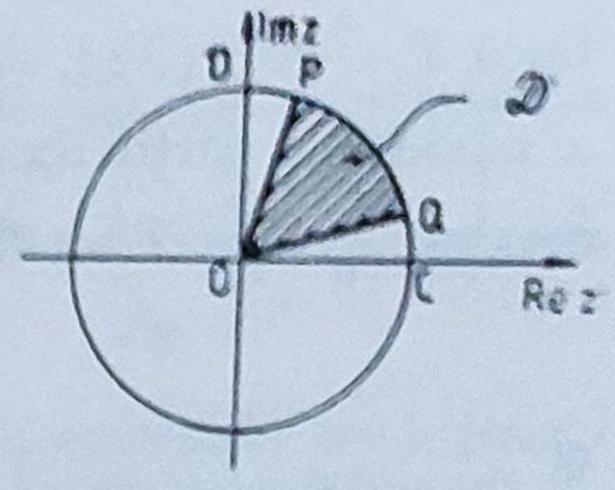


Fig. 6.6

Pentru valori φ aparținînd sectorului $\widehat{QOC}$, factorul de amortizare ξ este apropiat de 1, sistemul închis devenind prea lent ($\omega_{BANDĂ}$ scade).

Pentru valori φ din sectorul $\widehat{DOP}$, factorul de amortizare ξ este prea mic și oscilațiile „proprii" de perioadă $T_p \triangleq \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$ se amortizează prea încet ($\omega_{BANDĂ}$ crește), pulsația proprie este $\omega_p \triangleq \frac{2\pi}{T_p}$, $\omega_p \triangleq \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, unde ω_n reprezintă pulsația naturală.

Pentru valori $\varphi > \frac{\pi}{2}$ sau $\omega_p T > \frac{\pi}{2}$ ori $2\pi\frac{T}{T_p} > \frac{\pi}{2}$ rezultă $T \geqslant \frac{T_p}{4}$, valoare excesiv de mare, ținînd seama că în [2] se recomandă $T = \left(\frac{1}{10}\cdots\frac{1}{5}\right)T_p$.

De altfel, în [7] se arată că pentru valori prea mari ale lui T se ajunge la eroarea de aliasing (oscilații ascunse).

Conform [6] pentru modulul $\rho \triangleq |p_{1,2}|$ se recomandă domeniul:

$$1 > |p_{1,2}| = \rho \geqslant 0{,}1353. \tag{6.53}$$

Domenii de valori admisibile pentru T *și* t_r. Din (6.36) și (6.53) rezultă $\xi\omega_n T \leqslant \ln 0{,}1353^{-1}$; dar din (6.51), $\xi\omega_n \simeq \frac{4}{t_r}$, deci $\frac{4T}{t_r} \leqslant \ln 0{,}1353^{-1}$, de unde se obține o primă restricție pentru T:

$$T \leqslant \frac{\ln 0{,}1353^{-1}}{4} t_r. \tag{6.54}$$

Deoarece, după cum rezultă din (6.36), faza polilor este $\varphi = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,T$, iar pulsația proprie de oscilație a răspunsului din fig. 6.2 este $\omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2}$, faza φ este dată și de relația:

$$\varphi = 2\pi\frac{T}{T_p}. \tag{6.55}$$

Pentru faza φ, aleasă în sectorul definit în (6.52), rezultă $\frac{\pi}{10} \leqslant 2\pi\frac{T}{T_p} \leqslant \frac{2\pi}{5}$, care conduce la alte restricții pentru T:

$$\frac{T_p}{20} \leqslant T \leqslant \frac{T_p}{5}. \tag{6.56}$$

Dacă $T_f \triangleq \min\{T_{f_i}\}$, deci T_f este cea mai mică constantă de timp dominantă a modelului părții fixate continue, atunci conform relației (6.45) valoarea maximă pentru T va fi $\frac{1}{2} T_f$; așadar,

$$T_f = \lambda' T, \ \lambda' \geqslant 2, \tag{6.57}$$

și

$$t_r = \lambda'' T_f, \quad 0 < \lambda'' \leqslant 3$$

sau

$$t_r = \lambda' \lambda'' T \triangleq \gamma T. \tag{6.58}$$

Din (6.54) rezultă:

$$\gamma \geqslant \frac{4}{\ln 0{,}1353^{-1}}. \tag{6.59}$$

Totodată, $\rho = e^{-\xi\omega_n T} \simeq e^{-\frac{4T}{t_r}}$; deci,

$$|\hat{p}_{1,2}| = \rho \simeq e^{-\frac{4}{\gamma}}. \tag{6.60}$$

Din expresia (6.59) se obține o valoare minimă pentru durata regimului tranzitoriu t_r, funcție de numărul perioadelor de eșantionare, T; deci, o valoare minimă întreagă pentru γ:

$$\gamma \triangleq \frac{t_r}{T} \geqslant 2, \ t_r \geqslant 2T, \ \gamma \in \mathbb{N}. \tag{6.61}$$

Legătura dintre faza φ și valoarea γ a duratei t_r (în multipli întregi de perioade de eșantionare T) este dată de relația:

$$\varphi = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} T = \frac{\omega_n \xi}{\xi} T \sqrt{1-\xi^2} = \omega_n \xi T \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} = \frac{4T}{t_r} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}.$$

În final,

$$\varphi = \frac{4}{\gamma} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}. \tag{6.62}$$

Sintetizînd relațiile din acest paragraf, se obține:

$$\begin{cases} t_r = \gamma T, \ \gamma \in \mathbb{N}, \\ \rho = |\hat{p}_{1,2}| = e^{-\frac{4}{\gamma}}, \\ \varphi = \arg \hat{p}_{1,2} = \frac{4}{\gamma} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}, \end{cases} \tag{6.63}$$

cu domeniile admisibile:

$$\rho \geqslant 0{,}1353, \ \frac{\pi}{10} \leqslant \varphi \leqslant \frac{2\pi}{5}, \ \gamma \geqslant 2, \ \frac{T_p}{20} \leqslant T \leqslant \frac{T_p}{5}.$$

OBSERVAȚIE. Modulul $\rho = \rho(\gamma)$ este o funcție monoton crescătoare de parametru γ. Pentru $\gamma \to 0$, $\rho \to 0$, deci cu cît polii sînt mai apropiați de originea $z = 0$, cu atît răspunsul devine mai rapid ($t_r = \gamma T \to 0$). Restricția din (6.61), echivalentă cu cea din (6.53), reflectă durata minimă a regimului tranzitoriu în număr întreg de perioade T. Cazul-limită este $\gamma = 2$, cînd $t_r = 2T$. Un astfel de răspuns oscilatoriu amortizat are aspectul din fig. 6.7. Se observă că există un timp de creștere foarte mare/perioada T, care este considerat cel mai rapid răspuns acceptat.

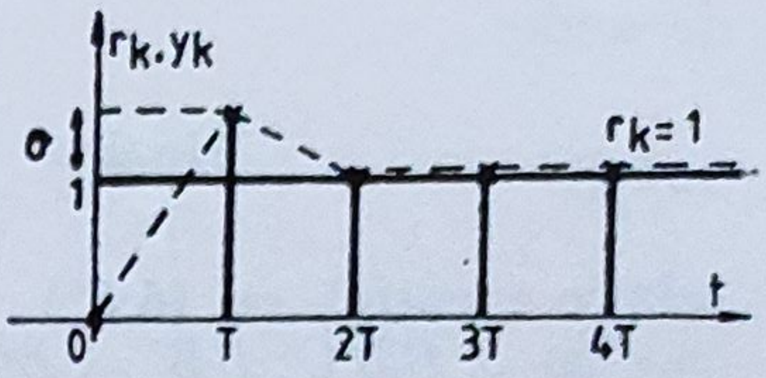


Fig. 6.7

6.6. DETERMINAREA VALORII ABSOLUTE A ZEROULUI Z_1

• *Cazul* $\alpha < 0$. Conform fig. 6.4, $\alpha' = |-\alpha| = \widehat{B'BA}$ și $|z_1| \stackrel{\Delta}{=} x \in (0,1)$.

S-au notat $\psi \stackrel{\Delta}{=} \widehat{ACO}$ și $\varphi \stackrel{\Delta}{=} \widehat{AOC} = \arg p_1$.

Din $\Delta BB'C$ rezultă:

$$BB' = (1 + x) \sin \psi \tag{6.64}$$

În ΔOAC, aplicînd teorema sinusului rezultă:

$$\frac{OA}{\sin \psi} = \frac{AC}{\sin \varphi}, \quad OA = \rho, \quad AC = |p_1 - 1| = \sqrt{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2},$$

deci,

$$\sin \psi = \frac{\rho \sin \varphi}{|p_1 - 1|} = \frac{\rho \sin \varphi}{\sqrt{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2}}. \tag{6.65}$$

În $\Delta\ BB'A$: $AB = |p_1 - z_1| = \sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos \varphi}$; ca urmare,

$$\cos \alpha = \frac{BB'}{AB} = \frac{(1 + x) \sin \psi}{\sqrt{\rho^2 + x^2 + 2\rho x \cos \varphi}}. \tag{6.66}$$

Relația (6.66) generează următoarea ecuație de variabilă $x = |z_1| \in (0,1)$:

$$x^2(\sin^2 \psi - \cos^2 \alpha) + 2x(\sin^2 \psi - \rho \cos \varphi \cos^2 \alpha) + \\ + \sin^2 \psi - \rho^2 \cos^2 \alpha = 0. \tag{6.67}$$

În momentul rezolvării ei ecuația (6.67) are toți coeficienții cunoscuți [6].

• *Cazul* $\alpha > 0$. Conform fig. 6.3, $\alpha = |\alpha| = B'\widehat{B}A$, $z_1 \doteq |z_1| = x \in (0,1)$, $\psi \stackrel{\Delta}{=} A\acute{C}O$, $\varphi \stackrel{\Delta}{=} A\widehat{O}C = \arg p_1$.

Din ΔAOC, prin teorema sinusului, rezultă:

$$\frac{OA}{\sin \psi} = \frac{AC}{\sin \varphi} \quad \text{sau} \quad \frac{\rho}{\sin \psi} = \frac{|p_1 - 1|}{\sin \varphi},$$

de unde

$$\sin\psi = \frac{\rho\sin\psi}{|p_1 - 1|} = \frac{\rho\sin\varphi}{\sqrt{1 - 2\rho\cos\varphi + \rho^2}}, \tag{6.68}$$

relație identică cu (6.65).

În $\Delta BB'C$: $BB' = BC\sin\psi = (1 - x)\sin\psi$; deci,

$$BB' = (1 - x)\sin\psi. \tag{6.69}$$

Comparîndu-se între ele expresiile (6.64) și (6.69), se observă diferența dintre cele două cazuri prezentate.

În $\Delta BB'A$: $\cos\alpha = \frac{BB'}{AB} = \frac{(1 - x)\sin\psi}{|p_1 - z_1|} = \frac{(1 - x)\sin\psi}{\sqrt{\rho^2 + x^2 - 2\rho x\cos\varphi}}$;

deci,

$$\cos\alpha = \frac{(1 - x)\sin\psi}{\sqrt{\rho^2 + x^2 - 2\rho x\cos\varphi}}. \tag{6.70}$$

Se constată că relațiile (6.66) și (6.70) diferă între ele.

Relația (6.70) generează ecuația în variabilă necunoscută x, cu $z_1 = x \in (0,1)$:

$$x^2(\sin^2\psi - \cos^2\alpha) - 2x(\sin^2\psi - \rho\cos\varphi\cos^2\alpha) + \tag{6.71}$$
$$+ \sin^2\psi - \rho^2\cos^2\alpha = 0$$

Față de ecuația (6.67), singura diferență în (6.71) este semnul schimbat (aici negativ) al coeficientului termenului x.

Observațiile prezentate în § 6.5 sînt valabile și aici. În ambele cazuri se caută soluția $x \in (0,1)$.

6.7. PROIECTAREA ALGORITMIZATĂ A FUNCȚIEI $H_0(z)$

6.7.1. Prescripții generale de proiectare

Proiectarea funcției de transfer a sistemului închis, $H_0(z)$, se poate algoritmiza simplu. Indicii de calitate principali ai regimului tranzitoriu utilizați în sinteza algoritmilor de reglare prin metoda poli-zerouri sînt suprareglajul, σ, și durata regimului tranzitoriu, t_r.

Conform §6.3, indicii de calitate ai regimurilor staționare la mărimi de referință tip treaptă și tip rampă sînt coeficientul erorii de poziție, K_p, și coeficientul erorii de viteză, K_v.

Apriori sintezei $H_0(z)$, conform § 6.2.2, se alege poziția zeroului (deci, semnul sign α), ținîndu-se seama de obligativitatea satisfacerii condiției (6.9), cînd partea fixată are un zerou stabil negativ sau z_1 se alege liber din condiții impuse de suprareglajul σ și factorul de amortizare ξ.

Prescripțiile de proiectare privind calitatea regimului tranzitoriu și staționar sînt:

— pentru regimul tranzitoriu indicial:

$$\sigma \leqslant \sigma_{\text{impus}},\ t_r \leqslant t_{r\,\text{impus}}; \tag{6.72}$$

— pentru regimurile staționare standard:

$$K_p = \infty, \tag{6.73}$$

cînd eroarea de poziție este nulă, respectiv,

$$K_v \geqslant K_{v,\,\text{impus}} \tag{6.74}$$

cînd eroarea de viteză este impusă.

6.7.2. **Rutina PZ**

Relația (6.47), care ilustrează dependența suprareglajului σ de factorul de amortizare, ξ, și de unghiul zeroului, α, este neliniară, fiind neoperațională în această formă din punctul de vedere al proiectării, ceea ce impune fixarea unor ipoteze preliminare. Din acest motiv relația $\sigma = \sigma(\alpha, \xi)$ este parametrizată cu ξ, pentru $\alpha > 0$, $\alpha < 0$ și $\sigma = \%\ \ldots\ 100\%$; deci, $\sigma = \sigma_\xi(\alpha)$.

Atît în [1], cît și în [2] sînt trasate o serie de nomograme $\sigma = \sigma_\xi(\alpha)$ pentru valorile uzuale $\xi \in (0,1)$. În cazul $\alpha < 0$ sînt preferate [2] nomogramele ce au un grad superior de detaliere.

Cu această ipoteză preliminară, operațiile de proiectare ale funcției $H_0^{\text{I}}(z)$ sînt descrise în organigrama din fig. 6.8 *a*. În cazul proiectării funcției $H_0^{\text{II}}(z)$, organigrama din fig. 6.8 *a* este completată cu cea din fig. 6.8 *b*.

Parametrul γ din (6.59) se modifică în două situații:

- T este fixă și atunci $2 \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{t_{r_{\text{impus}}}}{T} \triangleq \gamma_{\max}$;
- T este și ea variabilă, ca și γ, dar cu condiția permanentă $\gamma T = t_{r_{\text{impus}}}$.

Plaja de variație pentru T, dată în relația (6.56), poate fi mărginită superior prin $T \leqslant \dfrac{1}{2} \min\limits_i \{T_{fi}\}$.

Dacă în ambele situații nu sînt satisfăcute relațiile (6.52) și (sau) ecuațiile (6.67), (6.71) n-au soluție $x \in (0,1)$, atunci se modifică ξ sau α din nomogramele respective, cu păstrarea condiției $\sigma \leqslant \sigma_{\text{impus}}$.

6.7.3. **Optimizarea zeroului z_1** [6]

Dacă partea fixată nu introduce zerouri stabile negative, o altă modalitate de alegere a zeroului z_1, care este acum parametru liber de proiectare, este utilizarea criteriului J_2 (capitolul 9):

$$J_2 = \sum_{k=0} \varepsilon_k^2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_\Gamma \varepsilon(z^{-1})\, \varepsilon(z) z^{-1}\, \mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_\Gamma [1 - H_0(z^{-1})]\, [1 - H_0(z)]\, \frac{R(z^{-1})\, (R(z)}{z}\, \mathrm{d}z \tag{6.75}$$

Pentru configurația poli-zerouri de bază din (6.7), care realizează, prin condiția (6.23), eroarea de poziție nulă, polii $p_{1,2}$ se aleg din considerente de durată a regimului tranzitoriu indicial, pentru un factor de amortizare ξ ales în plaja uzuală $\xi \in [0{,}6\,;\ 0{,}8]$.

Pentru o mărime de referință tip treaptă, $R(z) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$, cu notațiile din fig. 6.8 *a* pentru $H_0(z)$, rezultă:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi\gamma} \oint_{|z|=1} \frac{(z+\alpha)(1+\alpha z)}{(z^2 + az + b)(1 + az + bz^2)}\, dz, \quad \alpha \triangleq = 1 + a - K_0 \qquad (6.76)$$

și $z^2 + az + b \triangleq (z - p_1)(z - \bar{p}_1)$, $\bar{p}_1 = p_2$.

Deoarece integrandul

$$L(z) \triangleq \frac{(z+\alpha)(1+\alpha z)}{(z^2 + az + b)(1 + az + bz^2)}$$

are doar polii $p_{1,2}$ în interiorul discului $|z| \leqslant 1$, integralele din (6.76) se calculează prin metoda reziduurilor, rezultînd, conform [6]:

$$J_2 = \frac{1}{1-b} \frac{(1+b)(1+\alpha^2) - 2a\alpha}{1 + b^2 - a^2 + 2b}, \qquad (6.77)$$

unde α este definit în (6.76), iar $K_0 = \dfrac{1 + a + b}{1 - z_1}$ (din condiția 6.23).

Dacă se mențin aceiași poli $p_{1,2}$, atunci relația (6.77) definește funcția analitică:

$$J_2 = f(z_1), \; z_1 \in \mathbb{R}. \qquad (6.78)$$

Zeroul optimizat se obține rezolvînd probleme de optimizare staționară:

$$z_1^{opt} = \arg \min_{z_1 \in (-1,1)} f(z_1). \qquad (6.79)$$

Conform [6], pentru

$$z_1^{opt} = -\frac{a + b + b^2}{1 + b + ab}, \qquad (6.80)$$

funcția $f(z_1)$ are minim absolut, de valoare

$$\min_{z_1} J_2 = \frac{1}{1 - b^2}, \quad b \triangleq = \rho^2 = |p_{1,2}|^2. \qquad (6.81)$$

În [8] sînt descrise diverse metode de optimizare staționară, aplicate asistat de calculator.

Odată găsită valoarea z_1^{opt} din (6.80), funcție de sign z_1^{opt}, se determină $\cos\alpha$ din relația (6.66) (pentru sign $z_1^{opt} = -1$), respectiv din relația (6.70) (pentru sign $z_1^{opt} = +1$). Cunoscînd $\cos\alpha^{opt}$, se determină α^{opt} și, din nomogramele $\sigma = \sigma_\xi(\alpha)$, suprareglajul corespunzător $\sigma(\alpha^{opt})$.

Dacă valoarea $\sigma(\alpha^{opt})$ este acceptabilă (în contextul aplicației particulare în care se utilizează această metodă), atunci, alegînd $z_1 = z_1^{opt}$, se obține regimul tranzitoriu indicial etalon, cu cea mai mică eroare pătratică pe întreaga durată $t \in [0, t_r]$. În cazul unor valori prea mari pentru σ se modifică ξ, deci $p_{1,2}$, și se reia procedura.

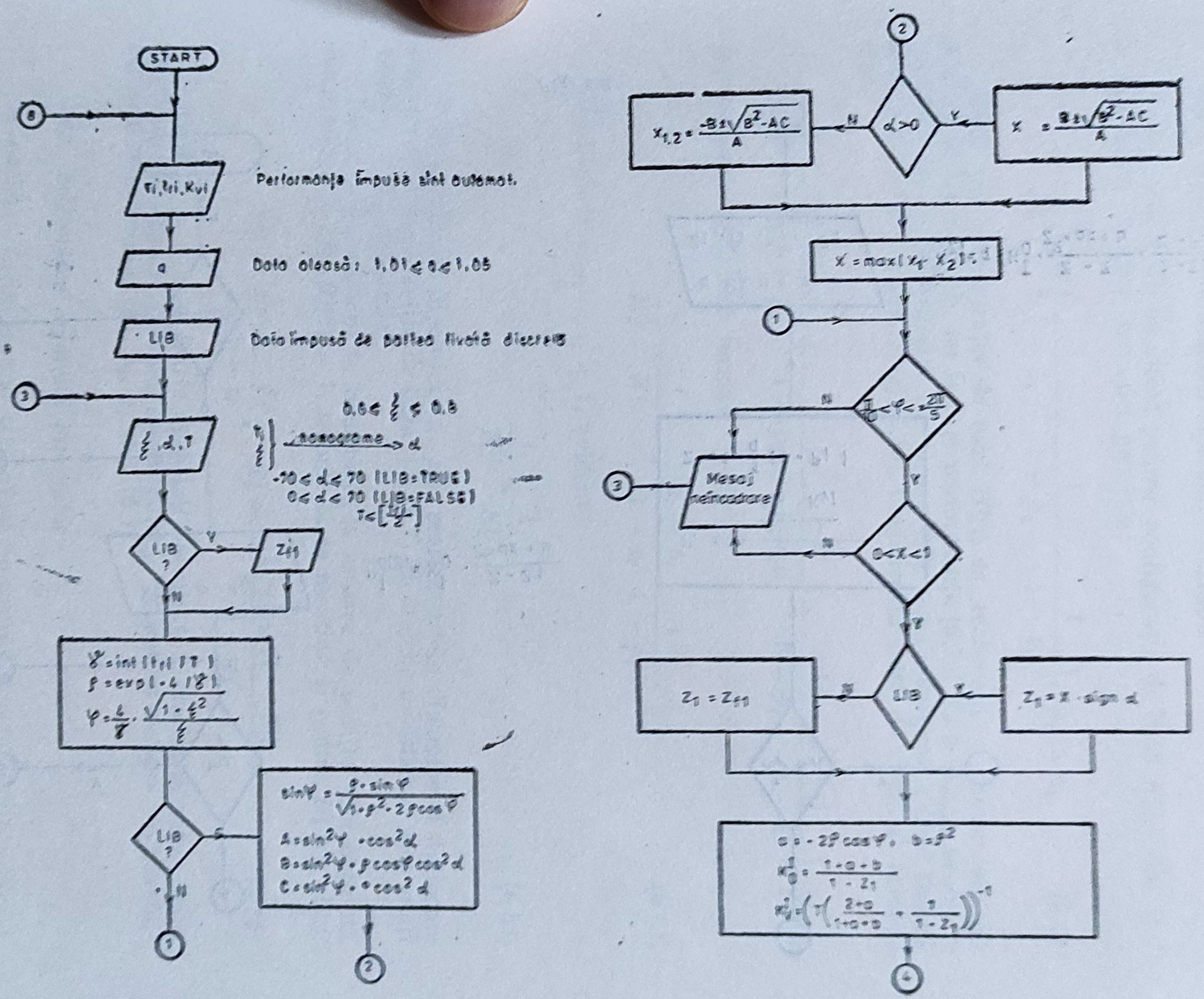

START
Performanţe impuse sint automat.
Data aleasă: 1,01 ≤ a ≤ 1,05
Data impusă de partea fixată discretă
LIB
LIB ?
Y
N
Z_f1
LIB ?
α>0
Mesaj neîncadrare
0<X<1
LIB
Z_1 = Z_f1
Z_1 = X · sign α

Fig. 6.8

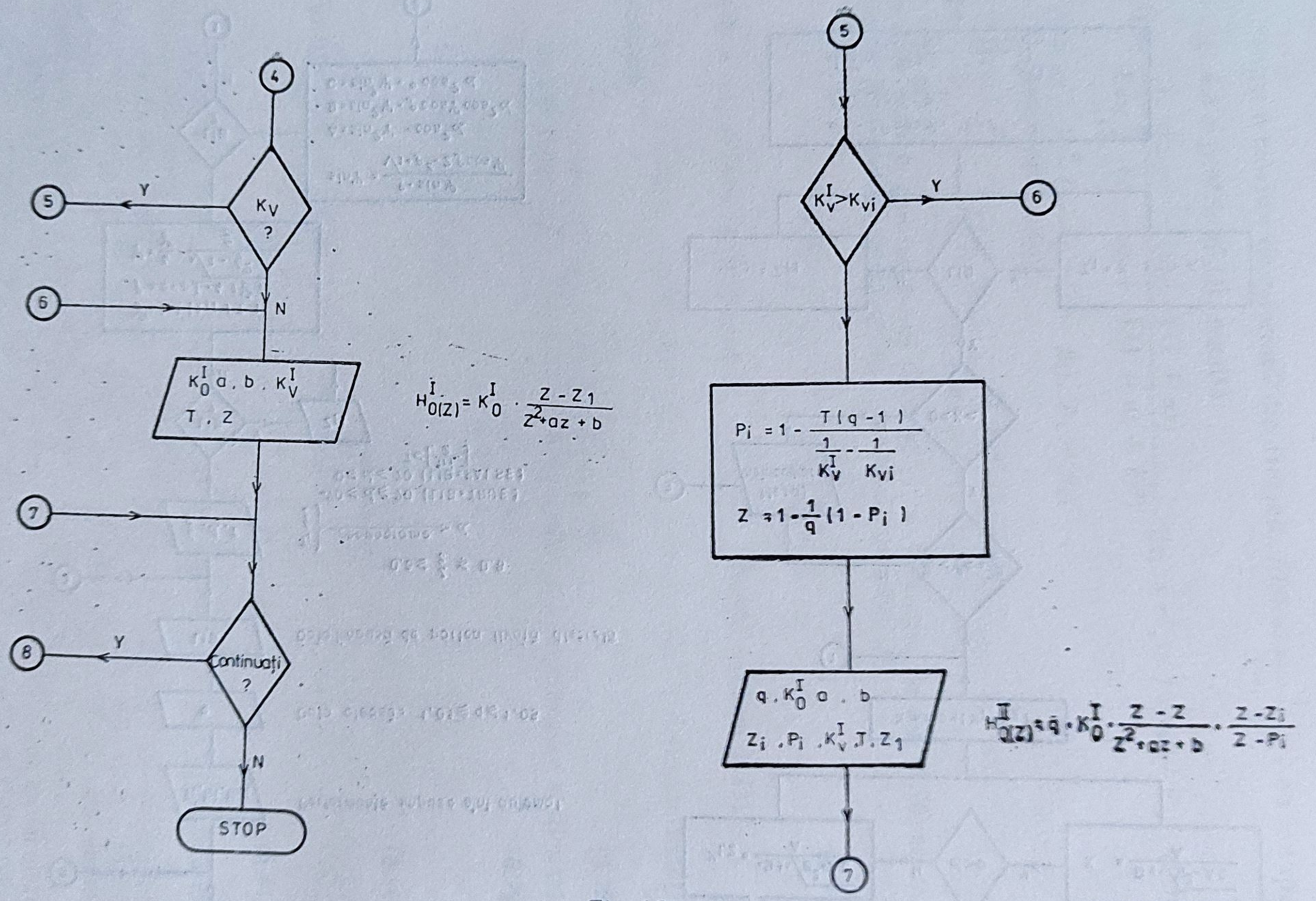

4
5
Y
K_V ?
6
N
K_0^I a , b , K_V^I
T , Z
7
8
Y
Continuați ?
N
STOP
$H_{0(Z)}^I = K_0^I \cdot \frac{Z - Z_1}{Z^2 + aZ + b}$
5
$K_V^I > K_{vi}$
Y
6
$P_i = 1 - \frac{T(q-1)}{\frac{1}{K_V^I} - \frac{1}{K_{vi}}}$
$Z = 1 - \frac{1}{q}(1 - P_i)$
q , K_0^I a , b
Z_i , P_i , K_V^I , T , Z_1
$H_{0(Z)}^{II} = q \cdot K_0^I \cdot \frac{Z - Z}{Z^2 + aZ + b} \cdot \frac{Z - Z_i}{Z - P_i}$
7

Fig. 6.8

6.8. MICȘORAREA ERORII DE VITEZĂ

6.8.1. Efectele introducerii dipolului integrator

Coeficientul erorii de viteză pentru configurația de bază $H_0^{\mathrm{I}}(z)$ din (6.7) se calculează conform formulei generale:

$$\frac{1}{K_v^{\mathrm{I}}} = T\left(\frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} - \frac{1}{1-z_1}\right), \quad p_2 = \bar{p}_1. \tag{6.82}$$

Dacă prin configurația de bază $H_0^{\mathrm{I}}(z)$ se realizează performanțele din relațiile (6.72) și (6.73), nu însă și performanța (6.74) $K_v \geqslant K_{v\,\mathrm{impus}}$, atunci se introduce un dipol integrator (z_i, p_i) în (6.7), noua configurație fiind sintetizată în aspectul funcției $H_0^{\mathrm{II}}(z)$ (6.10). Coeficientul erorii de viteză al acesteia este:

$$\frac{1}{K_v^{\mathrm{II}}} = T\left(\frac{1}{1-p_1} + \frac{1}{1-p_2} - \frac{1}{1-z_1} + \frac{1}{1-p_i} - \frac{1}{1-z_i}\right), \tag{6.83}$$

care se poate scrie sub forma:

$$\frac{1}{K_v^{\mathrm{II}}} = \frac{1}{K_v^{\mathrm{I}}} - T\,\frac{z_i - p_i}{1-z_i}\,\frac{1}{1-p_i}. \tag{6.84}$$

Deoarece $0 < p_i < z_i < 1$, evident

$$\frac{1}{K_v^{\mathrm{II}}} < \frac{1}{K_v^{\mathrm{I}}}. \tag{6.85}$$

Prin adăugarea dipolului (z_i, p_i), performanțele dinamice și staționare obținute prin configurația de bază din (6.7) nu trebuie modificate prea mult (practic, sînt neglijabile).

Performanța staționară, referitoare la eroarea de poziție nulă obținută din condiția (6.22), $H_0^{\mathrm{I}}(1) = 1$, trebuie să se mențină și pentru $H_0^{\mathrm{II}}(z)$; deci,

$$K_0^{\mathrm{II}} = K_0^{\mathrm{I}}\,\frac{1-p_i}{1-z_i}; \quad K_0^{\mathrm{I}} = \frac{(1-p_1)(1-\bar{p}_1)}{1-z_1}. \tag{6.86}$$

Deoarece p_i, z_i sînt foarte apropiați de $z = +1$, efectul în regim tranzitoriu al introducerii dipolului este neglijabil [1], putînd menține vechea configurație poli-zerouri, p_1, p_2, z_1 din (6.7).

6.8.2. Proiectarea dipolului integrator

Se consideră, în caz general, o referință tip treaptă, de amplitudine $r \in (0,1]$:

$$R(z) = \frac{r}{1-z^{-1}}. \tag{6.87}$$

Răspunsul indicial al sistemului $H_0^{II}(z)$ la acest tip de referință este:

$$Y(z) = H_0^{II}(z)\,\frac{z}{z-1}\,r$$

și se remarcă faptul că $\dfrac{Y(z)}{z}$ și $Y(z)$ au aceiași poli nenuli,

$$z^{-1}Y(z) = \frac{H_0^{II}(z)\,r}{z-1}.$$

Se studiază contribuția polului p_i la răspunsul global $z^{-1}Y(z)$ (de fapt $Y(z)$ întîrziat cu o perioadă de eșantionare) prin calculul reziduului corespunzător acestui pol. Se notează acest reziduu cu R_{p_i}.

Prin definiție:

$$R_{p_i} = \lim_{z\to p_i}\left[\frac{Y(z)}{z}\,(z-p_i)\right] = \lim_{z\to p_i}\left[r\,\frac{H_0^{II}(z)}{z-1}\,(z-p_i)\right]. \qquad (6.88)$$

Cu $H_0^{II}(z)$ din (6.10) și K_0^{II} din (6.86) și (6.24) se obține:

$$R_{p_i} = K_0^{II}\,\frac{(p_i-z_1)\,(p_i-z_i)}{(p_i-1)\,(p_i-p_1)\,(p_i-\bar{p}_1)}\,r =$$

$$= K_0^{I}\,\frac{1-p_i}{1-z_i}\,\frac{(p_i-z_1)\,(p_i-z_i)}{(p_i-1)\,(p_i-p_1)\,(p_i-\bar{p}_1)}\,r. \qquad (6.89)$$

Substituind în (6.89) pe K_0^{I} din (6.23) și aranjînd factorii, rezultă:

$$R_{p_i} = \frac{-(1-p_1)\,(1-\bar{p}_1)}{1-z_1}\,\frac{p_i-z_1}{(p_i-p_1)\,(p_i-\bar{p}_1)}\,\frac{p_i-z_i}{1-z_i}\,r. \qquad (6.90)$$

Deoarece p_i și z_i sînt foarte apropiați de $z=+1$, în (6.90) se admit aproximările [1]:

$$\frac{1-p_1}{p_i-p_1}\approx 1,\quad \frac{1-\bar{p}_1}{p_i-\bar{p}_1}\approx 1,\quad \frac{p_i-z_1}{1-z_1}\approx 1. \qquad (6.91)$$

Cu aceste aproximări

$$R_{p_i} = r\left(\frac{-p_i-z_i}{1-z_i}\right) = r\left(-1+\frac{1-p_i}{1-z_i}\right). \qquad (6.92)$$

Presupunînd o contribuție a reziduului la răspunsul global y_k^{II}, în plaja:

$$0 < R_{p_i} \leqslant 5\%\ r, \qquad (6.93)$$

pentru parametrul $q \overset{\Delta}{=} \dfrac{1-p_i}{1-z_i}$ rezultă plaja de valori:

$$q \in (1;\ 1{,}05). \qquad (6.94)$$

Deci, contribuția reziduului este limitată la maximum 5% din amplitudinea referinței din (6.87)

Uzual se iau valorile discrete [1]:

$$q = 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ 1{,}05. \tag{6.95}$$

În relația (6.84), impunînd condiția

$$K_v^{II} = K_{v\ impus}, \tag{6.96}$$

cu q ales în plaja de valori din (6.95), singura necunoscută rămîne p_i; rezultă:

$$\frac{1}{K_{v\,impus}} = \frac{1}{K_v^I} - T(q-1)\frac{1}{1-p_i} \tag{6.97}$$

Din (6.97) se obține:

$$p_i = 1 - \frac{T(q-1)}{\dfrac{1}{K_v} - \dfrac{1}{K_{v\,impus}}}. \tag{6.98}$$

Cunoscînd p_i, rezultă:

$$z_i = 1 - \frac{1}{q}(1-p_i). \tag{6.99}$$

Cu p_i, z_i determinate, se calculează noua valoare K_0^{II} din (6.86), care — cu notația anterioară (6.94) — devine:

$$K_0^{II} = K_0^I q. \tag{6.100}$$

Cu valorile p_i, z_i, K_0^{II} calculate astfel, configurația

$$H_0^{II}(z) = K_0^{II}\frac{z-z_1}{(z-p_1)(z-\bar{p}_1)}\frac{z-z_i}{z-p_i}$$

realizează toate performanțele dinamice ale vechii configurații proiectate, $H_0^I(z) = K_0^I\dfrac{z-z_1}{(z-p_1)(z-\bar{p}_1)}$, și în plus realizează și condiția $K_v^{II} = K_{v\,impus} > K_v$.

Algoritmul de proiectare descris prin organigrama din fig. 6.8 a se completează cu organigrama din fig. 6.8 b.

6.9. PROIECTAREA ALGORITMULUI DE REGLARE CU AJUTORUL FUNCȚIEI $H_0^{IV}(z)$

Conform relației (6.12), $H_0^{IV}(z) = \dfrac{K_0}{z-p_0}$, $p_0 \in (0,1)$.

Se consideră referința tip treaptă $R(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$.

Răspunsul indicial al modelului $H_0^{IV}(z)$ este:

$$Y(z) = \frac{K_0}{z - p_0} \frac{z}{z - 1}, \tag{6.101}$$

cu eşantioanele:

$$y_k = \frac{K_0}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^k}{(z - p_0)(z - 1)} dz, \tag{6.102}$$

sau

$$y_k = K_0 \left(\frac{1}{1 - p_0} + \frac{p_0^k}{p_0 - 1} \right). \tag{6.103}$$

Performanţa de regim staţionar impusă este ca eroarea de poziţie să fie nulă, adică $H_0^{IV}(1) = 1$ de unde, conform (6.26), rezultă $K_0 = K_0^{IV} = 1 - p_0$. Relaţia (6.103) devine:

$$y_k = 1 - p_0^k \tag{6.104}$$

Singura performanţă de regim dinamic este:

$$t_r \leqslant t_{r\,impus} \triangleq k_1 T, \tag{6.105}$$

unde

$$k_1 = \left[\frac{t_{r\,impus}}{T} \right] \in I\mathbb{N}.$$

Impunînd această performanţă răspunsului discret din (6.104), rezultă:

$$1 - p_0^{k_1} = 0{,}95, \tag{6.106}$$

de unde

$$p_0 = (0{,}05)^{\frac{1}{k}}. \tag{6.107}$$

Cunoscînd p_0 din (6.107) şi $K_0^{VI} = 1 - p_0$, funcţia $H_0^{IV}(z)$ este determinată.

Coeficientul erorii de viteză K_v, din (6.31), este:

$$K_v = \frac{1 - p_0}{T} = \frac{K_0^{IV}}{T}. \tag{6.108}$$

6.10. APLICAREA METODEI POLI-ZEROURI PENTRU PROCESE CU TIMP MORT

În cazul proceselor fară timp mort, funcţia de transfer discretă a RA se obţine în finalul proiectării din formula:

$$H_R(z) = \frac{1}{H_f(z)} \frac{H_0(z)}{1 - H_0(z)}.$$

Funcția $H_f(z)$ este cunoscută din ipoteză (§ 6.1), iar $H_0(z)$ se proiectează conform considerațiilor din paragrafele precedente.

Dacă modelul părții fixate are timp mort, $\tau = NT$, $N \in \mathbb{N}$, și este de forma $\widetilde{H}_f(z)\, z^{-N}$, atunci funcția $H_0(z)$ se determină astfel:

- performanța de regim tranzitoriu $t_r \leqslant t_{r\,\text{impus}}$ se pune sub forma:

$$t_{r\,\text{impus}} = t'_r + \tau, \tag{6.109}$$

deci,

$$t'_r = t_{r\,\text{impus}} - \tau; \tag{6.110}$$

- se proiectează $H_0(z)$ în ipoteza $\tau = 0$, cu singura modificare că $t_r \leqslant t'_r$;
- cunoscînd $H_0(z)$, funcția de transfer a sistemului închis este:

$$H_0^*(z) \triangleq H_0(z)\, z^{-N}. \tag{6.111}$$

Algoritmul de reglare rezultă prin aplicarea formulei (6.8) în acest caz Deci,

$$H_R(z) = \frac{1}{\widetilde{H}_f(z)\, z^{-N}} \frac{H_0^*(z)}{1 - H_0^*(z)} = \frac{1}{\widetilde{H}_f(z)\, z^{-N}} \frac{H_0(z)\, z^{-N}}{1 - H_0(z)\, z^{-N}}$$

sau

$$H_R(z) = \frac{1}{\widetilde{H}_f(z)} \frac{H_0(z)}{1 - H_0^*(z)}. \tag{6.112}$$

Acest mod de proiectare utilizat în cazul proceselor cu timp mort se încadrează în metodele de predicție prezentate în [9].

Exemple:

1. Se consideră partea fixată continuă, descrisă prin relația:

$$H'_f(s) = \frac{1}{10\, s + 1}. \tag{6.113}$$

Totodată, fie $T_f = 10$ s.

Performanțele impuse răspunsului indicial dorit sînt următoarele:

$$\sigma \leqslant 8\%, \quad t_r \leqslant t_{r\,\text{impus}} = 10 \text{ s}. \tag{6.114}$$

Inițial, se alege o valoare rezonabilă pentru perioada de eșantionare $T = \frac{T_f}{5} = 2$ s; deci, $\gamma = \left[\frac{t_{r\,\text{impus}}}{T}\right] = 5$.

Modelul discret al părții fixate, cu extrapolator de ordinul zero, este:

$$H_f(z) = \frac{1 - b}{z - b}, \quad b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}} = e^{-\frac{T}{10}}, \quad T = 2. \tag{6.115}$$

Deoarece modelul discret (6.115) nu are zerouri, zeroul funcției $H_0(z)$ din (6.7) este un parametru liber de proiectare.

Utilizînd nomograma din fig. 6.5 sau, mai detaliat, cele din [2], pentru valoarea $\sigma = 8\%$ se aleg $\xi = 0{,}63$ și $\alpha = -41°$, deci $z_1 < 0$.

Pentru $\gamma = 5$ și valorile ξ și α anterior fixate, folosindu-se rutina PZ de proiectare *off-line* a funcției $H_0^{\mathrm{I}}(z)$, din § 6.6 se obține:

$$H_0^{\mathrm{I}}(z) = K_0^{\mathrm{I}} \frac{z - z_1}{(z - p_1)(z - \bar{p}_1)} = K_0^{\mathrm{I}} \frac{z + x}{z^2 + az + b}, \tag{6.116}$$

unde $K_0^{\mathrm{I}} = 0{,}4265$, $x = 0{,}655$, $a = 0{,}496$ și $b = 0{,}2019$.

Cunoscînd $H_f(z)$ din (6.115) și $H_0^{\mathrm{I}}(z)$ din (6.116), $H_R(z)$ se obține conform (6.8).

Simularea buclei automate discrete

Partea fixată discretă $H_f(z)$ este descrisă prin relația:

$$y_k = 0{,}8187\ y_{k-1} + 0{,}1813\ u_{k-1}. \tag{6.117}$$

Algoritmul de reglare, $H_R(z)$, este descris prin expresia:

$$\begin{aligned} u_k = {} & 0{,}9225\ u_{k-1} + 0{,}0775\ u_{k-2} + 2{,}3525\ \varepsilon_k - \\ & - 0{,}3851\ \varepsilon_{k-1} - 1{,}2615\ \varepsilon_{k-2}. \end{aligned} \tag{6.118}$$

S-au considerat condiții inițiale nule ale părții fixate, $y_0 = 0$, $u_0 = 0$, și mărimea de referință a SA, tip treaptă unitate, $r_k = 1$, $(\forall)_k \geqslant 0$.

Răspunsul indicial y_k al părții fixate, în buclă automată, este ilustrat în fig. 6.9, constatîndu-se respectarea de către y_k a prescripțiilor de proiectare (6.114).

OBSERVAȚIE. Ca și în cazul simulărilor buclei închise din exemplele prezentate în celelalte capitole, din motive de simulare (inițializări, la care se adaugă evitarea de indici negativi sau egali cu zero), bucla se închide la $k = 1$ (fig. 6.9), moment din care se contorizează $\gamma = 5$. În plus, în jurul mărimii r_k este desenată banda de eroare de $\pm\ 10\%\ r_k$. Prin definiție, regimul tranzitoriu al răspunsului y_k durează pînă în momentul intrării lui în banda de $\pm\ 5\%\ r_k$.

Zeroul z_1 fiind un parametru liber de proiectare, se poate alege astfel încît să minimizeze indicele pătratic din (6.76). Se obține $z_1^{\mathrm{opt}} \simeq 0{,}2299 > 0$, pentru care $\alpha^{\mathrm{opt}} \simeq 23°43'$. Menținînd aceiași poli $p_{1,2}$ din (6.116) cu $\xi = 0{,}63$, conform fig. 6.5 rezultă un suprareglaj $\sigma(\alpha^{\mathrm{opt}}) \simeq 15\%$ acceptabil, dar eroarea medie pătratică a răspunsului indicial este minimă în acest caz.

2. Pentru același proces, din exemplul anterior — descris în (6.113) — și cu modelul discret din (6.115), pe lîngă performanțele din (6.114) se impune și performanța de regim staționar la mărimi de referință tip rampă:

$$K_v \geqslant K_{v_{\mathrm{impus}}} = 1\,[s^{-1}]. \tag{6.119}$$

Pentru modelul $H_0^{\mathrm{I}}(z)$ din (6.116), rutina de proiectare evaluează și coeficientul erorii de viteză K_v^{I}: rezultă valoarea $K_v^{\mathrm{I}} \simeq 0{,}3276\ \mathrm{s}^{-1}$ și se constată că nu este îndeplinită prescripția de proiectare (6.119). În consecință, în configurația inițială de poli-zerouri, din (6.116), se introduce un dipol de integrare, rezultînd configurația generală $H_0^{\mathrm{II}}(z)$ din (6.10).

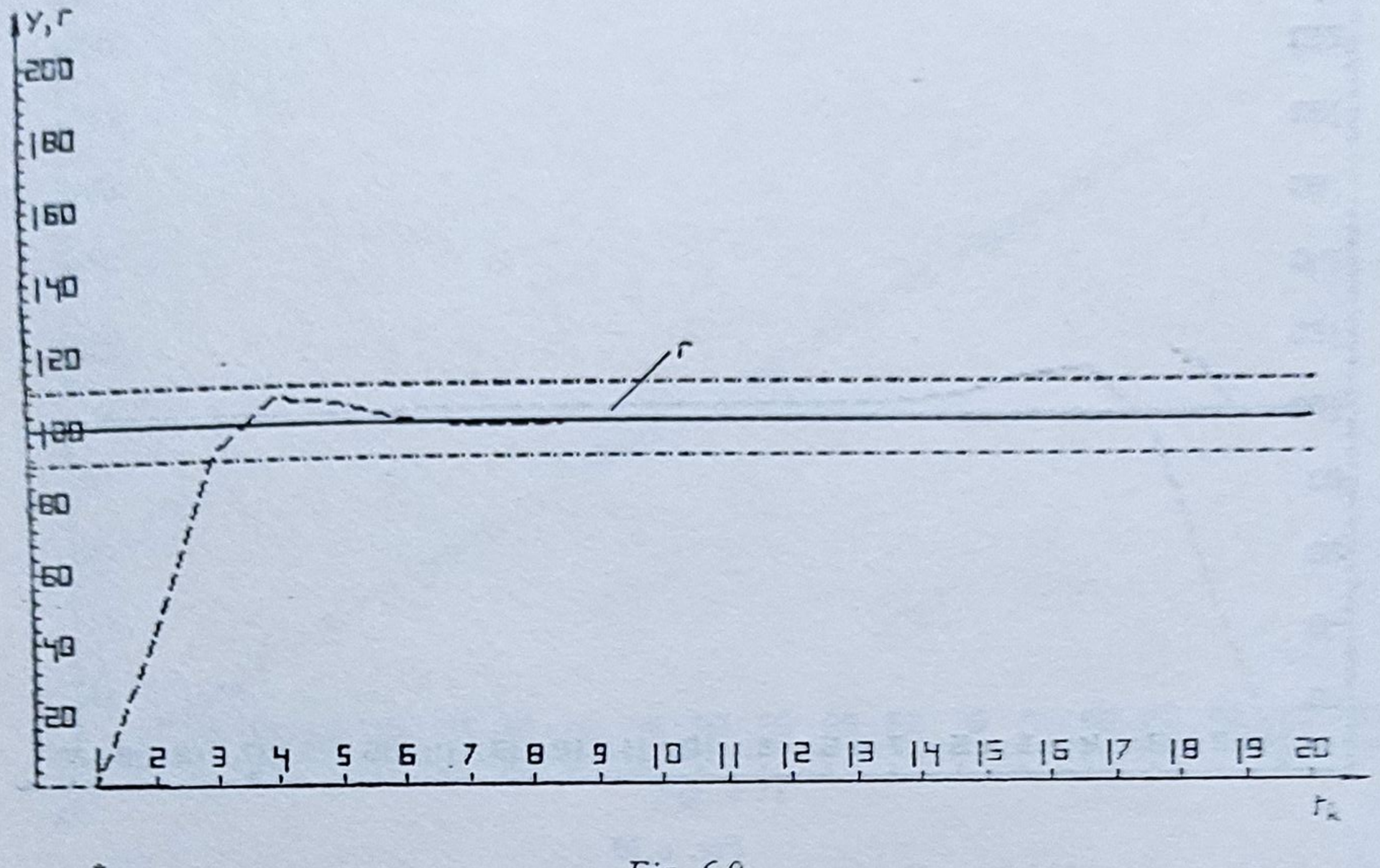


Fig. 6.9

În cazul cînd printre prescripțiile de proiectare figurează și cea din (6.119), proiectantul este obligat să-și aleagă, ca dată inițială pentru rutina PZ, și valoarea parametrului q dată de relația (6.94).

Cînd $q = 1{,}05$, dipolul de integrare este descris prin

$$p_i \simeq 0{,}9513,\ z_i \simeq 0{,}9536. \tag{6.120}$$

Deoarece valorile din (6.120) sînt reprezentate prin patru zecimale exacte (cu rotunjirea rezultatului), se recalculează q pentru p_i și z_i din (6.120):

$$\tilde{q} = \frac{1 - p_i}{1 - z_i} \simeq 1{,}04957 \neq 1{,}05. \tag{6.121}$$

Cunoscînd $\tilde{q}$ și K_0^{I} din (6.100), rutina PZ calculează $\tilde{K}_0^{\mathrm{II}} = \tilde{q} K_0^{\mathrm{I}}$, funcția $H_0^{\mathrm{II}}(z)$ fiind complet determinată. Pe baza relației (6.8) se obține $H_R(z)$.

Simularea buclei automate

Partea fixată discretă este descrisă în (6.117).

Algoritmul de reglare diferă față de cel din (6.118), devenind:

$$\begin{aligned} u_k = {} & 1{,}8949\, u_{k-1} - 0{,}8073\, u_{k-2} - 0{,}08751\, u_{k-3} + 2{,}46884\, \varepsilon_k - \\ & - 2{,}75843\, \varepsilon_{k-1} - 0{,}93852\, \varepsilon_{k-2} + 1{,}26248\, \varepsilon_{k-3}. \end{aligned} \tag{6.122}$$

Efectele dipolului trebuie să fie neglijabile în răspunsul indicial, adică creșterea suprareglajului și mărirea duratei regimului tranzitoriu indicial

* Simulările numerice au fost realizate în colaborare cu fizicianul Abraham Laszlo de la I.P.A. Cluj, căruia îi mulțumim pe această cale.

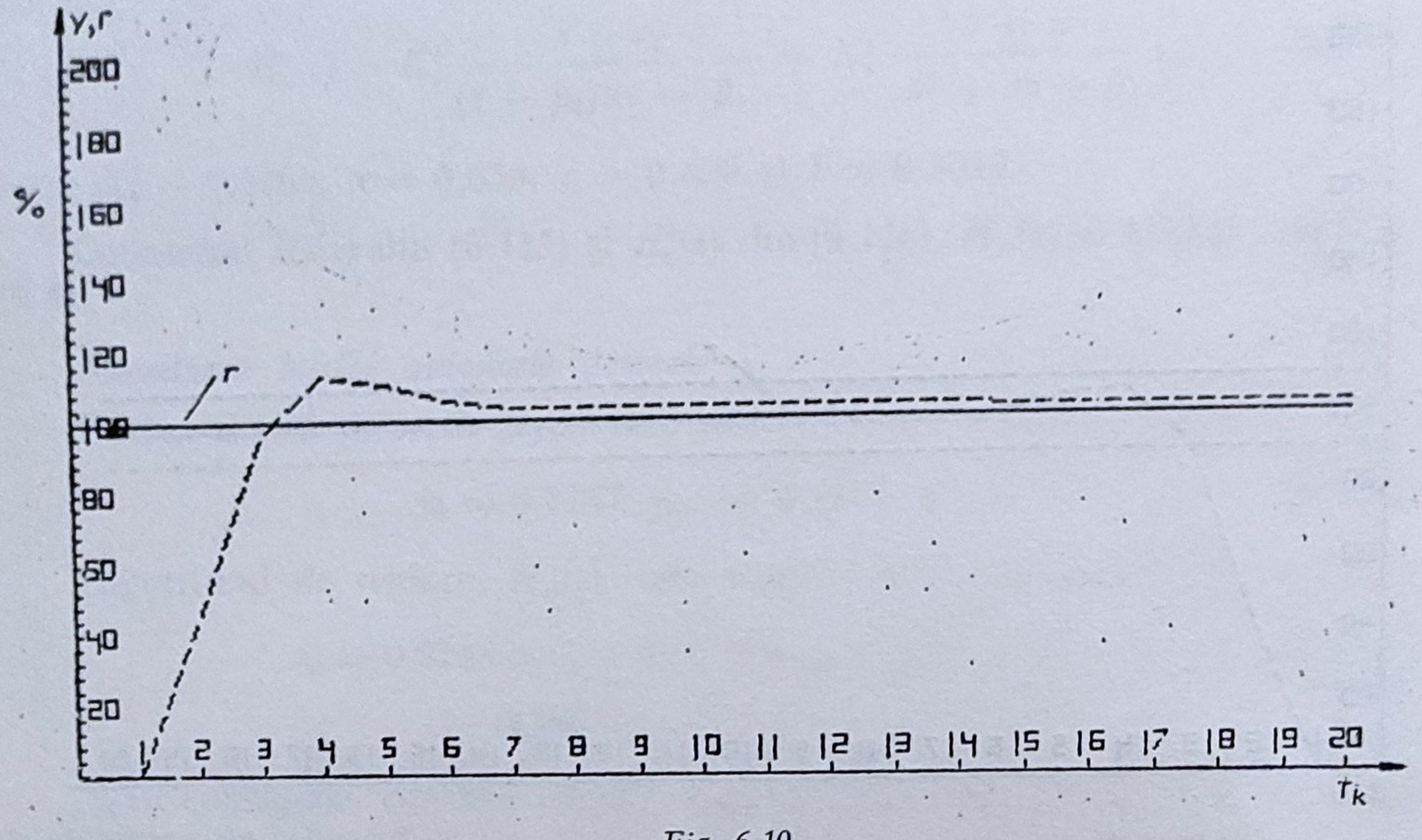


Fig. 6.10

t_r (datorită polului p_i) admise apriori trebuie să fie acceptate de proiectant: în caz contrar, se micșorează valoarea q.

Pentru a examina efectele dipolului se consideră partea fixată din (6.117), RA din (6.122), condiții inițiale nule și o mărime de referință tip treaptă unitate, $r_k = 1$. Răspunsul y_k în buclă închisă este ilustrat în fig. 6.10.

Ținîndu-se seama de rezoluția plotterului, se estimează direct un suprareglaj de aproximativ 16% care se consideră acceptabil, fără a mai necesita micșorarea lui q și reluarea calculelor coeficienților algoritmului din (6.122).

Ținîndu-se seama de contorizarea de la $k = 1$ a timpului, durata regimului tranzitorial este $t_r \simeq 6T$. Se constată însă prezența unei erori de poziție nenule ($\varepsilon \leqslant 3\%$) datorate preciziei insuficiente de reprezentare a coeficienților care multiplică regresorii comenzii, în (6.122), deci:

$$1{,}8949 - 0{,}8073 - 0{,}08751 \neq 1.$$

pe cînd în (6.118) exista egalitatea $0{,}9225 + 0{,}0755 = 1$.

O primă recomandare, tipică, în cazul utilizării dipolului, se referă la mărirea preciziei de reprezentare a coeficienților algoritmului de reglare din (6.122), mai precis a coeficienților care multiplică regresorii u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-3}.

Cu aceste observații se trece la compararea răspunsurilor la referință tip rampă ale sistemului automat, utilizînd algoritmul de reglare din (6.118), pentru care configurația inițială $H_0^I(z)$, asigură $K_v^I \simeq 0{,}3276\ s^{-1}$ și apoi folosindu-se algoritmul de reglare din (6.122), pentru care configurația extinsă, $H_0^{II}(z)$, asigură $K_v^I \simeq 1 s^{-1}$. În ambele cazuri se consideră condiția inițială (arbitrar aleasă) nenulă, $y_0 = 0{,}5$ ($u_0 = 0{,}5$ deoarece $K_f = 1$) și expresia analitică a rampei:

$$r_k = 0{,}02\ k. \tag{6.123}$$

Cînd bucla se închide, la $k = 1$, expresia analitică utilizată practic în simulare a fost $r_k = 0{,}02\ (k - 1)$.

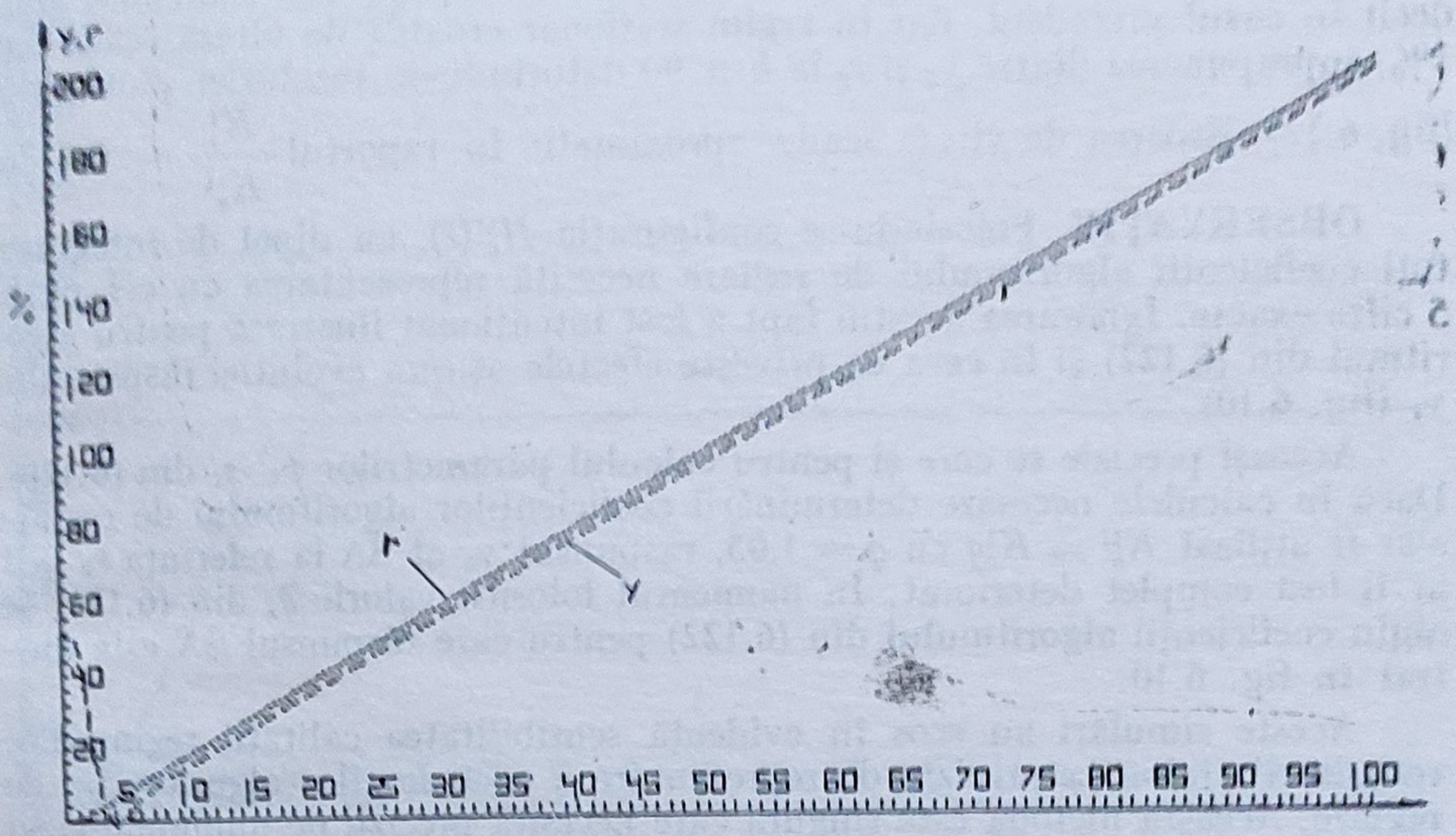


Fig. 6.11

În absența dipolului, folosind algoritmul din (6.118), răspunsul y_k în buclă închisă este ilustrat în fig. 6.11. Se constată un regim tranzitoriu oscilatoriu amortizat și o eroare de viteză de circa 3% — 4%.

Cu această condiție inițială și mărime de referință, dar utilizînd dipolul de integrare, deci algoritmul de reglare din (6.122), răspunsul y_k în buclă închisă este ilustrat în fig. 6.12.

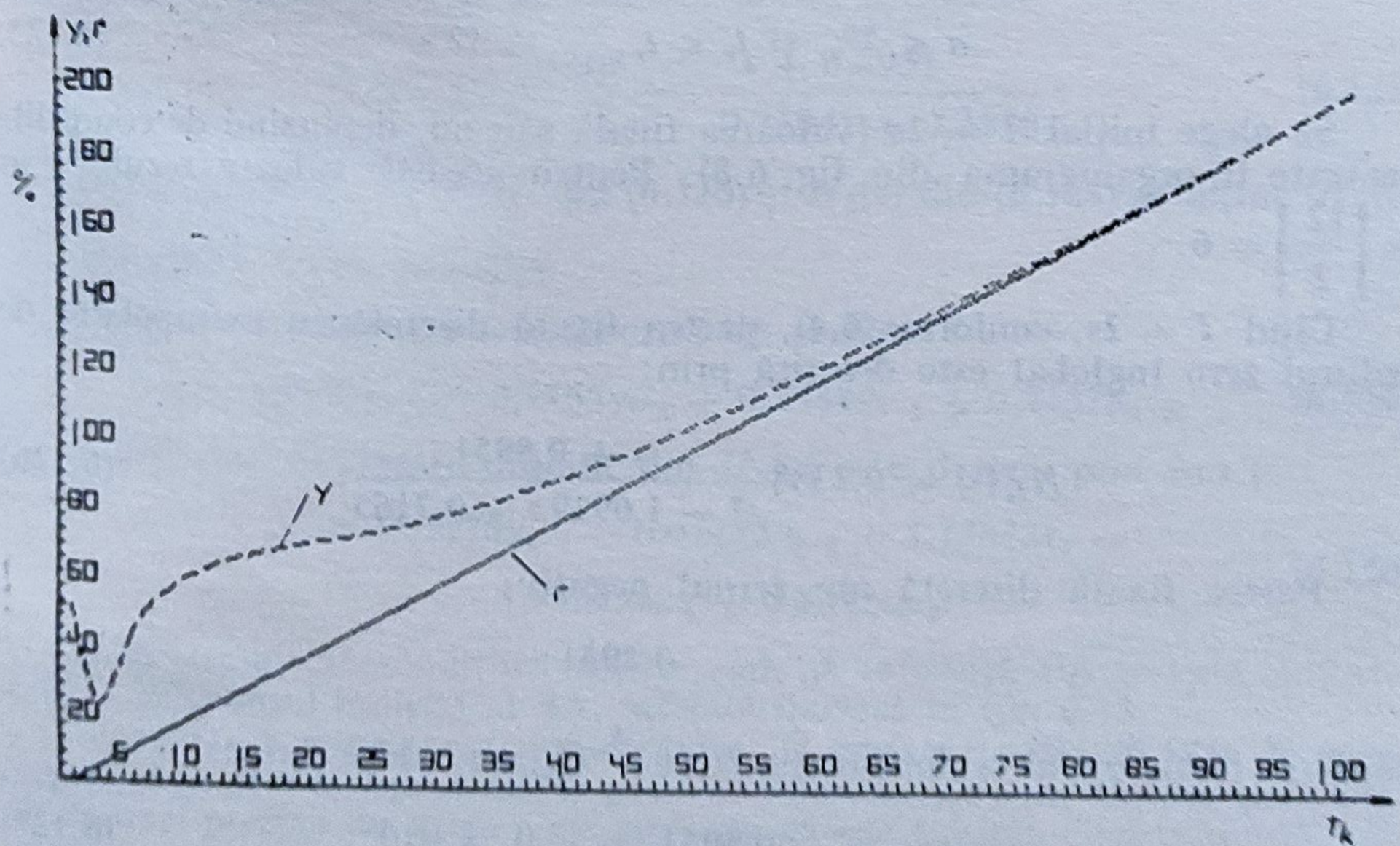


Fig. 6.12

Se remarcă că durata regimului tranzitorie la rampă este mult mai mare decît în cazul precedent, dar în regim staționar eroarea de viteză scade sub 1%, suprapunerea dintre y_k și r_k la $k \geqslant 90$ datorîndu-se rezoluției plotterului (fig. 6.12). Eroarea de viteză scade aproximativ în raportul $\frac{K_v^I}{K_v^{II}} = 0{,}3276$.

OBSERVAȚIE. Folosindu-se configurația $H_0^{II}(z)$, cu dipol de integrare, toți coeficienții algoritmului de reglare necesită reprezentarea cu cel puțin 5 cifre exacte. Ignorarea acestui fapt a fost intenționat ilustrată pentru algoritmul din (6.122) și în ceea ce privește efectele asupra evoluției răspunsului y_k (fig. 6.10).

Aceeași precizie se cere și pentru calculul parametrilor p_i, z_i din (6.120). Dacă în calculele necesare determinării coeficienților algoritmului de reglare s-ar fi utilizat $K_0^{II} = K_0^I q$ cu $q = 1{,}05$, răspunsul y_k al SA la referința $r_k = 1$ ar fi fost complet deteriorat. În momentul folosirii valorii $\tilde{q}$, din (6.121) se obțin coeficienții algoritmului din (6.122) pentru care răspunsul SA este ilustrat în fig. 6.10.

Aceste simulări au scos în evidență sensibilitatea calității regimurilor tranzitorii etalon la precizia de reprezentare a coeficienților algoritmului de reglare. Această metodă este singura care necesită precizii de minimum cinci cifre exacte pentru reprezentarea coeficienților. În cazul implementării reale în RD, această sensibilitate constituie un ușor dezavantaj al metodei.

3. Se consideră partea fixată continuă:

$$H'_{f_2}(s) = \frac{20}{(15s + 1)(10s + 1)}. \tag{6.124}$$

Totodată, $T_{f_1} = 15\,\text{s}$ și $T_{f_2} = 10\,\text{s}$.
Performanțele impuse răspunsului indicial al SA sînt:

$$\sigma \leqslant 7\% \text{ și } t_r \leqslant t_{r\,\text{impus}} = 12\,\text{s} \tag{6.125}$$

Se alege inițial $T = 2\text{s}$ (valoarea finală sau nu, depinzînd de condițiile ilustrate în organigrama din fig. 6.8). Pentru această valoare rezultă $\gamma = \left[\frac{12}{2}\right] = 6$.

Cînd $T = 2\text{s}$, conform (6.4), partea fixată discretă cu extrapolator de ordinul zero înglobat este descrisă prin:

$$H_{f_2}(z) = 0{,}2388 \frac{z + 0{,}8951}{z^2 - 1{,}6939\,z + 0{,}7165}. \tag{6.126}$$

Partea fixată discretă are zeroul negativ:

$$z_{f_1} = -0{,}8951;$$

conform (6.9), zeroul z_1 din funcția $H_0^I(z) \stackrel{\Delta}{=} H_0(z)$ se alege direct:

$$z_1 = z_{f_1} = -0{,}8951,\ z_1 < 0,\ \alpha < 0. \tag{6.127}$$

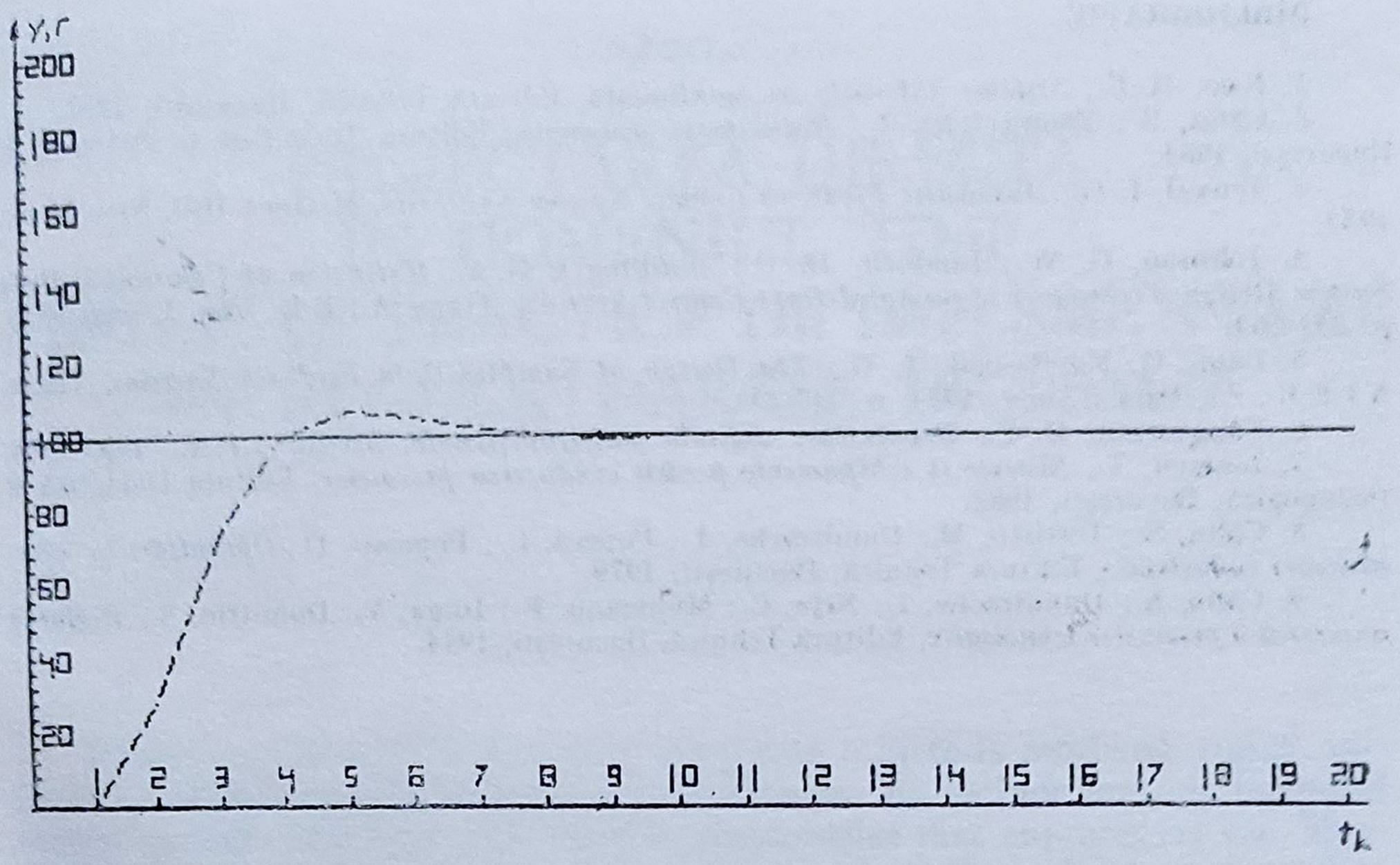


Fig. 6.13

Utilizîndu-se nomograma din fig. 6.5 sau cele din [2] și impunîndu-se $\sigma = 7\%$ și $\alpha < 0$, $\alpha \in (-70°, 0°)$, conform (6.50) se aleg valorile:

$$\xi = 0{,}65, \quad \alpha = -50°.$$

Cu valoarea $\gamma = 6$ (la $T = 2$s) și valorile ξ și α anterioare, folosindu-se rutina PZ se obține funcția de transfer dorită a buclei:

$$H_0(z) = 0{,}28136 \frac{z + 0{,}8951}{z^2 - 0{,}7304z + 0{,}2636}. \tag{6.128}$$

Din relația (6.8), cu $H_{f_2}(z)$ din (6.126) și $H_0(z)$ din (6.128) se obține $H_R(z)$.

Simularea buclei automate

Partea fixată discretă este descrisă de (6.126):

$$y_k = 1{,}6939y_{k-1} - 0{,}7165y_{k-2} + 0{,}2388u_{k-1} + 0{,}2137u_{k-2}. \tag{6.129}$$

Algoritmul de reglare obținut din $H_R(z)$ este descris prin funcția:

$$u_k = 1{,}01176u_{k-1} - 0{,}01175u_{k-2} + 1{,}17822\varepsilon_k - 1{,}99579\varepsilon_{k-1} + 0{,}8442\varepsilon_{k-2} \tag{6.130}$$

S-au considerat condițiile inițiale nule și referință tip treaptă unitate, $r_k = 1$. Răspunsul indicial al SA, y_k, este ilustrat în fig. 6.13.

Se remarcă respectarea prescripțiilor de proiectare din (6.125) de către răspunsul y_k al SA. Aproximativ aceleași performanțe s-au obținut și în condițiile unei precizii de patru cifre zecimale exacte (ultima cifră obținută prin rotunjire) pentru coeficienții algoritmului din (6.130).

BIBLIOGRAFIE

1. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eșantionare*, Editura Tehnică, București, 1967.
2. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
3. Truxal, I. G., *Automatic Feedback Control System Synthesis*, McGraw-Hill, New York, 1955.
4. Johnson, G. W.; Lindorff, D. P.; Nordling, C. G. A., *Extension of Continuous-Data System Design Techniques to Sampled-Data Control Systems*, Trans. A.I.E.E., Part. 2, sept. 1955, p. 252-263.
5. Lago, G. V.; Truxal, J. G., *The Design of Sampled-Data Feedback Systems*, Trans. A.I.E.E., 73, Part. 2, nov. 1954, p. 247-253.
6. Sângeorzan, D. C., *Regulatoare digitale multifuncționale*, Studiu I.P.A., 1987-1988.
7. Ionescu, T., *Sisteme și echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
8. Călin, S.; Tertisco, M., Dumitrache, I.; Popeea, C.; Popescu, D., *Optimizări în automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1979.
9. Călin, S.; Dumitrache, I.; Nițu, C.; Munteanu, F.; Iorga, V., Dumitriu, S., *Reglarea numerică a proceselor tehnologice*, Editura Tehnică, București, 1984.

Capitolul 7

PROIECTAREA DIRECTĂ ÎN DOMENIUL TIMP. RESTRICŢII PRACTICE DE IMPLEMENTARE ÎN REGULATOARELE DIGITALE

Proiectarea directă în domeniul timp este o metodă modernă tipică, utilizată în exclusivitate în sistemele cu eșantionare. Ea include metoda timpului minim, metoda timpului finit, metoda răspunsului fără suprareglaj ș.a. Menționăm faptul că aspectele pe care le presupune această modalitate de proiectare fac obiectul lucrărilor [1], [2], [3], [4], [5].

7.1. METODOLOGIA DE PROIECTARE

7.1.1. Ipoteze preliminare de proiectare

• Apriori sintezei algoritmului de reglare, se dispune de modelul discret al părții fixate (cu extrapolator de ordinul zero, înglobat) descris prin:

$$H_f(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} z^{-N}, \quad N \geqslant 0, \tag{7.1}$$

unde $B(z^{-1})/A(z^{-1})$ este o funcție rațională proprie, iar $N = \left[\frac{\tau}{T}\right]$ — timpul mort al modelului continuu al părții fixate și T — perioada de eșantionare a sistemului automat discret.

• Mărimea de referință a SA discret este de tip treaptă unitate [1], [2]:

$$R(z^{-1}) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \mathfrak{Z}\{r_k = 1\}_{k \geqslant 0}. \tag{7.2}$$

• Mărimile sistemice ale buclei automate discrete sînt în prealabil normate, conform capitolului 2, pentru RD din sisteme unificate de reglare automată.

• Dacă primele trei ipoteze sînt îndeplinite, se alege secvența infinită a eșantioanelor răspunsului indicial dorit de la ieșirea SA, astfel încît să fie satisfăcuți o serie de indici de calitate ai regimului tranzitoriu și staționar

(suprareglaj, timp de creştere, durata regimului tranzitoriu, eroare de poziţie nulă ş.a.).

Cunoscînd deci practic toate eşantioanele răspunsului dorit, $y_k \overset{\Delta}{=} y(kT)$, se cunoaşte şi transformata $\mathfrak{Y}$ a acestuia:

$$Y_d(z^{-1}) = \sum_{k \geqslant 0} y_k z^{-k}. \tag{7.3}$$

Din considerente de cauzalitate se ia:

$$y_0 = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, Y_d(z^{-1}) = 0. \tag{7.4}$$

În cazul $\tau = 0$ sau $N = 0$, doar $y_0 = 0$, iar pentru $\tau > 0$, $N > 0$, se consideră şi eşantioanele

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_N = 0 \tag{7.5}$$

7.1.2. Obţinerea funcţiei de transfer discrete a sistemului închis

Cazul $\tau = 0$. Se fixează $y_1, y_2, \ldots, y_r$ eşantioane distincte între ele, nenule şi neunitare ($y_i \neq y_j$; $y_i \neq 0$; $y_i \neq 1$; $i \neq j$; $i, j = \overline{1, r}$) conform prescripţiilor privind aspectul răspunsului indicial, iar restul eşantioanelor:

$$y_{r+i} = 1, \ (\forall)\, i \in \mathrm{IN}. \tag{7.6}$$

Transformata $\mathfrak{Z}$ a răspunsului dorit conform (7.3) este:

$$Y_d(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots + y_r z^{-r} + z^{-(r+1)} + z^{-(r+2)} + \ldots \tag{7.7}$$

sau

$$Y_d(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + y_2 z^{-2} + \ldots y_r z^{-r} + \frac{z^{-(r+1)}}{1 - z^{-1}}.$$

unde seria $\sum_{i \geqslant 0} z^{-i}$ s-a înlocuit prin $\dfrac{1}{1 - z^{-1}}$ deoarece $Y_d(z^{-1})$ este stabil (polisubunitari în modul $|z_{rj}| < 1$). Bucla automată este stabilă prin însuşi procedeul de proiectare, prin care se alege apriori răspunsul dorit, $Y_d(z^{-1})$, din (7.7), sub forma:

$$Y_d(z^{-1}) = \frac{y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1) z^{-2} + \ldots + (y_r - y_{r-1})\, z^{-r} + (1 - y_r)\, z^{-(r+1)}}{1 - z^{-1}}. \tag{7.8}$$

Cu notaţia:

$$Q(z^{-1}) = y_1 z^{-1} + (y_2 - y_1)\, z^{-2} + \ldots + (y_r - y_{r-1})\, z^{-r} + (1 - y_r)\, z^{-(r+1)}, \tag{7.9}$$

$Y_d(z^{-1})$ devine:

$$Y_d(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - z^{-1}}. \tag{7.10}$$

Cunoscînd referința SA din (7.2), rezultă funcția de transfer a sistemului închis, cu ieșirea din (7.10):

$$H_{0d}(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y_d(z^{-1})}{R(z^{-1})} = Q(z^{-1}). \tag{7.11}$$

Cazul $\tau = NT$. Conform relațiilor (7.4) și (7.5), $y_0 = y_1 \ldots = y_N = 0$. Se aleg eșantioanele nenule și neunitare ale răspunsului y_{N+1}, y_{N+2}, y_{N+3}, ..., y_r, distincte între ele și $y_{r+i} = 1$, $(\forall)\ i \in \mathbb{IN}$, conform (7.6).

Transformata Ş a răspunsului dorit este în acest caz:

$$Y_d(z^{-1}) = y_{N+1}z^{-(N+1)} + y_{N+2}z^{-(N+2)} + \ldots + y_r z^{-r} + z^{-(r+1)} + z^{-(r+2)} + \ldots$$

sau

$$Y_d(z^{-1}) = y_{N+1}z^{-(N+1)} + y_{N+2}z^{-(N+2)} + \ldots + y_r z^{-r} + \frac{z^{-(r+1)}}{1 - z^{-1}}, \tag{7.12}$$

cu aceeași observație din (7.7).

Răspunsul $Y_d(z^{-1})$ din (7.12) se scrie sub o formă similară cu (7.8):

$$Y_d(z^{-1}) = \frac{z^{-N}\left[y_{N+1}z^{-1} + (y_{N+2} - y_{N+1})\,z^{-2} + \ldots + (y_r - y_{r-1})\,z^{-(r-N)} + (1 - y_r)\,z^{-(r-N+1)}\right]}{1 - z^{-1}}. \tag{7.13}$$

Se notează:

$$Q_N(z^{-1}) = z^{-N}\left[y_{N+1}z^{-1} + (y_{N+2} - y_{N+1})\,z^{-2} + \ldots + (y_r - y_{r-1})\,z^{-(r-N)} + (1 - y_r)\,z^{-(r-N+1)}\right]. \tag{7.14}$$

Rezultă, similar cu (7.11), funcția de transfer dorită a sistemului închis în cazul $\tau = NT > 0$.

$$H_{0d}(z^{-1}) = Q_N(z^{-1}) \tag{7.15}$$

7.1.3. Studiul cauzalității funcției de transfer a RA

Dacă $H_{0d}(z^{-1})$ este funcția de transfer a sistemului închis, atunci funcția de transfer a sistemului deschis $H_d(z^{-1})$ este $H_d(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} H_{0d}(z^{-1})/(1 - H_{0d}(z^{-1}))$; deci, din (7.11) sau (7.15) rezultă:

$$H_d(z^{-1}) = \frac{Q(z^{-1})}{1 - Q(z^{-1})} \tag{7.16}$$

(s-a omis indicele N, pentru $Q(z^{-1})$ din (7.15), deoarece cele două situații, $\tau = 0$ și $\tau \neq 0$, sînt practic disjuncte).

Prin definiție $H_d(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} H_f(z^{-1})\,H_R(z^{-1})$ și de aici rezultă funcția de transfer discretă de reglare, $H_R(z^{-1})$, asociată algoritmului discret în cazul general $\tau = NT \geqslant 0$:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{1}{H_f(z^{-1})}\,H_d(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}\,\frac{Q(z^{-1})}{1 - Q(z^{-1})}\,z^N. \tag{7.17}$$

Cazul $\tau = 0$; $N = 0$. Polinomul $Q(z^{-1})$ din (7.9) se transcrie în z prin:

$$Q(z) = \frac{y_1 z^r + (y_2 - y_1) z^{r-1} + \ldots + 1 - y_r}{z^{r+1}} \triangleq \frac{R_r(z)}{z^{r+1}}, \tag{7.18}$$

unde $R_r(z)$ este polinomul în z de la numărător, cu gradul $\partial R_r(z) = r$.

Totodată, $H_f(z^{-1})$ din (7.1), cu $N = 0$, se transcrie în z prin:

$$H_f(z) = \frac{B_m(z)}{A_n(z)}, \tag{7.19}$$

unde, evident, polinoamele formale $B(z^{-1})$ și $B_m(z)$, și — de asemenea — $A(z^{-1})$ și $A_n(z)$ au coeficienți diferiți, iar $\partial B_m(z) \triangleq m$ și $\partial A_n(z) = n$.

Deoarece funcțiile de transfer se asociază modelelor cauzale la condiții inițiale nule $y_0 = 0$, rezultă:

$$m < n. \tag{7.20}$$

Atunci, funcția de transfer a RA, $H_R(z^{-1})$, transcrisă în z devine (din (7.17) cu $N = 0$):

$$H_R(z) = \frac{A_n(z)}{B_m(z)} \frac{R_r(z)}{z^{r+1} - R_r(z)} \triangleq \frac{E(z)}{C(z)}, \tag{7.21}$$

unde polinoamele $E(z) \triangleq A_n(z)\, R_r(z)$ și $C(z) \triangleq B_m(z)\, [z^{r+1} - R_r(z)]$.

Algoritmul de reglare descris prin $H_R(z)$, din (7.21), este strict cauzal dacă $\partial E(z) < \partial C(z)$ sau

$$n + r < m + r + 1 \text{ ori } m > n - 1. \tag{7.22}$$

Din (7.20) și (7.22) rezultă simultan $n - 1 < m < n$; dar $m, n \in \mathbb{N}$, din care motiv expresia (7.22) este imposibilă ca relație de strictă inegalitate. Așadar, în acest caz, cu $y_0 = 0$, $y_1 \neq 0$ și $m < n$, algoritmul $H_R(z)$ din (7.21) nu poate fi strict cauzal. El este însă cauzal (la limită) în varianta $\partial E(z) = \partial C(z)$ dacă

$$m = n - 1. \tag{7.23}$$

La limită, cînd procesul nu satisface condiția $m = n - 1$, ci $m < n - 1$, sau în general

$$m = n - 1 - q,\ q = 1, 2, .., (r - 1), \tag{7.24}$$

algoritmii cauzali se obțin prin alegerea apriori în (7.7) și a altor eșantioane nule, în afara lui y_0 din (7.4) (cazul $N = 0$); adică, pentru q arbitrar din (7.24) [3]:

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_q = 0 \text{ și } y_{q+1} \neq 0,\ (\forall)\, i \geq 1. \tag{7.25}$$

Polinomul $R_r(z)$, definit în (7.18), are aspectul:

$$R_{r-q}(z) = y_{q+1} z^{r-q} + (y_{q+2} - y_{q+1})\, z^{r-q-1} + \ldots + 1 - y_r, \tag{7.26}$$

cu $\partial R_{r-q}(z) = r - q < r$.

Condiția de cauzalitate a algoritmului (7.21) devine $n + r - q \leqslant m + r + 1$. Pentru m din (7.24) rezultă $n + r - q \leqslant n - 1 - q + r + 1$ sau $0 < 0$, deci și în acest caz, cînd partea fixată din (7.19) are $m < n - 1$, se obțin algoritmi cauzali dacă polinomul $R_r(z)$ din (7.18) se modifică sub forma $R_{r-q}(z)$ din (7.26), prin alegerea suplimentară a eșantioanelor nule din (7.25).

Exemplu. Dacă $m = n - 2$, atunci $q = 1$. Se alege în (7.25) $y_1 = 0$, ceea ce conduce la $R_{r-1}(z)$ din (7.26) și, deci, egalitatea $\partial E(z) = \partial C(z)$ este realizată.

Cînd procesul satisface condiția $m = n - 1$, la care se adaugă $\tau = 0$, $N = 0$ pentru obținerea algoritmilor strict cauzali se recomandă două procedee:

a. Se ia $y_1 = 0$, ceea ce echivalează cu introducerea forțată a unui timp mort, $N = 1$, în răspunsul dorit, deși procesul din (7.1) se caracterizează prin $N = 0$. Atunci, conform (7.26), în (7.18) polinomul $R_r(z)$ devine $R_{r-1}(z)$ și $Q(z)$ din (7.18) se transformă în

$$Q(z) = \frac{R_{r-1}(z)}{z^{r+1}} \tag{7.27}$$

În acest caz, $H_R(z)$ din (7.21), cu substituirea lui $R_r(z)$ prin $R_{r-1}(z)$, devine:

$$H_R(z) = \frac{A_u(z)}{B_m(z)} \frac{R_{r-1}(z)}{z^{r+1} - R_{r-1}(z)} = \frac{E(z)}{C(z)} \tag{7.28}$$

unde $\partial E(z) = n + r - 1$, iar $\partial C(z) = m + r + 1$. Deci, pentru $m = n - 1$ rezultă:

$$\partial E(z) < \partial C(z) \text{ sau } n + r - 1 < n - 1 + r + 1, \text{ ori}$$

$$-1 < 0, \tag{7.29}$$

adică $H_R(z) \triangleq E(z)/C(z)$ a devenit strict cauzal.

b. Dacă se predictează eroarea ε_k, utilizînd predictori de un pas, liniari, $P_I(z)$ sau $P_{II}(z)$ — din (9.100), (9.106) — relația (7.21) devine $H_R(z) \triangleq \frac{E(z)}{C(z)} = \frac{U(z)}{\tilde{\varepsilon}(z)}$ ori $C(z)\,U(z) = E(z)\,\tilde{\varepsilon}(z)$, iar $\tilde{\varepsilon}(z) \triangleq P(z)\,\varepsilon(z)$; deci, $C(z)U(z) = E(z)\,P(z)\,\varepsilon(z)$ și $H_R(z)$ ia forma $\tilde{H}_R(z) = E(z)\,P(z)/C(z)$. Pentru $E(z)$, $C(z)$ din (7.21) și $P_I(z)$ din (9.100), rezultă $\tilde{E}(z) \triangleq E(z)\,(2z - 1)$ și $\tilde{C}(z) \triangleq C(z)\,z^2$, cu $\partial\tilde{E}(z) = n + r + 1$ și $\partial\tilde{C}(z) = m + r + 1 + 2$.

Dacă procesul are $m = n - 1$, atunci $n + r + 1 < n - 1 + r + 1 + 2$ sau $0 < 1$; deci, algoritmul $H_R(z)$ este strict cauzal prin utilizarea predictorului $P_I(z)$. Există însă și restricții în utilizarea predictorilor $P_I(z)$, $P_{II}(z)$, ținîndu-se seama de eroarea de predicție care este direct dependentă de alegerea perioadei de eșantionare T, în raport cu constantele de timp ale modelului continuu (conform §9.5.4)

Cazul $\tau = NT$. Polinomul $Q(z^{-1})$ din (7.14), omițînd indicele N, se transcrie în z prin

$$Q(z) = \frac{1}{z^N} \frac{y_{N+1}z^{r-N} + (y_{N+2} - y_{N+1})\,z^{r-N-1} + \ldots + 1 - y_r}{z^{r+1-N}} \triangleq \frac{R_{r-N}(z)}{z^{r+1}}, \tag{7.30}$$

unde cu $R_{r-N}(z)$ s-a notat polinomul de la numărător, iar $\partial R_{r-N}(z) = r - N$, valoare egală cu $R_{r-q}(z)$ din (7.26), pentru $q = N$. În consecință, $H_R(z)$ din (7.21), cu $H_f(z) = \dfrac{B_m(z)}{A_n(z)} z^{-N}$, $N \neq 0$, devine:

$$H_R(z) = z^N \frac{A_n(z)}{B_m(z)} \frac{R_{r-N}(z)}{z^{r+1} R_{r-N}(z)} \triangleq \frac{E(z)}{C(z)}. \tag{7.31}$$

Pentru polinoamele de la numărător și numitor s-au folosit aceleași notații din (7.21) (relațiile (7.21), (7.31) sînt disjuncte pentru un proces dat), dar evident avînd caracter diferit pentru același r, din punctul de vedere al coeficienților. Gradele acestor polinoame coincid, deoarece $\partial E(z) = N + n + r - N = n + r$ și $\partial C(z) = m + r + 1$. În concluzie, toate considerațiile privind cauzalitatea prezentate anterior ($\tau = 0$) sînt valabile și în cazul studiat.

În situația că $m = n - 1 - q$, $1 \leqslant q \leqslant r - N - 1$, pe lîngă cele N eșantioane nule ale răspunsului dorit în cazul $\tau = NT > 0$, din (7.5) — și bineînțeles, $y_0 = 0$ din (7.4) — se aleg eșantioanele:

$$(y_0 = y_1 = \ldots = y_N) = y_{N+1} = y_{N+2} = \ldots = y_{N+q} = 0 \tag{7.32}$$

Evident, pentru $q \geqslant r - N$, răspunsul indicial devine critic, deci $q \leqslant r - N - 1$ (un salt-treaptă la $k = r + 1$, de la valoarea 0 la valoarea 1).

Polinomul $R_{r-N}(z)$ din (7.30) va fi de forma:

$$R_{r-n-q}(z) = y_{N+1+q} z^{r-(N+q)} + y_{N+2+q} z^{r-(N+q+1)} + \ldots + 1\ y_r, \tag{7.33}$$

cu $\partial R_{r-N-q}(z) = r - (N + q)$.

Substituind, în (7.31), $R_{r-N}(z)$ cu $R_{r-N-q}(z)$ se obține:

$$H_R(z) = z^N \frac{A_n(z)}{B_m(z)} \frac{R_{r-N-q}(z)}{z^{r+1} - R_{r-N-q}(z)}, \quad m = n - 1 - q. \tag{7.34}$$

Dacă în acest caz $H_R(z)$ se notează tot prin $H_R(z) = \dfrac{E(z)}{C(z)}$ atunci, $\partial E(z) = N + n + r - N - q = n + r - q$, iar $\partial C(z) = m + r + 1 = (n - 1 - q) + r + 1 = n + r - q$; deci, $\partial E(z) = \partial C(z)$, iar algoritmul $H_R(z)$ din (7.34) este cauzal la limită, deși $m < n - 1$ sau $m = n - 1 - q$ pentru partea fixată discretă în z.

În situația $\tau = NT > 0$ și $m = n - 1$, pentru a obține algoritmi strict cauzali în (7.31), se aplică procedurile descrise anterior.

7.1.4. Alegerea duratei regimului tranzitoriu, t_r

Din punctul de vedere al alegerii duratei regimului tranzitoriu indicial definit prin:

$$t_r = (r + 1)\, T, \tag{7.35}$$

situația diferă în cele două cazuri $N = 0$ și $N > 0$. Dacă $\tau = 0$, $N = 0$ și $t_r = (r + 1)T$, atunci există r eșantioane nenule și neunitare; în cazul $\tau = NT > 0$, păstrîndu-se același număr de eșantionare, $r (r \neq 0$ și $r \neq 1)$, vor exista numai $r - N$ eșantioane nenule și neunitare ale răspunsului dorit;

deci, durata efectivă (activă) a regimului tranzitoriu al ieșirii scade cu valoarea $\tau = NT$. În această situație răspunsul dorit ajunge de la y_{N+1} (primul eșantion nenul) la valoarea staționară $y_{r+1} = 1$ într-un interval de timp $(r + 1 - N)\,T$ sau $(t_r - NT)$, cu t_r din (7.35). Deci, pentru $\tau > 0$, durata efectivă a regimului tranzitoriu este:

$$t_r^{\tau>0} = t_r^{\tau=0} - NT, \quad t_r^{\tau=0} \triangleq t_r. \tag{7.36}$$

Gradientul în timp al ieșirii dorite y_k crește față de cazul $\tau = 0$, deci implicit și cel al comenzii.

Pentru a menține totuși aceeași durată efectivă a regimului tranzitoriu (deci același număr de eșantioane nenule și neunitare) a răspunsului dorit, în cazul $\tau = NT > 0$, trebuie mărit r la valoarea r' astfel încît:

$$r' = r + N, \tag{7.37}$$

în care primele eșantioane $y_1 = y_2 = \ldots = y_N = 0$, conform (7.5). Rămîn deci $r + N - N = r$ eșantioane nenule și neunitare, ca și în cazul $\tau = 0$.

7.1.5. Numărul maxim de multiplicări și ordinul maxim de regresie al algoritmului de reglare [3]

Atît algoritmul de reglare din (7.21), $\tau = 0$, cît și cel din (7.31), $\tau > 0$, se implementează pe calculator sub forma unor ecuații cu diferențe finite, obținute din $H_R(z)$ prin exprimarea în variabilă z^{-1}, asimilată apoi ca un operator de întîrziere de o perioadă T, aplicat pe eșantioane reale, u_k, ε_k și nu pe funcții complexe, $U(z^{-1})$, $\varepsilon(z^{-1})$.

Se consideră cazul $m = n - 1$, curent întîlnit, în care ambii algoritm din (7.21) și (7.31) sînt cauzali la limită; așadar, folosindu-se aceleași notații, rezultă $H_R(z) = E(z)/C(z)$ și $\partial E(z) = \partial C(z) = n + r \triangleq w$, unde r s-a ales identic în ambele cazuri ($\tau = 0$ și $\tau > 0$), iar r' din (7.37) corespunde situației $\tau = NT > 0$. Se exprimă $H_R(z)$ în variabila z^{-1}; rezultă (cu notații arbitrare):

$$H_R(z^{-1}) = \frac{S'(z^{-1})}{1 - L'(z^{-1})} \triangleq \frac{u_k}{\varepsilon_k} \tag{7.38}$$

sau

$$u_k = L'(z^{-1})\,u_k + S'(z^{-1})\,\varepsilon_k, \tag{7.39}$$

unde polinomul $L'(z^{-1})$ nu are termen liber. Funcția de transfer $H_R(z^{-1})$ din 7.17), cu $N = 0$ sau $N \neq 0$, poate adopta întotdeauna forma (7.38), adică $(\exists)\, S'(z^{-1})$, $L'(z^{-1})$ ce se pot determina fără nici un fel de dificultăți. Deoarece $\partial E(z) = \partial C(z) = n + r = w$, gradele polinoamelor $L'(z^{-1})$ și $S'(z^{-1})$ sînt identice, adică $\partial L'(z^{-1}) = \partial S'(z^{-1}) = w$.

Din algoritmul (7.39) rezultă comanda curentă u_k ce depinde de u_{k-1}, $u_{k-2}, \ldots, u_{k-w}$ și $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \ldots, \varepsilon_{k-w}$.

Se va studia în continuare numărul maxim al regresorilor necesari în calculul comenzii curente și ordinul maxim de regresie al ecuației cu diferențe (7.39) în situațiile $\tau = 0$ și $\tau = NT > 0$.

Cazul $\tau = 0$; $N = 0$ — *relațiile* (7.38) *și* (7.39). Regresorii — în număr de $2w$ — sînt u_{k-1}, u_{k-2}, ..., u_{k-w}, ε_{k-1}, ε_{k-2}, ..., ε_{k-w}. Ordinul maxim de regresie este w. Numărul maxim de multiplicări în timp real, necesare pentru calculul comenzii curente u_k, este $w + w + 1 = 2w + 1 \stackrel{\Delta}{=} \xi$; de menționat că numărul maxim de coeficienți ai lui $L'(z^{-1})$ este w — nu $(w + 1)$ —, întrucît nu există termen liber.

Cazul $\tau = NT$. Se vor discuta două subcazuri:

Subcazul 1. Se păstrează același număr r ca și în cazul $\tau = 0$. În algoritmul specificat în relația (7.31), $\partial E(z) = \partial C(z) = n + r = w$; ca urmare și în situația studiată $\partial L'(z^{-1}) = \partial S'(z^{-1}) = w$.

Dar, în (7.31) polinomul $R_{r-N}(z)$ are maximum $(r - N + 1)$ coeficienți distincți nenuli, pe cînd în (7.18), polinomul $R_r(z)$ avea maximum $r + 1$ coeficienți și $r + 1 > r + 1 - N$. Rezultă că $E(z)$ din (7.31) are aspectul $E(z) = Z^N E'(z)$, $E'(z) = A_n(z)\, R_{r-N}(z)$, cu $\partial E'(z) = n + r - N$; deci, $E'(z)$ posedă un număr de maximum $(n + r - N + 1)$ coeficienți distincți. Funcția de transfer $H_R(z) = z^N \dfrac{E'(z)}{C(z)}$, exprimată în variabilă z^{-1}, devine $H_R(z^{-1}) = \dfrac{S''(z^{-1})}{1 - L''(z^{-1})}$, cu $\partial S''(z^{-1}) = n + r - N$ și $\partial L''(z^{-1}) = n + r = w$, dar coeficienții distincți ai lui $S''(z^{-1})$ sînt egali din punct de vedere numeric cu cei ai lui $E(z)$; numărul lor are valoarea $n + r - N + 1 = \omega - N + 1$.

Funcția $H_R(z^{-1})$ va avea deci forma finală:

$$H_R(z^{-1}) = \frac{S''(z^{-1})}{1 - L''(z^{-1})}, \tag{7.40}$$

unde $\partial L(z^{-1}) = \partial L''(z^{-1}) = n + r = w$, iar $L''(z^{-1})$ nu are termen liber.

În cazul $\tau = NT > 0$, algoritmul de reglare se implementează sub forma

$$u_k = L''(z^{-1})\, u_k + S''(z^{-1})\, \varepsilon_k. \tag{7.41}$$

În subcazul studiat, regresorii — în număr de $2w - N$ — sînt u_{k-1}, u_{k-2}, ..., $u_{k-(n+r)}$ și ε_{k-1}, ε_{k-2}, .., ε_{k-w+N}, iar ordinul maxim de regresie al ecuației (7.41) este $w = n + r$.

Numărul maxim de multiplicări în timp real necesare pentru calculul comenzii curente este egal cu $(w - N + 1) + w = 2w - N + 1 \stackrel{\Delta}{=} \xi'$. Dacă în cazul $\tau = 0$, $\xi = 2w + 1$, atunci în situația $\tau = NT$, păstrîndu-se $t_r = (r + 1)\, T$, rezultă $\xi' = 2w + 1 - N = \xi - N$; deci, numărul multiplicărilor scade cu N, răspunsul avînd N eșantioane nule. În acest caz $\tau > 0$.

Subcazul 2. Durata regimului tranzitoriu se mărește cu N perioade; atunci, conform (7.37), rezultă:

— numărul maxim de regresori, $2n + 2r' - N = 2n + 2(r + N) - N = 2n + 2r + N = 2w + N$;

— ordinul maxim de regresie al ecuației (7.41) devine $w' = n + r' = n + r + N = w + N$;

— numărul maxim de multiplicări, $\xi'' = 2w' - N + 1 = 2(n + r') - N + 1 = 2(n + r + N) - N + 1 = 2n + 2r + N + 1$.

Observațiile privind numărul maxim de multiplicări și ordinul maxim de regresie în cazul $\tau = 0$ și $\tau > 0$, cu subcazurile $t_r = (r + 1)\, T$ și $t'_r = (r' + 1)\, T$ sînt sintetizate în tabelul 7.1.

Tabelul 7.1.

CARACTERISTICI DE IMPLEMENTARE ALE FUNCȚIEI $H_R(z^{-1})$

		Numărul max. de regresori	Ordinul max. de regresie	Nr. max. de multiplicări = nr. max. de coef.	Obs.
$\tau = 0$ $t_r = (r+1)T$		$2n+2r=2w$	$n+r \stackrel{\Delta}{=} w$	$\xi \stackrel{\Delta}{=} 2n+2r+1=$ $=2w+1$	$m=n-1$
$\tau=NT$	$t_r=(r+1)T$	$2n+2r-N=$ $=2w-N$	$n+r=w$	$\xi' \stackrel{\Delta}{=} 2n+2r-N+$ $+1=2w-N+1$	$m=n-1$
	$t'_r=(r'+1)T$ $=(r+N+1)T$	$2n+2r'-N=$ $=2n+2r+N=$ $=2w+N$	$w' \stackrel{\Delta}{=} n+r'=$ $=n+r+N=$ $=w+N$	$\xi'' \stackrel{\Delta}{=} 2n+2r'-N+$ $+1=2n+2r+N+$ $+1=2w+N+1$	$m=n-1$

Datele înscrise în tabel sînt valabile în cazul general, cînd toți coeficienții polinoamelor $E(z)$ și $C(z)$ din (7.21) sau (7.31) sînt distincți, nenuli și neunitari. În diverse situații particulare, valorile maximale din tabel corespunzătoare celor trei coloane se reduc adecvat situației concrete.

7.1.6. **Aspecte privind optimizarea comenzii**

Evoluția în timp a comenzii are importanță prin prisma calității regimurilor dinamice, consumului de energie, uzurii ș.a. [1], [5]. Deoarece, conform relațiilor (7.21) sau (7.31), zerourile părții fixate — zerourile polinomului $B_m(z)$ — devin poli ai funcției $H_R(z)$, există situații cînd modelul discret al părții fixate obținute din modelul continuu cu extrapolatorul de ordinul zero înglobat, adică $H_f(z)$ din (7.19), are zerouri stabile ($|z_{fi}|<1$), dar negative, $z_{fi} \in (-1,0)$.

Fie cazul unui astfel de zerou, $z_f \stackrel{\Delta}{=} -z_1 \in (-1,0)$, al polinomului $B_m(z)$, cu descompunerea $B_m(z)=(z+z_1)B_{m1}(z)$ și $H_R(z)=\dfrac{f(z)}{z+z_1}$, unde $f(z)$ este o funcție rațională în z. Separînd termenul $\dfrac{1}{z+z_1}$ în expresia lui $H_R(z)$ din (7.21), eșantioanele funcției-pondere a lui $H_R(z)$ sînt date de $h_{R_k} \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{1}{2\pi j}\oint\limits_{|z|=1} \times$

$\times \dfrac{f(z)\,z^{k-1}}{z+z_1}\,dz$, iar reziduul aferent polului (negativ) $z=-z_1$ are aspectul general:

$$h^{z_1}_{R_k}=\lim_{z\to z_1}[f(z)z^{k-1}]=(-1)^{k-1}z_1^{k-1}f(-z_1). \tag{7.42}$$

Pentru valori de timp discrete consecutive, $t_k=t_{2p}(k-\text{par})$ și $t_{k+1}=t_{2p+1}$, componentele $h^{z_1}_{R_{2p}}=-f(-z_1)\,z_1^{2p-1}$ și $h^{z_1}_{R_{2p+1}}=f(-z_1)\,z_1^{2p}$ sînt în mărime absolută de valori apropiate (reale), dar de semne contrare.

Dacă $|z_1|<1$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty} h^{z_1}_{R_k}=0$ și oscilațiile se amortizează în timp.

Cînd $|z_1| > 1$, $\lim_{k\to\infty} h_{R_r}^{a1} = \infty$ și oscilațiile cresc în timp.

Se consideră numai cazul $\tau = 0$, deci $H_R(z)$ din (7.21).

În unele situații [1], [2], [3], este posibilă optimizarea comenzii prin anularea polului negativ, $z_f = -z_1$, zerou al polinomului $B_m(z)$, printr-un zerou identic al polinomului $R_r(z)$ din (7.18), conform (7.21).

Polinomul $R_r(z)$ definit prin relația:

$$R_r(z) \stackrel{\Delta}{=} y_1 z^r + (y_2 - y_1) z^{r-1} + \ldots + (y_r - y_{r-1}) z + 1 - y_r \qquad (7.43)$$

îndeplinește condiția $R_r(1) = 1$, simplu de verificat, provenind din condiția de eroare de poziție nulă, $H_{0d}(1) = Q(1) = 1$.

Se impune modificarea polinomului $R_r(z)$ din (7.43) la aspectul $R_r^{opt}(z)$, care păstrează condiția $R_r^{opt}(1) = 1$, dar care se anulează în $z = -z_1$; deci, $R_r^{opt}(-z_1) = 0$, $z_1 \in (0,1)$.

În [3] se propune alegerea polinomului optimizat $R_r^{opt}(z)$ sub forma:

$$R_r^{opt}(z) = R_r(z) + \frac{R_r(-z_1)}{1+z_1}(z-1), \qquad (7.44)$$

care satisface ambele condiții, $R_r^{opt}(1) = R_r(1) = 1$ și $R_r^{opt}(-z_1) = 0$.

Se notează:

$$\tilde{m} = \frac{R_r(-z_1)}{1+z_1}; \qquad (7.45)$$

atunci,

$$R_r^{opt}(z) = R_r(z) + \tilde{m}z - \tilde{m}. \qquad (7.46)$$

Coeficienții termenului $\tilde{m}z - \tilde{m}$ modifică doar coeficienții corespunzători lui z^1 și z^0 din expresia lui $R_r(z)$. Rezultă:

$$R_r^{opt}(z) = y_1 z^r + (y_2 - y_1) z^{r-1} + \ldots + (y_r - y_{r-1} + \tilde{m}) z + \\ + (1 - y_r - \tilde{m}). \qquad (7.47)$$

Notînd eșantioanele modificate cu $\tilde{y}_{r-1}$ și $\tilde{y}_r$, rezultă:

$$\tilde{y}_r - \tilde{y}_{r-1} = y_r - y_{r-1} + \tilde{m} \qquad (7.48)$$

și

$$1 - \tilde{y}_r = 1 - y_r - \tilde{m}, \qquad (7.49)$$

de unde

$$\tilde{y}_{r-1} = y_{r-1} \qquad (7.50)$$

și

$$\tilde{y}_r = y_r + \tilde{m}. \qquad (7.51)$$

Așadar, singurul eșantion al răspunsului dorit care se modifică, utilizîndu-se polinomul $R_r^{opt}(z)$ în locul polinomului $R_r(z)$, este y_r; acesta devine $\tilde{y}_r$ din (7.51), restul eșantioanelor răspunsului dorit, $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$, rămînînd neschimbate.

Dacă „alterarea" eșantionului dorit, y_r, la momentul rT este excesivă, atunci optimizarea comenzii prin această procedură nu se recomandă [3]. Practic, pentru $\tilde{m} \leqslant (10\% \ldots 15\%)\, y_r$, indiferent de tipul răspunsului, aperiodic sau oscilant amortizat, modificarea eșantionului y_r la valoarea $\tilde{y}_r$ din (7.51) este acceptabilă.

O altă modalitate de obținere a polinomului optimizat $R_r^{opt}(z)$ constă în modificarea tuturor eșantioanelor răspunsului dorit [3] conform relației:

$$\tilde{y}_i = y_i + \eta, \quad i = \overline{1,\ r}. \tag{7.52}$$

Atunci, noul polinom $R_r^{opt}(z)$ devine:

$$R_r^{opt}(z) = (y_1 - \eta)\, z^r + (y_2 - y_1)\, z^{r-1} + \ldots + \\ + (y_r - y_{r-1})\, z + (1 - y_r - \eta) \tag{7.53}$$

și satisface condiția $R_r^{opt}(1) = 1$.

Polinomul $R_r^{opt}(z)$ din (7.53) se scrie sub forma:

$$R_r^{opt}(z) = R_r(z) + \eta z^r - \eta, \tag{7.54}$$

unde $R_r(z)$ este dat în (7.43).

Din condiția $R_r^{opt}(-z_1) = 0$ rezultă:

$$\eta = \frac{R_r(-z_1)}{1 - (-z_1)^r}. \tag{7.55}$$

Comparîndu-se termenul $\tilde{m}$ din (7.45) cu η din (7.55), se constată că

$$|\tilde{m}| < |\eta|. \tag{7.56}$$

Deci, prin această variantă, „alterarea" tuturor eșantioanelor modifică net răspunsul dorit, fiind mai puțin utilizabilă decît varianta din (7.44), (7.47).

Obținerea polinomului optimizat în exprimarea în variabilă z^{-1}. În cazul cînd eșantionul $\tilde{y}_r$ este modificat excesiv devenind $\tilde{y}_r$ din (7.51) — valoare care poate fi implicată în mărimea suprareglajului pentru răspunsuri oscilante) sau în mărimea duratei regimului tranzitoriu — în [1], [2] se indică o metodă de optimizare a comenzii prin care în final se modifică doar primul eșantion nenul al ieșirii dorite (y_1 în cazul $\tau = 0$). Metoda utilizează exprimarea în variabila inversă z^{-1} a tuturor funcțiilor de transfer și a polinoamelor implicate.

Dacă în (7.17), pentru $N = 0$, se notează $Q(z^{-1}) \triangleq z^{-1}S(z^{-1})$, atunci funcția de transfer a RA devine:

$$H_n(z^{-1}) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} \frac{z^{-1}S(z^{-1})}{1 - z^{-1}S(z^{-1})}, \tag{7.57}$$

unde

$$S(z^{-1}) = y_1 + (y_2 - y_1)\, z^{-1} + \ldots + (y_r - y_{r-1})\, z^{-(r-1)} + \\ + (1 - y_r)\, z^{-r}. \tag{7.58}$$

Dacă, în cazul anterior, polinomul $B_m(z)$ avea rădăcina $z_{f1} = -z_1 \in (-1,0)$, acum $B(z^{-1})$ are rădăcina $z_{f_1}^{-1} = (-z_1)^{-1}$.

Polinomul optimizat se alege sub forma [1]:

$$S^{opt}(z^{-1}) = S(z^{-1}) - \frac{S(z_{f_1}^{-1})}{1 - z_{f_1}^{-1}}(1 - z^{-1}). \tag{7.59}$$

care satisface ambele deziderate impuse lui $R_r^{opt}(z)$ din (7.44); deci, $S^{opt}(1) = 1$ și $S^{opt}(z_{f_1}^{-1}) = 0$.

Se notează:

$$\tilde{n} = \frac{S(z_{f_1}^{-1})}{1 - z_{f_1}^{-1}}; \tag{7.60}$$

atunci,

$$S^{opt}(z^{-1}) = S(z^{-1}) + \tilde{n}z^{-1} - \tilde{n} \tag{7.61}$$

sau

$$S^{opt}(z^{-1}) = y_1 - \tilde{n} + (y_2 - y_1 + \tilde{n})z^{-1} + \ldots + \\ + (y_r - y_{r-1})z^{-(r-1)} + (1 + y_r)z^{-r}. \tag{7.62}$$

Polinoamele $S^{opt}(z^{-1})$ și $S(z^{-1})$ diferă numai prin coeficienții lui z^0 și z^{-1}.

Notîndu-se eșantioanele modificate prin $\tilde{y}_1$ și $\tilde{y}_2$, rezultă:

$$\tilde{y}_1 = y_1 - \tilde{n} \text{ și } \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 = y_2 - y_1 + \tilde{n}, \tag{7.63}$$

de unde:

$$\tilde{y}_2 = y_2 \text{ și } \tilde{y}_1 = y_1 - \tilde{n}; \tag{7.64}$$

așadar, prin optimizarea comenzii se modifică doar primul eșantion nenul al răspunsului dorit, y_1.

În această variantă nu se discută despre afectarea suprareglajului sau duratei regimului tranzitoriu, dar se pune problema realizabilității oricărei condiții inițiale nenule în caz real, $\tilde{y}_1 \neq 0$. De exemplu, dacă din calcule rezultă o valoare $\tilde{n}$ astfel încît $\tilde{y}_1 < 0$, deci $y_1 < \tilde{n}$ și $\tilde{n} > 0$, atunci $\tilde{y}_1$ nu se poate realiza. De asemenea, dacă valoarea $\tilde{y}_1$ este excesiv de mare în raport cu condiția inițială $y_0 = 0$ (din 7.4), atunci sistemul de reglare nu poate „aduce" ieșirea $y_{k=1}$ la valoarea $\tilde{y}_1$, din valoarea $y_0 = 0$, într-o singură perioadă de eșantionare, T. Orice restricție procesuală care nu permite realizarea exactă a valorii y_1 din (7.64) modifică $S^{opt}(z^{-1})$, care nu mai anulează precis zeroul procesului; ca urmare, comanda nu mai este optimizată conform prescripțiilor de proiectare stabilite apriori.

În concluzie, se recomandă utilizarea polinomului — dintre $R_r^{opt}(z)$ sau $S^{opt}(z^{-1})$ — care introduce modificări minime în răspunsul dorit al SA, iar în cazul unor modificări semnificative, acel polinom corespunzător căruia modificările introduse în răspunsul dorit sînt acceptabile din punct de vedere procesual, depinzînd deci de contextul particular al fiecărei aplicații industriale în care algoritmii de reglare sînt proiectați prin metoda prezentată în acest capitol.

7.2. EXEMPLE

7.2.1. Algoritm de reglare cauzal la limită

Se consideră partea fixată continuă descrisă prin modelul $H_f'(s) = \dfrac{K_f}{1 + T_f s}$; rezultă modelul discret $H_f(z) = \dfrac{K_f(1-b)}{z-b}$, unde $b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}$, T este perioada de eșantionare, iar $\widetilde{K}_f \triangleq K_f(1-b)$. Funcția $H_f(z)$ (înglobînd extrapolatorul de ordin zero) nu are zerouri, din care motiv nu se pune problema optimizării comenzii.

Se alege un răspuns indicial unitar dorit cu durata $t_r = 5T$, deci cu $r = 4$, avînd eșantioanele:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0{,}2,\ y_2 = 0{,}4,\ y_3 = 0{,}6,\ y_4 = 0{,}8,\ y_{4+i} = 1, \qquad (7.65)$$

unde $i \geqslant 1$.

Din (7.65), conform (7.8), rezultă funcția de transfer (în z^{-1}) a ieșirii dorite a SA:

$$Y_d(z^{-1}) \frac{0{,}2\,z^{-1} + 0{,}2\,z^{-2} + 0{,}2\,z^{-3} + 0{,}2\,z^{-4} + 0{,}2\,z^{-5}}{1 - z^{-1}}. \qquad (7.66)$$

Pentru mărimea de referință $R(z^{-1}) = \dfrac{1}{1 - z^{-1}}$ se obține, conform (7.11), funcția de transfer dorită a sistemului închis:

$$H_{0d}(z^{-1}) = Q(z^{-1}) = 0{,}2(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + z^{-5})$$

și

$$Q(z) = \frac{0{,}2(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)}{z^5} = \frac{R_4(z)}{z^1}. \qquad (7.67)$$

Alura răspunsului dorit este dată în fig. 7.1.
(Din 7.21) rezultă funcția de transfer a RA:

$$H_R(z) = \frac{z-b}{\widetilde{K}_f} \frac{R_4(z)}{z^5 - R_4(z)} = \frac{0{,}2}{\widetilde{K}_f} \frac{z^5 + (1-b)(z^4 + z^3 + z^2 + z) - b}{z^5 - 0{,}2(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1)} \qquad (7.68)$$

Pentru cazul numeric $K_f = 1$, $T_f = 10$ s, $T_f = 2$ s, se obține $b \cong$ $\cong 0{,}8187$.

Prin substituirea valorilor numerice anterioare în (7.68) și exprimarea funcției de transfer a RA în variabila z^{-1}, deci $H_R(z^{-1})$, cu

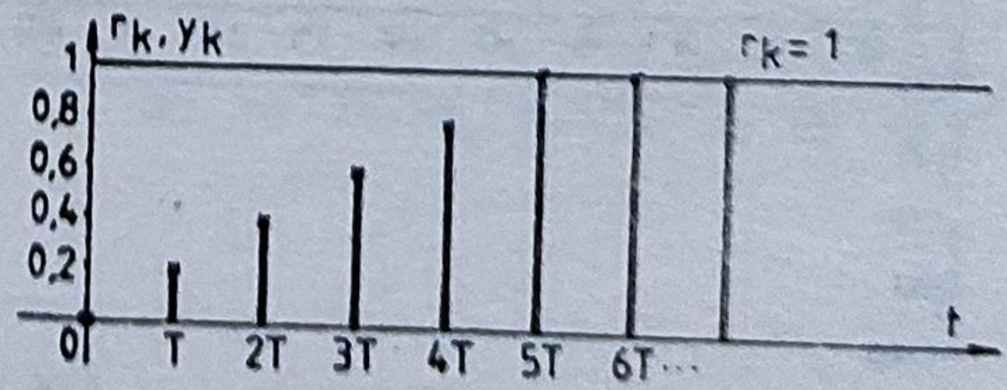


Fig. 7.1

$H_R(z^{-1}) \triangleq \frac{u_k}{\varepsilon_k}$, rezultă algoritmul recursiv prin care funcția $H_R(z^{-1})$ este implementată în RD:

$$u_k = 0{,}2(u_{k-1} + u_{k-2} + u_{k-3} + u_{k-4} + u_{k-5}) + 1{,}1031\ \varepsilon_k + \\ + 0{,}2\ (\varepsilon_{k-1} + \varepsilon_{k-2} + \varepsilon_{k-3} + \varepsilon_{k-4}) - 0{,}9031\ \varepsilon_{k-5}. \qquad (7.69)$$

Datorită alegerii alurii în rampă crescătoare a eșantioanelor y_k dorite (vezi fig. 7.1), algoritmul (7.69) necesită, *on-line*, doar patru multiplicări. În cazul general, conform tabelului 7.1, numărul maxim de multiplicări este $2n + 2n + 1 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 = 11$. O astfel de alură nu convine însă în cazul real al unor mărimi de referință tip rampă ale SA, întrucît eroarea de viteză este mare.

Deoarece comanda curentă, u_k, depinde și de ε_k, algoritmul (7.69) este cauzal la limită.

Se simulează bucla închisă discretă în care RA este descris prin algoritmul (7.69), iar partea fixată discretă prin modelul:

$$y_k = by_{k-1} + K_f(1 - b)\ u_{k-1} \text{ sau } y_k = 0{,}8187\ y_{k-1} + 0{,}1813\ u_{k-1}. \qquad (7.70)$$

Alura directă în timp a răspunsului y_k și a comenzii u_k este descrisă în fig. 7.2, unde momentul de timp inițial este t_1, cînd referința SA are un salt în treaptă unitate (din motive de simulare pe calculator).

Mărimea reglată (măsurată) y_k variază în plaja [0,1], din care motiv ea nu necesită factori de scalare; totodată, comanda u_k variază în plaja $(0 \div 1{,}87)$, necesitînd în reprezentarea internă fracționară factorul de scalare 1/1,87. Pentru ca efectul global al introducerii acestui factor de scalare să nu fie resimțit, elementul de execuție EE trebuie calibrat corespunzător prin introducerea unei amplificări de 1,87 (în adaptorul analogic al EE), conform § 2.9.

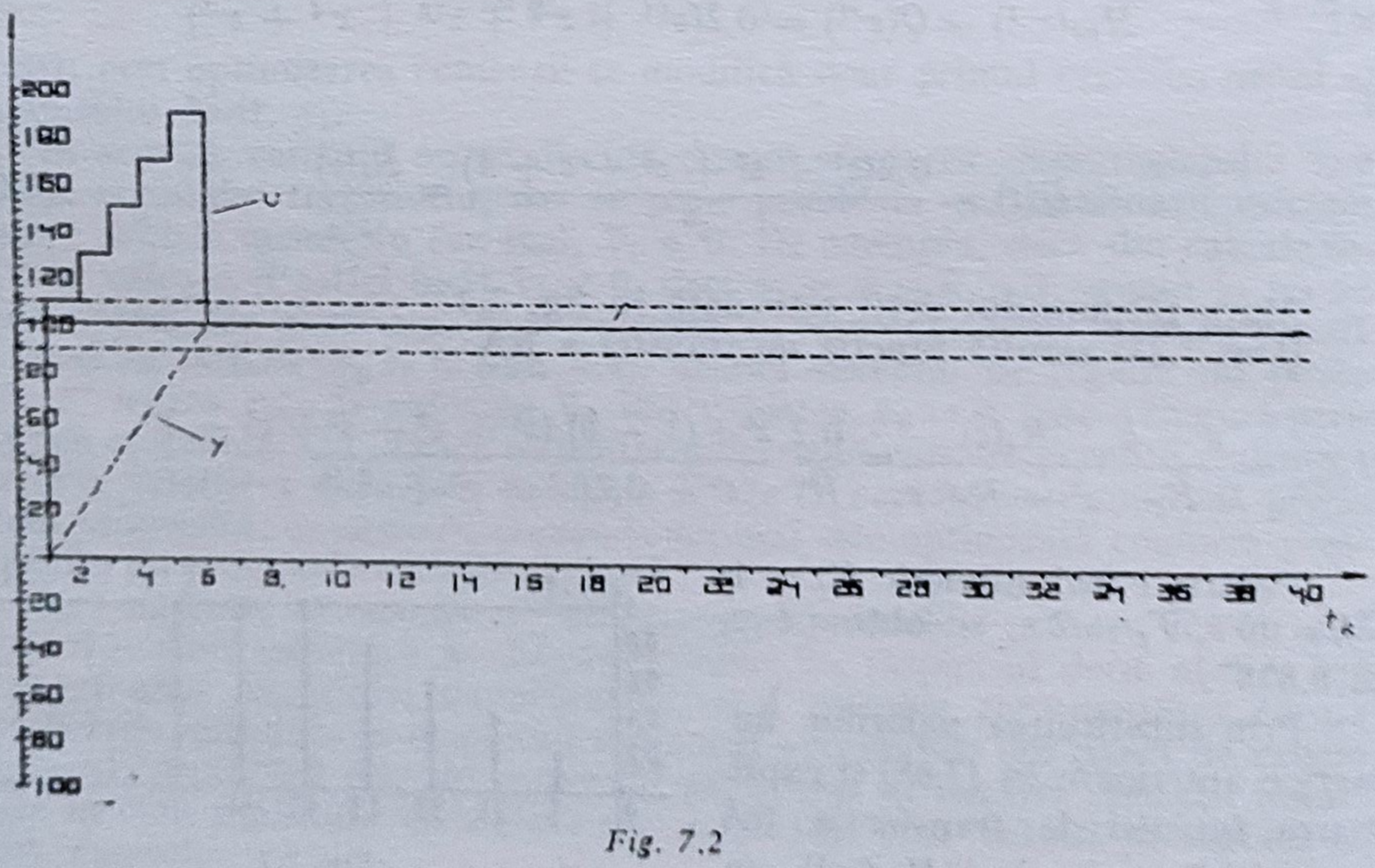


Fig. 7.2

7.2.2. Algoritm de reglare strict cauzal

Deoarece, din motive legate de viteza redusă de calcul a RD, algoritmul de reglare descris în (7.69) se află la limită de cauzalitate, se dorește obținerea unui algoritm de reglare strict cauzal. În acest scop se consideră și $y_1 = 0$. Pentru aceeași durată a regimului tranzitoriu, $t_r = 5T$, și pentru $r = 4$ eșantioanele răspunsului dorit se aleg astfel:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0{,}4,\ y_3 = 0{,}6,\ y_4 = 0{,}8,\ y_{4+i} = 1 (\forall)\ i \geqslant 1. \quad (7.71)$$

Răspunsul dorit $Y_d(z^{-1})$ este:

$$Y_d(z^{-1}) = \frac{0{,}4\, z^{-2} + 0{,}2\, z^{-3} + 0{,}2\, z^{-4} + 0{,}2\, z^{-5}}{1 - z^{-1}}. \quad (7.72)$$

Pentru aceeași mărime de referință, ca și în primul exemplu, se obține funcția de transfer dorită a sistemului închis:

$$H_{0d}(z^{-1}) = Q(z^{-1}) = 0{,}4\, z^{-2} + 0{,}2\, z^{-3} + 0{,}2\, z^{-4} + 0{,}2\, z^{-5};$$

deci,
$$Q(z) = \frac{0{,}4\, z^3 + 0{,}2\, z^2 + 0{,}2\, z + 0{,}2}{z^5} \triangleq \frac{R_3(z)}{z^1}, \quad (7.73)$$

observîndu-se diferența dintre polinomul $R_3(z)$ din (7.73) și $R_4(z)$ din (7.67).

Considerîndu-se același model numeric din exemplul precedent, $K_f = 1$, $T_f = 10$ s; și $T = 2$ s, se obține algoritmul recursiv de reglare:

$$u_k = 0{,}4\, u_{k-2} + 0{,}2\, (u_{k-3} + u_{k-4} + u_{k-5}) + 2{,}2067\, \varepsilon_{k-1} -$$
$$- 0{,}7033\, \varepsilon_{k-2} + 0{,}2\, (\varepsilon_{k-3} + \varepsilon_{k-4}) - 0{,}9033\, \varepsilon_{k-5}. \quad (7.74)$$

Deoarece comanda u_k depinde de ε_{k-1} și nu de ε_k, ca și în (7.69), algoritmul de reglare (7.74) este strict cauzal.

Se simulează bucla închisă discretă, partea fixată discretă fiind descrisă în (7.70). Evoluția în timp a mărimilor y_k și u_k este descrisă în fig. 7.3.

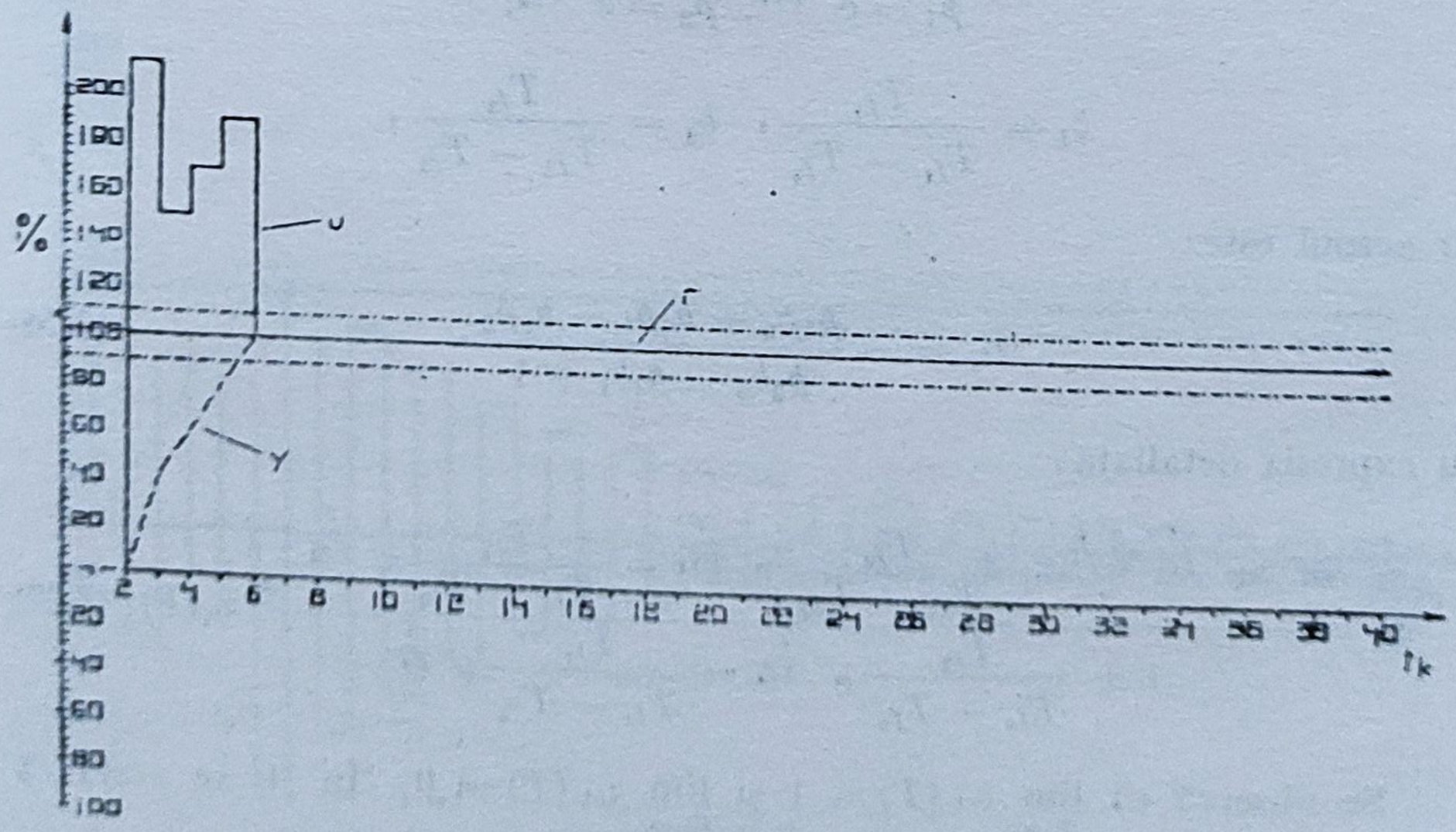


Fig. 7.3

Saltul de la valoarea $y_1 = 0$ la $y_2 = 0{,}4$ este dublu față de exemplul precedent. Orice altă alegere a eșantioanelor y_2, y_3, și y_4 generează un răspuns dorit cu un gradient în timp mai mare decît în cazul ilustrat de relația (7.65), dacă durata regimului tranzitoriu, $t_r = 5T$, rămîne aceeași. Cînd t_r se mărește cu o perioadă de eșantionare ($N = 1$, prin introducerea forțată a valorii $y_1 = 0$), deci impunînd $t'_r = t_r + T$, se poate obține un răspuns dorit identic cu cel din (7.65), dar întîrziat cu o perioadă de eșantionare.

Considerațiile relevate în cadrul primului exemplu rămîn valabile și aici, factorul de scalare al comenzii modificîndu-se adecvat.

7.2.3. Algoritm cauzal pentru procese cu zerouri stabile negative

Se consideră partea fixată continuă descrisă prin modelul:

$$H'_f(s) = \frac{K_f}{(1 + T_{f_1}s)(1 + T_{f_2}s)}.$$

Partea fixată discretă, cu extrapolator de ordinul zero, este descrisă prin modelul (relația 6.4):

$$H_f(z) = K_f(1 + p_2b_2 - p_1b_1)\,\frac{z + \dfrac{p_1p_2 + b_2p_1 - b_1p_2}{p_2b_2 - p_1b_1 + 1}}{(z - p_1)(z - p_2)}, \qquad (7.75)$$

unde

$$p_1 = e^{-\frac{T}{T_{f_1}}},\quad p_2 = e^{-\frac{T}{T_{f_2}}},$$

$$b_1 = \frac{T_{f_1}}{T_{f_1} - T_{f_2}},\quad b_2 = \frac{T_{f_2}}{T_{f_1} - T_{f_2}},$$

iar zeroul este:

$$z_{f_1} = -\frac{p_1p_2 + b_2p_1 - b_1p_2}{p_2b_2 - p_1b_1 + 1}, \qquad (7.76)$$

cu expresia detaliată:

$$z_{f_1} = -\frac{e^{-\frac{T}{T_{f_1}} - \frac{T}{T_{f_2}}} + \frac{T_{f_2}}{T_{f_1} - T_{f_2}}e^{-\frac{T}{T_{f_1}}} - \frac{T_{f_1}}{T_{f_1} - T_{f_2}}e^{-\frac{T}{T_{f_2}}}}{1 + \frac{T_{f_2}}{T_{f_1} - T_{f_2}}e^{-\frac{T}{T_{f_2}}} - \frac{T_{f_1}}{T_{f_1} - T_{f_2}}e^{-\frac{T}{T_{f_1}}}} \triangleq z_{f_1}(T). \qquad (7.77)$$

Se observă că $\lim\limits_{T\to 0} z_{f1}(T) = 1$ și $\lim\limits_{T\to\infty} z_{f1}(T) = 0$. În [1] se arată că $(\forall)\ T > 0,\ z_{f1} \in (-1,0)$.

Pentru $T_{f1} = 10$ s și $T_{f2} = 15$ s, alegînd $T = 2$ s $= \frac{1}{5} \min \{T_{f1}, T_{f2}\}$. rezultă:

$$z_{f1} \simeq -0{,}8951. \tag{7.78}$$

În cazul numeric $K_f = 20$,

$$H_f(z) = 0{,}2388 \frac{z + 0{,}8951}{z^2 - 1{,}6939z + 0{,}7165}, \tag{7.79}$$

funcție simulată prin algoritmul recursiv:

$$y_k = 1{,}6939\, y_{k-1} - 0{,}7165\, y_{k-2} + 0{,}2388\, u_{k-1} + 0{,}2137\, u_{k-2}. \tag{7.80}$$

Se impune durata $t_r = 5T$, deci $r = 4$, și eșantioanele răspunsului dorit, identice cu cele din (7.65), au valorile $y_0 = 0$; $y_1 = 0{,}2$; $y_2 = 0{,}4$; $y_3 = 0{,}6$; $y_4 = 0{,}8$; $y_{4+i} = 1$, cu $i \geqslant 1$.

Din relațiile (7.66), respectiv, (7.67) rezultă $Y_d(z^{-1})$ și $Q(z)$.

Pentru $H_f(z)$ din (7.79), conform formulei generale (7.21), se obține algoritmul de reglare cauzal la limită fără optimizarea comenzii:

$$\begin{aligned} u_k = {} & -0{,}6951\, u_{k-1} + 0{,}379(u_{k-2} + u_{k-3} + u_{k-4} + u_{k-5}) + \\ & + 0{,}179\, u_{k-6} + 0{,}8375\, \varepsilon_k - 0{,}5811\, \varepsilon_{k-1} + 0{,}019(\varepsilon_{k-2} + \varepsilon_{k-3} + \varepsilon_{k-4}) - \\ & - 0{,}8186\, \varepsilon_{k-5} + 0{,}6001\, \varepsilon_{k-6}. \end{aligned} \tag{7.81}$$

Se simulează bucla închisă discretă, obținîndu-se răspunsul y_k și comanda u_k, $k \geqslant 1$ (fig. 7.4).

După terminarea regimului tranzitoriu, $y_{6+i} = 1$, $(\forall)\, i \geqslant 0$, comanda oscilează puternic, tinzînd în regim staționar spre valoarea $\frac{y_\infty}{K_f} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

Aceste oscilații puternice ale comenzii (*ring-ging*) se datoresc prezenței, printre polii regulatorului (7.81), a valorii z_{f1} din (7.78).

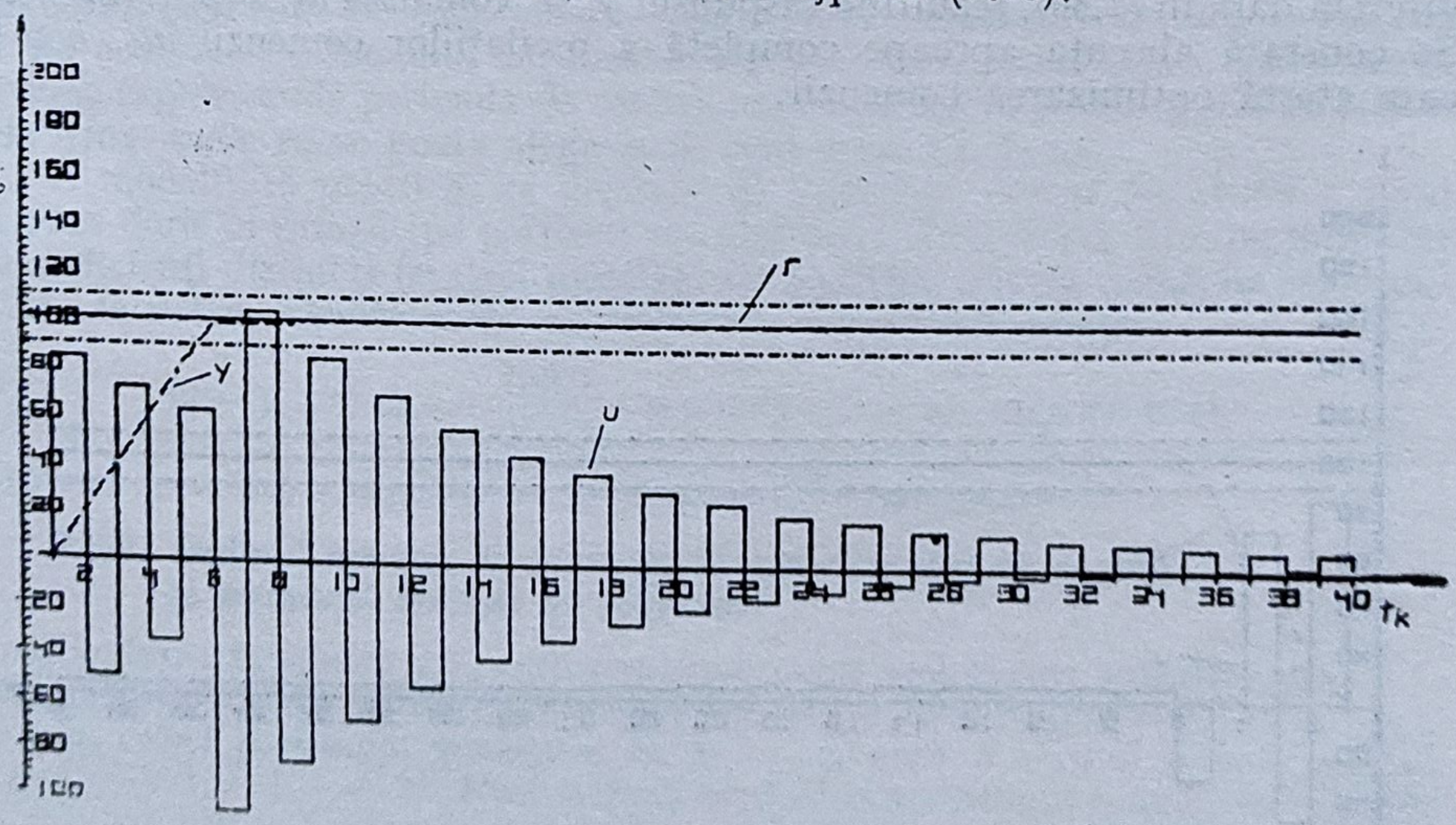


Fig. 7.4

7.2.4. Optimizarea comenzii

Datorită aspectului oscilant nefavorabil al comenzii u_k (fig. 7.4), este necesară optimizarea comenzii pentru eliminarea polului negativ al RA, $p = z_{f1} = -0{,}8951$. Comanda se optimizează utilizîndu-se prima variantă descrisă în § 7.1.6., deci cu polinomul $R_4^{opt}(z)$ dat în expresia generală din (7.44) și (7.47).

Deoarece $Y_d(z^{-1})$ și $Q(z)$ din exemplele anterioare coincid cu expresiile din exemplul 7.2.1, rezultă:

$$R_4(z) = 0{,}2\,z^4 + 0{,}2\,z^3 + 0{,}2\,z^2 + 0{,}2\,z + 0{,}2. \tag{7.82}$$

Pentru z_{f1} din (7.78), parametrul $\tilde{m}$ din (7.45) are valoarea:

$$\tilde{m} = \frac{R_4(z_{f_1})}{1 - z_{f_1}} = \frac{R_4(-0{,}8951)}{1{,}8951} \simeq 0{,}0877. \tag{7.83}$$

Singurul eșantion al răspunsului dorit, modificat prin procedura de optimizare, este $y_r = y_4 = 0{,}8$; se constată că $\tilde{m} \simeq 10{,}8\%\ y_4$, adică „alterarea" eșantionului y_4 este admisibilă, rezultînd $\tilde{y}_4 = y_4 + \tilde{m} \simeq 0{,}8877$. Atunci, conform (7.47), polinomul optimizat $R_4^{opt}(z)$ este:

$$R_4^{opt}(z) = 0{,}2\,z^4 + 0{,}2\,z^3 + 0{,}2\,z^2 + 0{,}2877\,z + 0{,}1123 \tag{7.84}$$

Ținîndu-se seama de formula generală (7.21), cu $R_4^{opt}(z)$ din (7.84), rezultă $H_R(z)$ care se implementează sub forma algoritmului recursiv:

$$\begin{aligned} u_k = {} & -0{,}6951\,u_{k-1} + 0{,}379\,(u_{k-2} + u_{k-3}) + 0{,}4667\,u_{k-4} + 0{,}3698\,u_{k-5} + \\ & + 0{,}1001\,u_{k-6} + 0{,}8375\,\varepsilon_k - 0{,}5812\,\varepsilon_{k-1} + 0{,}019\,\varepsilon_{k-2} + 0{,}3861\,\varepsilon_{k-3} - \\ & - 0{,}9702\,\varepsilon_{k-4} + 0{,}0665\,\varepsilon_{k-5} + 0{,}337\,\varepsilon_{k-6}. \end{aligned} \tag{7.85}$$

Se simulează bucla închisă discretă cu RA dat în (7.85) și partea fixată discretă dată în (7.80), rezultînd răspunsul y_k și comanda u_k, $k \geqslant 1$, (fig. 7.5). Se constată absența aproape completă a oscilațiilor comenzii u_k, $k \geqslant 6$, care atestă optimizarea comenzii.

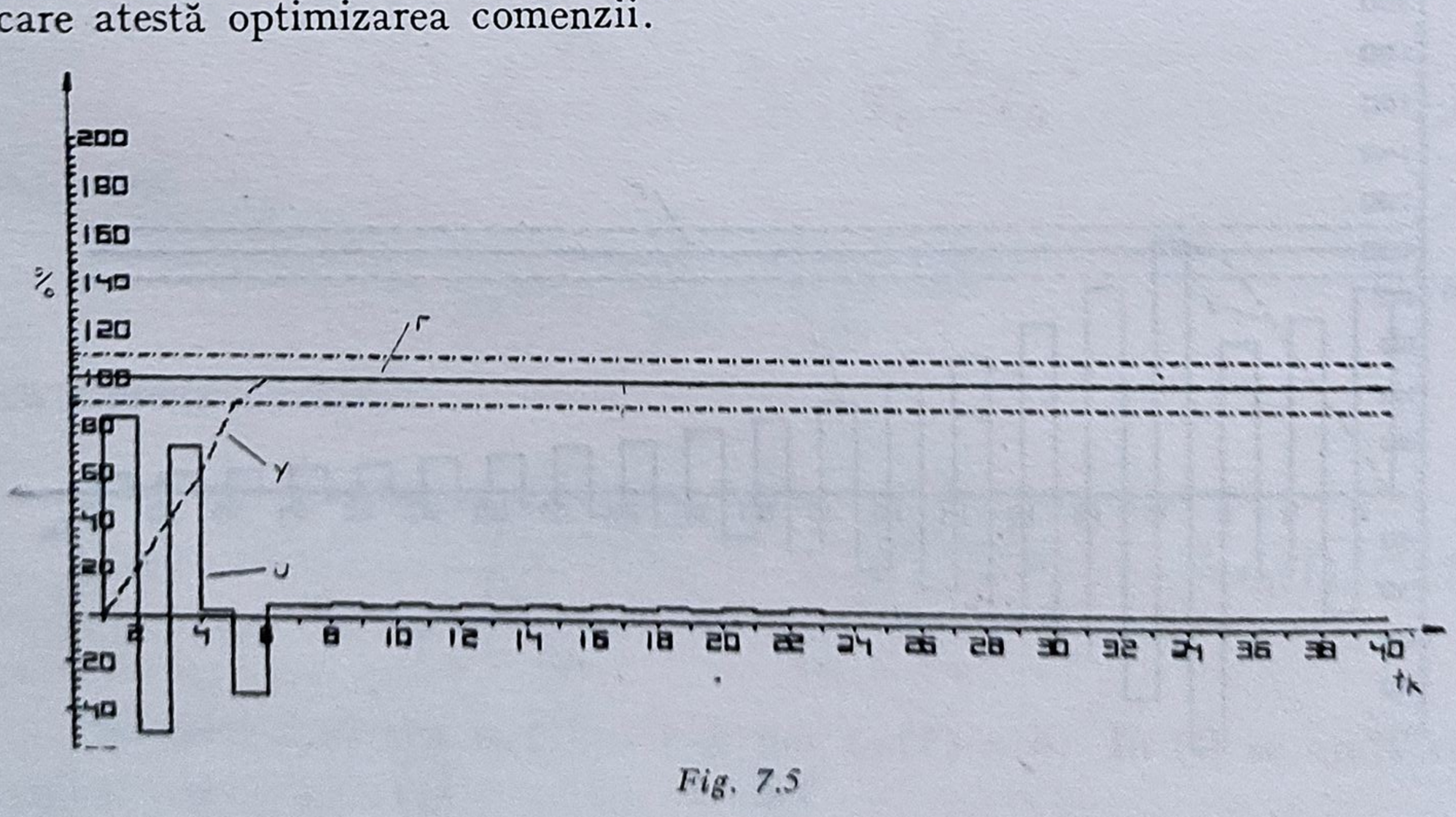


Fig. 7.5

7.3. CONCLUZII REFERITOARE LA IMPLEMENTAREA ALGORITMILOR DE REGLARE PROIECTAȚI [3]

Datorită resurselor *hardware* și *software* limitate ale RD și flexibilității de interfațare mai reduse, implementarea unor algoritmi cu un număr mare de coeficienți, cu ordin de regresie maxim, calculele în timp real fiind și ele numeroase, trebuie realizată cu discernămînt, în funcție de contextul aplicației abordate și de RD. Astfel de restricții însă se diminuează sau dispar la sistemele mari de conducere a proceselor (cum sînt calculatoarele de proces).

7.3.1. Numărul maxim de coeficienți ai algoritmului de reglare

Acest aspect se referă la situația generală cînd toți coeficienții sînt nenuli, neunitari și distincți între ei, doi cîte doi.

În tabelul 7.1, în coloana a treia, au fost prezentate cele trei cazuri tratate: $\tau = 0$ și durata regimului tranzitoriu $t_r = (r + 1)\,T$, $\tau = NT$ și $t_r = (r + 1)\,T$ (r fiind același) și, respectiv, $\tau = NT$, dar durata regimului tranzitoriu se mărește cu $\tau = NT$, adică $t'_r = (r' + 1)\,T$, cu $r' = r + N$

Considerîndu-se modelul discret $H_f(z)$ aferent modelelor continue cu o constantă de timp din exemplul 7.2.1, deci cu $n = 1$ și $m = n - 1$, cel mai simplu model dinamic discret, rezultă un număr maximal de multiplicări conform celor trei cazuri amintite: $2r + 3$, $2r + 3 - N$ și, respectiv $2r + 3 + N$. Luîndu-se durata t_r ca în exemplul 7.2.1, $r = 4$, rezultă $2 \cdot 4 + 3$, $2 \cdot 4 + 3 - N$ și $2 \cdot 4 + 3 + N$, respectiv 11; $11 - N$ și $11 + N$.

Pentru $\tau = 0$, $N = 0$, numărul maxim de multiplicări în acest caz particular — egal cu 11 — este excesiv de mare, întrucît ele se efectuează *on-line*, în buclă închisă, iar algoritmul este cauzal la limită, adică $u_k = g(\varepsilon_k, \ldots)$. În ceea ce privește algoritmii cauzali la limită, se pune problema timpului de calcul al algoritmului de reglare, t_c, care trebuie să se afle într-o anumită relație cu perioada de eșantionare, astfel încît modelul real $u_{k+t_c} = g(\varepsilon_k, \ldots)$ să fie asimilat cu modelul idealizat. Aspectul menționat apare îndeosebi la procese rapide, unde perioada de eșantionare este mică, și mai puțin la procesele lente, unde ea se poate alege mult mai mare ($T \gg t_c$).

O modalitate practică, ce depinde de aplicație, constă în alegerea unui răspuns dorit în rampă (pe porțiuni sau complet). În această situație numărul de coeficienți distincți (și deci numărul de multiplicări) s-a redus, în exemplul 7.2.1., la patru. Eșantioanele ieșirii dorite, y_i, satisfac relația:

$$y_i - y_{i-1} \stackrel{\Delta}{=} \Delta = \frac{100\,\%}{r + 1} = \frac{1}{r + 1}, \quad i = 2, 3, \ldots (r + 1).$$

Eroarea de viteză a unui astfel de răspuns este însă mare.

7.3.2. Ordinul maxim de regresie al algoritmului de reglare și numărul maxim de regresori

Conform tabelului 7.1, corespunzător celor trei cazuri amintite în 7.3.1, ordinele maxime de regresie sînt respectiv $n + r$, $n + r$ și $n + r + N$.

În cazul particular prezentat în § 4.1, pentru $N = 0$ și $n = 1$, rezultă $r + 1$, $r + 1$, $r + 1 + N$. Deci, atunci cînd $N = 0$, ordinul maxim de regresie este egal cu durata regimului tranzitoriu în multipli de T, adică $r + 1 = \frac{t_r}{T}$.

Alegîndu-se t_r în unități absolute de timp, produsul celor doi parametri de proiectare, rT, este egal cu o constantă dată (t_r^{impus}).

Dacă r se alege mic, T crește, din care motiv pot să apară erori de cuantificare în timp, iar — dacă r se mărește — atunci — conform § 4.1 — crește și numărul de multiplicări cerute de algoritmul de reglare. În cazul prezenței timpului mort $\tau = NT > 0$, ordinul de regresie se mărește la valorile enunțate anterior.

Din punctul de vedere al implementării algoritmilor cu ordin de regresie mare în RD apar două dificultăți:

- inițializarea cît mai corectă a regresorilor u_{k-i} și ε_{k-i}, $i = \overline{1,w}$ (w — ordinul maxim de regresie). O inițializare de tipul $u_{k-i} = 0$; $\varepsilon_{k-i} = 0$, $i = \overline{1, w}$, la $k = 0$ poate duce la șocuri mari la pornire, deci la comutarea RD din regim manual (M) în regim automat (A);
- consumul de memorie RAM ocupată oricare ar fi $k \geqslant 0$ cu valorile din pașii precedenți, al căror număr în cele trei cazuri este $2n + 2r$, $2n + 2r - N$ și, respectiv, $2n + 2r + N$. Cînd $n = 1$, $N = 0$, conform exemplului 7.2.1, sînt necesari $2 \cdot 1 + 2r = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 10$ regresori, fiecare memorat în cuvinte de calculator (de cel puțin 16 biți). Dacă $N > 0$, în cazul $t_r' = (r' + 1)\,T$, se ajunge la $10 + N$ dacă procesul amintit are un timp mort $\tau = NT$. Și în această situație micșorarea lui r duce la efectele amintite anterior.

7.3.3. Optimizarea comenzii

În situația în care comanda poate fi optimizată, anularea exactă a zeroului $z_{f1} = -z_1$ al părții fixate printr-un zerou al polinomului $R_r^{opt}(z)$ sau $S^{opt}(z^{-1})$ este de multe ori excesiv de restrictivă. Dacă modelul continuu al părții fixate este cunoscut cu exactitate, fapt imposibil în practică, sau există perturbații parametrice nu prea mari (chiar mici) care modifică zeroul real discret, atunci anularea exactă a acestuia este improbabilă și în buclă deschisă există cvasipermanent un dipol $\dfrac{z + z_1^{teoretic}}{z + z_1^{real}} \neq 1$. În funcție de poziția zeroului $(-z_1)^{real}$, la modificări ale fazei sistemului deschis $H(z) = H_f(z)\,H_R(z)$, acest dipol poate introduce efecte cu avans sau întîrziere de fază. În strînsă dependență cu poziția zeroului $(-z_1)^{teoretic}$, în raport cu zeroul real al procesului, efectul său poate fi favorabil sau nefavorabil, dar într-un mod ce nu poate fi controlat din etapa de proiectare.

Se recomandă optimizarea comenzii în situația în care răspunsul indicial dorit nu se „alterează" sensibil, modelul continuu al părții fixate este precis cunoscut, iar procesul nu are perturbații parametrice.

7.3.4. Modificarea amplitudinii referinței

Într-un context real de reglare a unui proces, referința utilizată în calculele algoritmului de reglare este variabilă (fie intern, la opțiunea operatorului RD, fie extern) și constă în folosirea unui program de referință sau cuplarea RD în configurații sistemice cu mărimi de referință necunoscute apriori, cum sînt reglarea în cascadă, reglarea de raport ș.a. Toate considerațiile de mai sus se referă la modificările în treaptă ale referinței (necunoscute).

Dacă algoritmul de reglare a fost proiectat pentru mărimi de referință tip treaptă maximală, aceasta ar însemna funcționarea RD într-un singur punct nominal, $R(z^{-1}) = \frac{\lambda_{max}}{1 - z^{-1}}$, $\lambda_{max} = 1$; totodată, orice modificare a referinței trebuie să se facă cu $\lambda = 1$, fapt imposibil din punct de vedere practic. Orice alt salt-treaptă al referinței, $\lambda \neq 1$, necesită recalcularea coeficienților algoritmului de reglare. Rezultă suplimentar necesitatea existenței a încă unui algoritm de timp real, care să recalculeze coeficienții algoritmului de reglare la fiecare modificare în treaptă de amplitudine λ a referinței SA.

Fie referința tip treaptă de amplitudine:

$$R(z^{-1}) = \frac{\lambda}{1 - z^{-1}}. \tag{7.86}$$

Atunci, $H_{0d}(z^{-1}) = \frac{Y_d(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \frac{1}{\lambda} Q(z^{-1})$; folosindu-se exprimarea în variabilă z, rezultă:

$$H_{0d}(z) = \frac{1}{\lambda} Q(z) = \frac{R_r(z)}{\lambda z^{r+1}}. \tag{7.87}$$

În (7.21), la $\tau = 0$, $H_R(z)$ se calculează cu expresia

$$H_R(z) = \frac{A_n(z)}{B_m(z)} \frac{R_r(z)}{\lambda z^{r+1} - R_r(z)} \triangleq \frac{E(z)}{C_\lambda(z)}. \tag{7.88}$$

Polinomul $C_\lambda(z)$ este definit prin

$$C_\lambda(z) \triangleq B_m(z)\,(\lambda z^{r+1} - R_r(z)). \tag{7.89}$$

Dacă polinomul $B_m(z)$ are $m + 1$ coeficienți nenuli distincți, atunci, în polinomul $C_\lambda(z)$, $m + 1$ coeficienți vor depinde de amplitudinea referinței λ. Practic λ poate să semnifice și valoarea saltului noii valori a referinței, $\lambda = \lambda^{nou} - \lambda^{vechi}$, dar atunci trebuie luate în considerare condiții inițiale nenule.

În concluzie, pentru un proces descris prin modelul discret din (7.19), cu m zerouri discrete, la fiecare modificare a vechii referințe cu valoarea $\lambda < 1$, în perioada de eșantionare imediat următoare trebuie recalculați $m + 1$ coeficienți ai algoritmului de reglare prin implementarea suplimentară a unui algoritm.

7.3.5. Condiții inițiale nenule

În condiții reale de funcționare a RD, la trecerea din regimul manual în cel automat apar condiții inițiale nenule.

În regim automat, valoarea pentru $k = 0$ (start regim A), y_0, este exact ultima valoare a măsurii y din regimul manual, y_M, valoarea arbitrară în plaja de valori normate, $y_M \in [0,1]$.

Algoritmul de reglare cu condiții inițiale nenule ale modelului părții fixate discrete este dat de [1]

$$U(z^{-1}) = H_R(z^{-1})\,\varepsilon(z^{-1}) + \frac{F'(z^{-1})}{L(z^{-1})} \tag{7.90}$$

dacă $H_R(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{S(z^{-1})}{L(z^{-1})}$ și $H_f(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$; notațiile pentru $S(\cdot)$ și $L(\cdot)$ sînt alese arbitrar.

Polinomul în z^{-1}, $F'(z^{-1})$, este:

$$F'(z^{-1}) = y_0 A(z^{-1}) \frac{1 - H_{0d}(z^{-1})}{1 - z^{-1}} - (1 - H_{0d}(z^{-1}))\,B'(z^{-1}). \tag{7.91}$$

Polinomul $B'(z^{-1})$, corespunzător condițiilor inițiale nenule ale părții fixate discrete, are aspectul:

$$B'(z^{-1}) = b'_0 + b'_1 z^{-1} + b'_2 z^{-2} + \ldots + b'_{n-1} z^{-(n-1)},\ n \stackrel{\Delta}{=} \partial A(z^{-1}). \tag{7.92}$$

Coeficienții polinomului $B'(z^{-1})$ se determină cunoscîndu-se condițiile inițiale ($k = 0$ corespunde startului regimului automat, A).

Dacă partea fixată discretă este descrisă prin algoritmul $\frac{y_k}{u_k} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}$ sau $A(z^{-1})\,y_k = B(z^{-1})\,u_k$, atunci ieșirea la momentul k arbitrar ales este dată de relația:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - a_2 y_{k-2} - \ldots - a_n y_{k-n} + b_1 u_{k-1} + b_2 u_{k-2} + \ldots + b_n u_{k-n}, \tag{7.93}$$

unde $A(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}$ și $B(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_n z^{-n}$.

De menționat, că, datorită prezenței extrapolatorului de ordin zero, polinomul $B(z^{-1})$ nu are termen liber.

Se consideră $u_{-k} \neq 0$, pentru $k = \overline{0,\ n-1}$, și $u_{-1} = u_M$, ultima valoare a comenzii manuale cunoscută.

Pentru $k = \overline{0,\ n-1}$, din relația (7.93) se obțin expresiile:

$$\begin{aligned}
&k = 0 \quad y_0 = -a_1 y_{-1} - a_2 y_{-2} - \ldots - a_n y_{-n} + b_1 u_{-1} + b_2 u_{-2} + \ldots + b_n u_{-n}; \qquad (7.94)\\
&k = 1 \quad y_1 = -a_1 y_0 - a_2 y_{-1} - \ldots - a_n y_{1-n} + b_1 u_0 + b_2 u_{-1} + \ldots + b_n u_{1-n};\\
&\vdots\\
&k = n-1 \quad y_{n-1} = -a_1 y_{n-2} - a_2 y_{n-3} - \ldots - a_n y_{-1} + b_1 u_{n-2} + b_2 u_{n-3} + \ldots + b_n u_{-1}.
\end{aligned}$$

Din (7.94) se deduc coeficienții polinomului $B'(z^{-1})$

$$\begin{aligned}
b'_0 &= -a_1 y_{-1} - a_2 y_{-2} - \ldots - a_n y_{-n} + b_1 u_{-1} + b_2 u_{-2} + \ldots + b_n u_{-n};\\
b'_1 &= -a_2 y_{-1} - a_3 y_{-2} - \ldots - a_n y_{1-n} + b_2 u_{-1} + b_3 u_{-2} + \ldots + b_n u_{1-n};\\
&\vdots\\
b'_{n-1} &= -a_n y_{-1} + b_n u_{-1}. \qquad (7.95)
\end{aligned}$$

Deoarece condițiile inițiale diferă în funcție de „punctul" final de funcționare în regim M de pe caracteristica de transfer a părții fixate (discrete), rezultă necesitatea de a fi luate în considerare la fiecare comutare M-A, datorită prezenței polinomului $B'(z^{-1})$ în expresiile (7.91) și (7.90). Deci, apriori comutării RD din regim M în regim A trebuie memorate valorile y_{M-n}, y_{M-n+1}, ..., y_{M-1} ale ieșirii, dacă y_M este ultima valoare a măsurii y din regimul M al RD, cu $y_M \simeq y_0$.

Pentru cazul particular din exemplul 7.2.1, $n = 1$, $B'(z^{-1}) = 1 - 1 = 0$ și $b'_0 = -a_1 y_{-1} + b_1 u_{-1}$.

În cazul general, luarea în considerare a condițiilor inițiale nenule necesită un algoritm suplimentar algoritmului de reglare, conform relațiilor (7.90) (7.91), (7.92) și (7.95).

Dacă $y_{-1} \neq y_{-2} \neq \ldots \neq y_{-n}$, atunci apriori comutării RD în regim automat, deci pentru $k \leqslant 0$, procesul se află într-un regim dinamic și este descris comportamental prin modelul (7.93).

Deoarece performanțele intuite din faza de proiectare se obțin de regulă în cadrul unui regim tranzitoriu etalon (răspunsul indicial), la $k \leqslant 0$ este($k = 0$ momentul închiderii buclei automate) se presupune implicit că RD funcționează într-un regim staționar; atunci, modelul (7.93) se reduce la modelul staționar:

$$y_0 = H_f(1)\, u_0, \quad u_0 \simeq u_M \tag{7.96}$$

unde

$$H_f(1) = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{1 + \sum_{i=1}^{n} a_i}, \text{ deci cu } y_M \overset{\Delta}{=} y_0 = y_{-1} = \ldots = y_{-n} \text{ și } u_M \overset{\Delta}{=} u_{-1} = u_{-2} = \ldots = u_{-n}.$$

Ținîndu-se seama de egalitățile anterioare (provenite din ipoteza de staționaritate a procesului înaintea închiderii buclei) din sistemul (7.95) rezultă coeficienții [3]:

$$\begin{aligned}
b'_0 &= -y_0(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)\, u_M = y_0, \\
b'_1 &= -y_0(a_2 + a_3 + \ldots + a_n) + (b_2 + b_3 + \ldots + b_n)\, u_M, \\
&\vdots \\
b'_i &= -y_0(a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_n) + (b_{i+1} + b_{i+2} + \ldots + b_n)\, u_M, \\
b'_n &= -a_n y_0 + b_n u_M,
\end{aligned} \tag{7.97}$$

unde y_0 și u_M sînt condițiile inițiale ale procesului staționar în momentul comutării RD în regim automat (închiderea buclei).

De remarcat că aceste inițializări sînt valabile indiferent de metoda folosită în sinteza algoritmului de reglare, fiind tipice tuturor metodelor de sinteză care utilizează modelul explicit, identificat, al părții fixate. Datorită extrapolatorului de ordin zero, condițiile inițiale sînt $u_M \overset{\Delta}{=} u_{-1}$ și y_0.

7.3.6. Eroarea de viteză

În regim staționar al buclei închise, algoritmii proiectați prin metoda studiată realizează o eroare de poziție nulă.

În cazul unor mărimi de referință cu variație în rampă (sau pe porțiunile unor profiluri variabile în rampă ale mărimii de referință) cu panta $R[\%/s]$, mărimea de referință este descrisă prin:

$$R(z) = \frac{RTz}{(z-1)^2}. \tag{7.98}$$

După cum a rezultat din capitolul 6, coeficientul erorii de viteză este $K_v \triangleq \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\,H(z)$ unde $H(z)$ este funcția de transfer a buclei deschise, iar eroarea de viteză [4]:

$$\varepsilon_{vst} = \frac{R}{K_v}[\%]. \tag{7.99}$$

Deoarece eroarea de poziție este nulă, din relația (7.11) rezultă $H_{0d}(1) = 1$ sau $Q(1) = 1$; în consecință, polinomul $R_r(z)$ din (7.18) satisface condiția $R_r(1) = 1$. Atunci, polinomul $C(z)$, definit în relația (7.21) prin $C(z) = (z^{r+1} - R_r(z))\ B_m(z)$, îndeplinește condiția $C(1) = 0$.

În funcția de transfer $H(z) \triangleq H_f(z)\,H_R(z)$ se poate evidenția termenul $z-1$ la numitor, adică $H(z) = \frac{\widetilde{H}(z)}{z-1}$, cu $H(1) \neq 0$. Din modelul prin care se definește coeficientul

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}(z-1)\frac{\widetilde{H}(z)}{z-1} = \frac{1}{T}\widetilde{H}(1) < \infty$$

și $\varepsilon_{v\,st} \neq 0$ rezultă că există o eroare de viteză dată, conform (7.99), de expresia $\varepsilon_{vst} = \frac{RT}{\widetilde{H}(1)}$. Coeficientul K_v se poate calcula și altfel. Deoarece $H_0(z^{-1}) = Q(z^{-1})$ și $Q(z) = \frac{R_r(z)}{z^{r+1}}$ rezultă:

$$H(z) = \frac{H_0(z)}{1 - H_0(z)} = \frac{R_r(z)}{z^{r+1} - R_r(z)}.$$

Deci,

$$K_v = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{R_r(z)}{z^{r+1} - R_r(z)}\right] = \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{\frac{z^{r+1} - R_r(z)}{z-1}}\right]\lim_{z\to 1} R_r(z) =$$

$$= \frac{1}{T}\lim_{z\to 1}\left[\frac{1}{\frac{z^{r+1} - R_r(z)}{z-1}}\right].$$

Întrucît $R_r(z)$ este un polinom din $\mathbb{R}[z]$, iar $z = 1 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{z^{r+1} - R_r(z)}{z - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x \in \mathbb{R}}} \frac{x^{r+1} - R_r(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{x - 1},$$

unde $P(x) \triangleq x^{r+1} - R_r(x)$, $P(x) \in \mathbb{R}[x]$. Deoarece la limită apare cazul singular $\frac{0}{0}$ se aplică regula lui L'Hospital și, ca urmare, $\lim_{x \to 1} \frac{P(x)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{dP(x)}{dx}$.

Dacă $P(x) = x^{r+1} - R_r(x)$, atunci $\frac{dP(x)}{dx} = (r + 1)\, x^r - \frac{dR_r(x)}{dx}$.

Se obține faptul că $\left.\frac{dR_r(x)}{dx}\right|_{x=1} = y_1 + y_2 + \ldots + y_r$ și atunci $\left.\frac{dP(x)}{dx}\right|_{x=1} = r + 1 - (y_1 + y_2 + \ldots + y_r)$.

Coeficientul erorii de viteză este dat de expresia:

$$K_v = \frac{1}{T} \frac{1}{\left.\frac{dP(x)}{dx}\right|_{x=1}} = \frac{1}{T} \frac{1}{r + 1 - (y_1 + y_2 \ldots + y_r)}; \qquad (7.100)$$

totodată, în cazul general, din (7.99) se obține următoarea relație pentru eroarea de viteză:

$$\varepsilon_{vst} = RT(r + 1 - (y_1 + y_2 + \ldots + y_r)). \qquad (7.101)$$

Dacă panta rampei se dă sub forma $R = p\,[\%]/T\,[s]$, atunci eroarea de viteză dată pe o perioadă de eșantionare este:

$$\varepsilon_{vst_T} = p(r + 1 - (y_1 + y_2 + \ldots + y_r)), [\%/T]. \qquad (7.102)$$

Expresia (7.102) este adevărată cînd se aleg toate eșantioanele $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0, \ldots, y_r \neq 0$; deci, durata activă (efectivă) a regimului tranzitoriu cu valori nenule și neunitare este $t_r = (r + 1)\, T$.

Exemple

În exemplul 7.2.1, pentru $t_r = 5T$ și y_1, y_2, y_3, y_4 date în relația (7.65), $T = 2$ s, rezultă $\varepsilon_{vst_T} = p(5 - (0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8)) = 3p[\%/T]$.

În exemplul 7.2.2, durata efectivă a regimului tranzitoriu al răspunsului (7.71) este $t_r^{efectiv} = 4T$, întrucît $y_1 = 0$; deci, $\varepsilon_{vst_T} = p(4 - (0{,}4 + 0{,}6 + 0{,}8) = 2{,}2\,p$, rezultat previzibil din punct de vedere calitativ în raport cu eroarea ε_{vst_T} din exemplul 7.2.1, deoarece răspunsul dorit (efectiv) din (7.71) are un gradient mai mare în timp decît cel din (7.65).

Aşadar, în cazul unor regimuri tranzitorii active de durată mică, deci al unor răspunsuri indiciale cu gradient de creştere mare în timp, din relaţia (7.102) şi din exemplele prezentate se constată micşorarea erorii de viteză.

BIBLIOGRAFIE

1. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1985.

2. Călin, S., Petrescu, Gh.; Tăbuş, I., *Sisteme automate numerice*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.

3. Sângeorzan, D.C., *Regulatoare digitale multifuncţionale*, Studiu I.P.A., 1987–1988.

4. Kuo, B.C., *Sisteme automate cu eşantionare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1967.

5. Ionescu, T., *Sisteme şi echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

Capitolul 8

ALGORITM DE REGLARE DISCRET CU CÎŞTIG VARIABIL. ADAPTARE ÎN REGIM STAŢIONAR

8.1. DESCRIEREA DE PRINCIPIU A ALGORITMULUI

În cazul unor aplicații de viteză, în care resursele *hardware* și *software* ale RD nu permit implementarea unor algoritmi complecși performanți, iar indicii de calitate ai regimurilor dinamice și staționare ale SA nu sînt pretențioși, este posibilă implementarea unor algoritmi de comandă foarte simpli, de tip proporțional (P), cu cîștig variabil, depinzînd de momentul curent, $t_k \triangleq kT$, memorat în prealabil în memorii de comandă rapide [1], [2].

Dacă perturbațiile parametrice ale procesului sînt neglijabile, atunci algoritmul nu necesită decît o multiplicare în timp real (în buclă închisă). Cînd perturbațiile parametrice sînt neneglijabile, dar lente (perturbații de regim staționar pentru un proces dat), algoritmul include și o buclă de adaptare în regim staționar, dar numărul multiplicărilor în timp real, *on-line*, în buclă automată, rămîne egal cu unitatea.

Ipoteze preliminare de proiectare

- Se cunoaște modelul discret al părții fixate (cu extrapolator de ordin zero înglobat):

$$H_f(z) = \frac{R_m(z)}{P_n(z)} \triangleq \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad m < n. \tag{8.1}$$

- Modelul discret, $H_f(z)$, este stabil și de fază minimă.

8.1.1. Configurația algoritmului de reglare

Algoritmul are aspectul [1]:

$$u_k = \lambda_k \varepsilon_k, \tag{8.2}$$

unde u_k este comanda RA, ε_k — eroarea buclei automate, λ_k — cîștigul RA, variabil la fiecare moment de timp t_k, iar T — perioada de eșantionare a SA.

Formal, valoarea λ_k la momentul t_k se consideră eșantionul real al unei funcții $\lambda(t)$, transformabile $\mathfrak{S}$, ale cărei valori discrete sînt exact valorile λ_k, adică

$$\lambda(t)\,|_{t=t_k} = \lambda_k. \tag{8.3}$$

Deoarece prin utilizarea unui extrapolator de ordin zero comanda u_k este menținută constantă pe întreaga durată a fiecărui interval $t \in [kT, (k+1)T]$, se admite că și cîștigul λ_k este constant pe același interval.

8.1.2. Etape de proiectare

— Se impune (de regulă) mărimea de referință a SA, $R(z)$, de tip treaptă;
— Se alege ieșirea dorită, definită prin mulțimea $\{y_k\}_{k \geqslant 0}$, sau funcția de transfer dorită a buclei închise, $H_0(z)$;
— Se calculează transformata $\mathfrak{Z}$ a comenzii alese:

$$U(z) = \frac{1}{H_f(z)} \cdot Y(z) = \frac{1}{H_f(z)} H_0(z) R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}. \tag{8.4}$$

Dacă, în (8.4), $\frac{Q(z)}{P(z)}$ este rațională proprie, atunci $U(z)$ este cauzală și se pot calcula eșantioanele reale u_k (dorite), conform formulei de inversiune [8]:

$$u_k = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{Q(z)}{P(z)} z^{k-1} \, dz. \tag{8.5}$$

În situația că polinomul $P(z)$ este stabil (are toate rădăcinile în discul $|z| \leqslant 1$), conturul închis Γ poate coincide cu cercul unitar $|z| = 1$.
În cazul $\partial Q(z) = \partial P(z)$, condiția inițială a comenzii este:

$$u_0 = \lim_{z \to \infty} \frac{Q(z)}{P(z)} \neq 0 \tag{8.6}$$

(cu observația că valoarea inițială a comenzii în regim A se realizează prin comenzi manuale în regim M);
— Cunoscîndu-se din etapele anterioare r_k și y_k $(\forall)$ $k \geqslant 0$, se cunoaște și eroarea (dorită)a buclei închise, $\varepsilon_k = r_k - y_k$, $r_k = r = \text{constant}$;
— Din relația (8.5) și din etapa precedentă se cunosc u_k și ε_k, $(\forall)$ $k \geqslant 0$; deci, conform relației (8.2), este cunoscut cîștigul RA, $(\forall)$ $k \geqslant 0$:

$$\lambda_k = \frac{u_k}{\varepsilon_k}, \quad \varepsilon_k \neq 0. \tag{8.7}$$

Pentru $k \to \infty$, $\lim_{k \to \infty} u_k = u_f < \infty$ este valoarea finită de regim staționar a comenzii (practic, valoarea de regim nominal).
Din relația (8.7) se remarcă imposibilitatea impunerii unei erori (discrete) dinamice sau staționare nule, caz teoretic în care cîștigul RA ar deveni infinit (imposibil).
În această situație restrictivă se impune practic:

$$\varepsilon_k \neq 0, (\forall)_{k \geqslant 0}, \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = \varepsilon_f > 0, \varepsilon_f = (1\% \ldots 5\%)\, r \tag{8.8}$$

și atunci

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \frac{u_f}{\varepsilon_f} \triangleq \lambda_f < \infty. \tag{8.9}$$

Eroarea staționară nenulă, ε_f, admisă apriori este „prețul plătit" pentru simplitatea algoritmului. Alegerea nenulă a valorii erorii staționare va reprezenta un compromis între precizie și simplitate.

Din relația (8.8), condiția obligatorie $\varepsilon_k \neq 0$, $(\forall)\, k \geqslant 0$, limitează clasa funcțiilor de transfer dorite ale buclei închise, $H_0(z)$, la funcții de transfer discrete cu polii reali pozitivi (deci, răspunsuri indiciale aperiodice, nu oscilatoriu amortizate).

8.2. APLICAȚIE. SINTEZĂ DISCRETĂ PRIN UTILIZAREA DE FUNCȚII $H_0(z)$ CU UN POL REAL

Se consideră partea fixată continuă, descrisă prin:

$$H_f(s) = \frac{K_f}{1 + T_f s}. \tag{8.10}$$

Conform § 6.2.1, partea fixată discretă (cu extrapolator de ordinul zero înglobat) este descrisă prin:

$$H_f(z) = \frac{K_f(1-b)}{z-b}, \quad b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}. \tag{8.11}$$

8.2.1. Etapele de proiectare și calcul [2].

— Se impune referința (normată):

$$R(z) = \frac{r}{1 - z^{-1}}, \quad r \in (0,1]. \tag{8.12}$$

— Se impun eșantioanele dorite ale răspunsului indicial:

$$y_k = (1-\beta) r (1 - p^k), \quad k \geqslant 0. \tag{8.13}$$

Alura răspunsului indicial dorit este ilustrată în fig. 8.1. Curba este de tip exponențial și $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = (1-\beta)\, r$; ca urmare, eroarea staționară (de poziție) este:

$$\varepsilon_f = r - \lim_{k\to\infty} y_k = \beta r, \tag{8.14}$$

unde β se alege în plaja de valori:

$$\beta = 0{,}005 \ldots, 0{,}01. \tag{8.15}$$

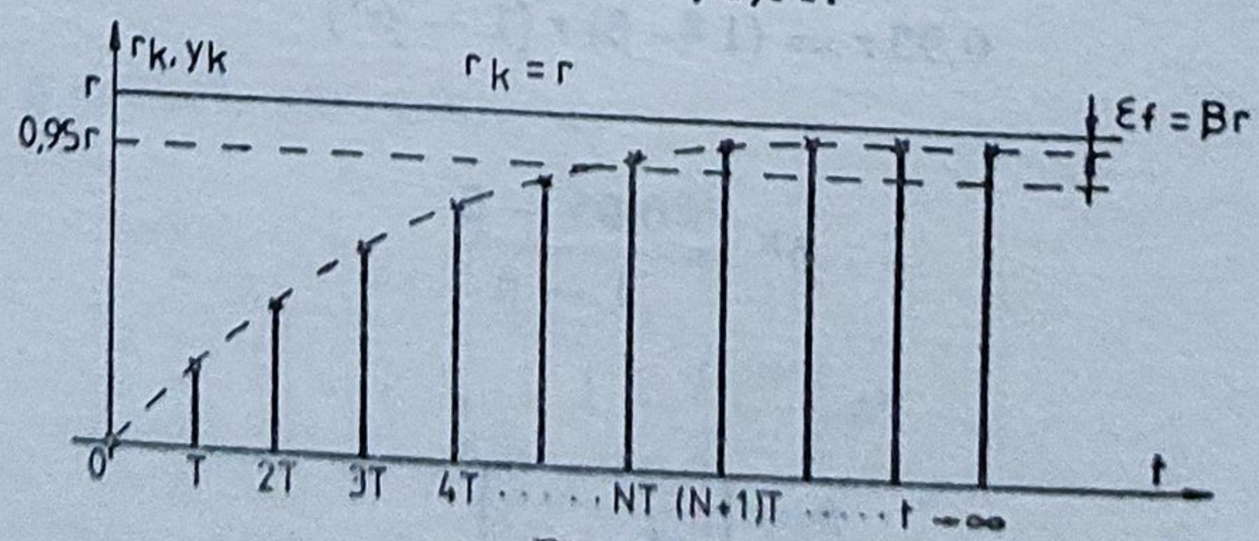


Fig. 8.1

De regulă, $\beta = 0{,}01$.

Dacă se consideră răspunsul continuu descris prin funcția:

$$y(t) = (r - \varepsilon_f)\left(1 - e^{-\frac{T}{T_0}}\right), \tag{8.16}$$

are loc egalitatea:

$$y(t)\,|_{t=kT} = y_k \tag{8.17}$$

pentru

$$p = e^{-\frac{T}{T_0}}, \tag{8.18}$$

unde T este perioada de eșantionare și T_0 — constanta de timp a răspunsului exponențial din (8.16).

Transformata $\mathfrak{Z}$ asociată lui $\{y_k\}$, $k \geqslant 0$, sau funcției $y(t)$ este:

$$Y(z) = r(1-\beta)\left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-pz^{-1}}\right] = r(1-\beta)(1-p)\frac{z}{(z-1)(z-p)}, \tag{8.19}$$

iar funcția de transfer dorită, a buclei închise, discretă:

$$H_0(z) \triangleq \frac{Y(z)}{R(z)} = (1-\beta)(1-p)\frac{1}{z-p}. \tag{8.20}$$

În conformitate cu § 6.3.1, eroarea de poziție are valoarea $\varepsilon_f = r - H(1) = \beta r > 0$.

Se observă că $H_0(z)$, avînd polul real p, face parte din clasa funcțiilor $H_0(z)$, definite în § 8.1.2.

Determinarea polului p. Răspunsul indicial fiind aperiodic, singura performanță impusă regimului tranzitoriu este durata acestuia, t_r: deci,

$$t_r \leqslant t_r^{\text{impus}}. \tag{8.21}$$

Fie

$$t_r^{\text{impus}} = NT, \tag{8.22}$$

unde, din considerentele expuse în § 2.5, perioada de eșantionare, T, se alege în funcție de constanta de timp, T_f, din (8.10).

Prin definiție, $y(t_r^{\text{impus}}) = 0{,}95\,r$ (fig. 8.1); așadar, din (8.13), cu $k = N$, rezultă:

$$0{,}95\,r = (1-\beta)\,r\,(1-p^N) \tag{8.23}$$

sau

$$p^N = \frac{0{,}05 - \beta}{1-\beta} \tag{8.24}$$

ori

$$p = \left(\frac{0{,}05 - \beta}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{8.25}$$

De exemplu, pentru $\beta = 0{,}01$, din (8.15) rezultă:

$$p = \left(\frac{4}{99}\right)^{\frac{1}{N}}. \tag{8.26}$$

Eșantioanele erorii (dorite) sînt $\varepsilon_k = r_k - y_k = r - y_k$ sau, din (8.13),

$$\varepsilon_k = r - (1-\beta) r (1 - p^k) = \beta r \left(1 + \frac{1-\beta}{\beta} p^k\right). \tag{8.27}$$

Cunoscînd $H_f(z)$ din (8.11) și $Y(z)$ din (8.19), rezultă conform (8.4):

$$U(z) = \frac{r}{K_f} \frac{(1-\beta)(1-p)}{1-b} \frac{z(z-b)}{(z-1)(z-p)} \triangleq \frac{Q(z)}{P(z)}. \tag{8.28}$$

Deoarece $\partial Q(z) = \partial P(z) = 2$, $\dfrac{Q(z)}{P(z)}$ este cauzală și din formula de inversiune (8.5) rezultă:

$$u_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{r(1-\beta)(1-p)}{K_f(1-b)} \frac{z(z-b)\, z^{k-1}}{(z-1)(z-p)}\, dz, \tag{8.29}$$

sau

$$u_k = \frac{r(1-\beta)}{K_f}\left[1 - \frac{p-b}{1-b} p^k\right]. \tag{8.30}$$

Comanda inițială este:

$$u_0 = \lim_{z \to \infty} U(z) = \frac{r(1-\beta)(1-p)}{K_f(1-b)}. \tag{8.31}$$

Știindu-se ε_k din (8.27) și u_k din (8.30), rezultă conform (8.7):

$$\lambda_k = \frac{u_k}{\varepsilon_k} = \frac{1}{K_f} \frac{1-\beta}{\beta} \frac{1 - \dfrac{p-b}{1-b} p^k}{1 + \dfrac{1-\beta}{\beta} p^k} \tag{8.32}$$

Se notează:

$$\gamma = \frac{1-\beta}{\beta}, \tag{8.33}$$

care, pentru $\beta = 0{,}01$, are valoarea:

$$\gamma = 99. \tag{8.34}$$

Deci,

$$\lambda_k = \frac{\gamma}{K_f} \frac{1 - \dfrac{p-b}{1-b} p^k}{1 + \gamma p^k}, \tag{8.35}$$

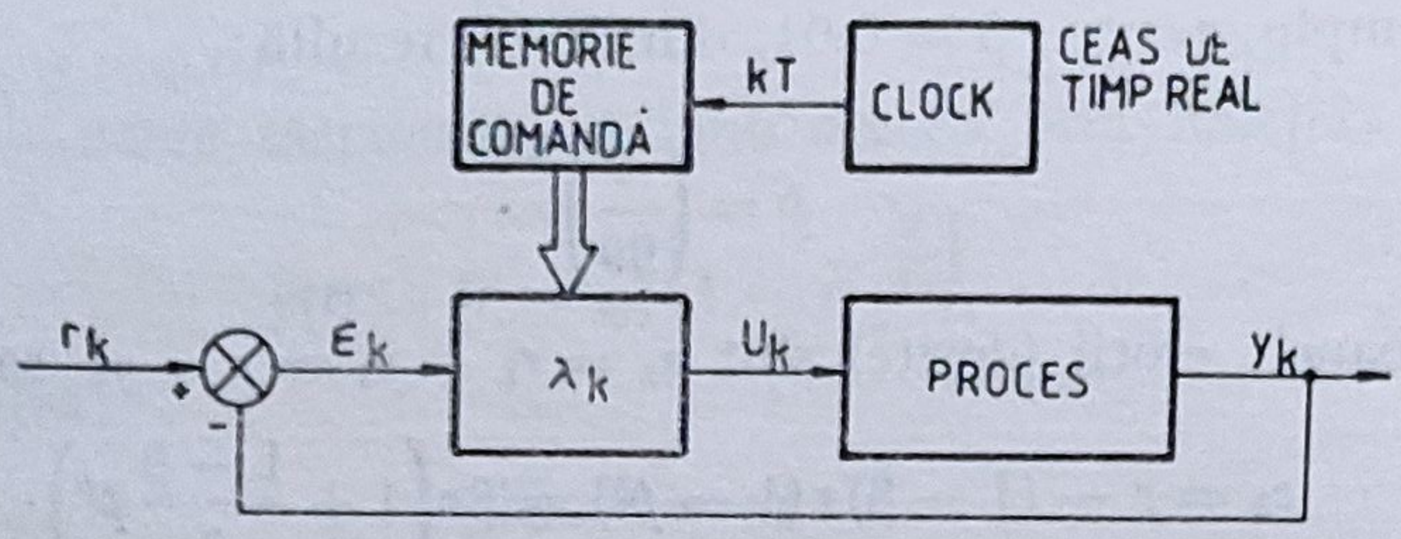


Fig. 8.2

cu valoarea inițială:

$$\lambda_0 = \frac{\gamma}{K_f}\,\frac{1}{1+\gamma}\,\frac{1-p}{1-b} = \frac{1-\beta}{K_f}\,\frac{1-p}{1-b}. \tag{8.36a}$$

8.2.2. Implementarea algoritmului

Din condiția de proiectare (8.22) se cunoaște valoarea N; atunci, cu ajutorul expresiei (8.26) se obține valoarea polului p.

Se calculează *off-line* valorile λ_k din (8.35), rezultînd algoritmul:

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, & k = \overline{0,\ N-1} \\ \lambda_{N-1}\varepsilon_k, & (\forall)\, k \geqslant N \end{cases}. \tag{8.36b}$$

Schema de principiu, în buclă închisă, este descrisă în fig. 8.2.

Se remarcă diferența între $\varepsilon_f = \beta \cdot r = 0{,}01\, r$ și $\varepsilon_{N-1} \simeq 0{,}05\, r$, valoarea realizată în schema de reglare din fig. 8.2.

8.3. EFECTUL VARIAȚIEI UNOR PARAMETRI

• *Variația amplitudinii referinței*. Dacă amplitudinea normată a referinței tip treaptă din (8.12) variază în intervalul (0,1] — datorită unor modificări interne ale RD sau externe acestuia — se constată din (8.35) invariația cîștigului λ_k la modificarea lui r.

• *Variația polului părții fixate*. Deoarece modelul discret $H_f(z)$ din (8.11) se obține prin calcul din modelul continuu (8.10) al procesului, se consideră spre exemplificare numerică variația constantei de timp $T_f \pm 25\%\ T_f$ și $T_f \pm 50\%\ T_f$.

Polul discret din (8.11) este $b = e^{-\frac{T}{T_f}}$. Atunci, există valorile:

$$b^{\text{exact}} = e^{-\frac{T}{T_f}},\ b_{+25\%} \triangleq e^{-\frac{T}{1{,}25\,T_f}},\ b_{-25\%} \triangleq e^{-\frac{T}{0{,}75\,T_f}},$$
$$b_{+50\%} \triangleq e^{-\frac{T}{1{,}5T_f}},\ b_{-50\%} \triangleq e^{-\frac{T}{0{,}5T_f}}, \tag{8.37}$$

Uzual, considerîndu-se $T = \frac{T_f}{10}$, rezultă valorile numerice din tabelul 8.1.

Tabelul 8.1

b^{exact}	$b+25\%$	$b-25\%$	$b+50\%$	$b-50\%$
0,9048	0,9231	0,8752	0,9355	0,8187

Se observă că variațiile relative ale polului discret b față de valoarea exactă sau nominală b^{exact} sînt mai mici de 3,3%, pentru variații ale constantei $T_f \pm 25\%\ T_f$, și sub 9,6%, pentru variații ale constantei $T_f \pm 50\%\ T_f$. Deci, la variații parametrice relativ mari ($\leqslant 50\%$) ale constantei de timp a procesului, T_f, variațiile polului discret al modelului discret, b, pot fi neglijabile.

• *Variația factorului de amplificare al procesului.* În relația (8.35) se folosește notația:

$$\xi_k = \gamma \frac{1 - \dfrac{p-b}{1-b} p^k}{1 + \gamma p^k}. \tag{8.38}$$

Din expresia menționată se obține:

$$\lambda_k = \frac{1}{K_f}\ \xi_k. \tag{8.39}$$

Deoarece, conform (8.39), dependența $\lambda_k = \lambda_k(K_f)$ este directă, la variații mari ale factorului de amplificare al părții fixate continue (practic a procesului) există fluctuații mari ale cîștigului RA, λ_k, menținîndu-l la valoarea etalon dorită din (8.35). Operînd cu RD în schema din fig. 8.2 vor apărea erori mari de la regimul dorit (etalon) al ieșirii y_k, inclusiv pentru $k \to \infty$ (în regim staționar).

În acest caz (K_f variabil), sensibilitatea algoritmului este comparabilă cu cea a algoritmilor proiectați prin metoda poli-zerouri (capitolul 6) sau prin metoda proiectării directe în timp (capitolul 7), toate folosind modelul explicit, identificat, al părții fixate.

8.4. MODIFICAREA ALGORITMULUI ÎN CAZUL UNOR PERTURBAȚII PARAMETRICE

8.4.1. Ipoteze

Se presupune o variație puternică a valorii factorului final de amplificare, K_f, fluctuația constantei de timp, T_f, fiind resimțită neglijabil în modelul discret (8.11).

Modificările în timp ale factorului K_f sînt lente (variații de regim staționar din punctul de vedere al dinamicii procesului).

Dacă durata regimului tranzitoriu indicial este $t_r \simeq NT$, adică după N perioade de eșantionare, măsurate din momentul modificării referinței în treaptă ($k = 0$), ieșirea procesului este considerată (cvasi) staționară, atunci factorul K_f variază semnificativ la „perioade" de timp mai mari decît $2t_r$, deci cu frecvențe mai mici de $\dfrac{1}{2NT}$ sau $\dfrac{f_{eș}}{2N}$, $f_{eș} \triangleq \dfrac{1}{T}$.

Admițînd variații neglijabile ale polului b al părții fixate discrete, rezultă invariația duratei $t_r = NT$, oricare ar fi valoarea lui K_f.

Se mai fac ipotezele:

$$\varepsilon_{st} \overset{\Delta}{=} \varepsilon_k \cong \varepsilon_N, \ (\forall)\ k \geqslant N, \text{ conform (8.27) și (8.23)}; \tag{8.40}$$

$$u_f \overset{\Delta}{=} \lim_{k\to\infty} u_k = \frac{r(1-\beta)}{K_f} \simeq u_{N-1}, \text{ conform (8.30) și (8.36}b\text{)}.$$

Valorile u_k, ε_k și λ_k calculate din relațiile (8.30), (8.27) și (8.35) sînt obținute din regimul tranzitoriu dorit, numit „etalon". La valoarea nominală K_f^M în jurul căreia au loc variațiile, se notează cu u_k^M, ε_k^M și λ_k^M (M — model). Valoarea etalon K_f^M, aflată la baza calculelor întreprinse pentru proiectarea parametrilor anteriori, este considerată de proiectant (tehnolog) ca valoare corectă a amplificării procesului în regim staționar.

8.4.2. Modificarea algoritmului. Adaptarea staționară.

Conform ipotezelor din § 8.4.1, în regim staționar, K_f se modifică lent, dar net, ajungînd la valori diferite de K_f^M; așadar, $K_f \neq K_f^M$, unde cu K_f s-a notat valoarea reală curentă. Aceste variații, conform § 8.3, se resimt puternic și îndeosebi în regim staționar, determinînd modificarea erorii staționare nominale ε_{st}^M, prin $\varepsilon_{st} \neq \varepsilon_{st}^M$. Această variație se produce întrucît se menține același cîștig final al RA, λ_{N-1}^M (ultima valoare a regimului tranzitoriu etalon), care nu mai este adecvat din punct de vedere valoric pentru noua valoare existentă, reală, $K_f \neq K_f^M$. Pentru $k \to \infty$ (practic $k \geqslant N$), dependența dintre ε_{st}^M, u_f^M și λ_{N-1}^M este dată de relația generală (8.7), iar u_f^M rezultă din (8.40); deci,

$$\varepsilon_{st}^M = \frac{r(1-\beta)}{K_f^M \lambda_{N-1}^M}. \tag{8.41}$$

Prin modificarea $K_f \neq K_f^M$ și menținerea aceluiași cîștig final, λ_{N-1}^M, rezultă o eroare staționară:

$$\varepsilon_{st} = \frac{r(1-\beta)}{K_f \lambda_{N-1}^M} \neq \varepsilon_{st}^M, \tag{8.42}$$

dacă $K_f \neq K_f^M$.

Se dorește modificarea cîștigului final λ_{N-1}^M la o nouă valoare $\lambda_{N-1} = \lambda_{N-1}^M + \Delta\lambda$, astfel încît ε_{st} să devină aproximativ egală cu ε_{st}^M; din (8.41) și (8.42) se obține:

$$\frac{r(1-\beta)}{K_f(\lambda_{N-1}^M + \Delta\lambda)} = \frac{r(1-\beta)}{K_f^M \lambda_{N-1}^M}$$

sau

$$\Delta\lambda = \left(\frac{K_f^M}{K_f} - 1\right)\lambda_{N-1}^M, \tag{8.43}$$

iar

$$\lambda_{N-1} = \lambda_{N-1}^M + \Delta\lambda = \frac{K_f^M}{K_f}\lambda_{N-1}^M. \tag{8.44}$$

Valoarea λ_{N-1} din (8.44) devine noua valoare de regim staționar, constantă.

• *Identificarea factorului* K_f. Pentru ca algoritmul de reglare să-şi poată modifica cîştigul final, conform relaţiei (8.44), este necesară identificarea experimentală a factorului final de amplificare al părţii continue, K_f. Acest deziderat necesită un algoritm simplu de identificare staţionară care este lansat automat la sesizarea în regim staţionar a „alterării" valorii reale, staţionare $\varepsilon_{st} \neq \varepsilon_{st}^M$, valoare memorată.

Noua valoare a factorului K_f, sesizată din controlul nivelului erorii staţionare ε_{st}, se determină prin trecerea automată a RD din regim automat în regim de autoacordare *(self-tuning)*, diferit de cel manual şi de cel automat.

În acest regim se declanşează o „treaptă" la intrarea în proces (suprapusă peste vechea valoare de regim staţionar, $u_f^M \simeq u_{N-1}^M$, menţinută exclusiv în regimuri staţionare). Fie treapta $\Delta U(z) = \dfrac{\eta}{1 - z^{-1}}$, unde $\eta \in (0,1)$ este saltul relativ al comenzii (de la valoarea u_{N-1}^M). În relaţia precedentă, η este un parametru programabil sau fix, memorat.

Dacă ieşirea procesului se caracterizează prin existenţa „condiţiei iniţiale" a regimului staţionar (la $k \geqslant N$), $y_f^M \simeq y(NT)$ — datorită extrapolatorului de ordinul zero, comenzii u_{N-1}^M îi corespunde ieşirea y_N^M —, atunci are loc un regim tranzitoriu indicial după modelul:

$$\Delta Y(z) = \frac{K_f(1-b)}{z-b}\,\Delta U(z) \tag{8.45}$$

unde

$$\Delta Y(z) = \stackrel{\Delta}{=} \mathfrak{Z}\{y_k - y(NT)\} = \mathfrak{Z}\{\Delta y_k\}, \quad \Delta y_k \stackrel{\Delta}{=} y_k - y_N, \quad y_N \stackrel{\Delta}{=} y(NT).$$

Durata regimului tranzitoriu indicial rămîne aceeaşi (polii procesului sînt invarianţi conform ipotezelor din § 8.4.1).

Din momentul emiterii comenzii $\Delta U(z)$, după aproximativ N perioade de eşantionare, se măsoară valoarea finală $\Delta y(NT)$; deoarece există relaţia:

$$\Delta y(NT) \simeq K_f \eta, \tag{8.46}$$

rezultă valoarea reală a factorului K_f:

$$K_f = \frac{\Delta y(NT)}{\eta}. \tag{8.47}$$

Durata regimului de identificare a factorului K_f este de NT [s], în această perioadă variaţiile lui fiind neglijabile (pentru a exista posibilitatea de identificare). Astfel se justifică ipoteza din § 8.4.1 privitoare la viteza sa de variaţie în

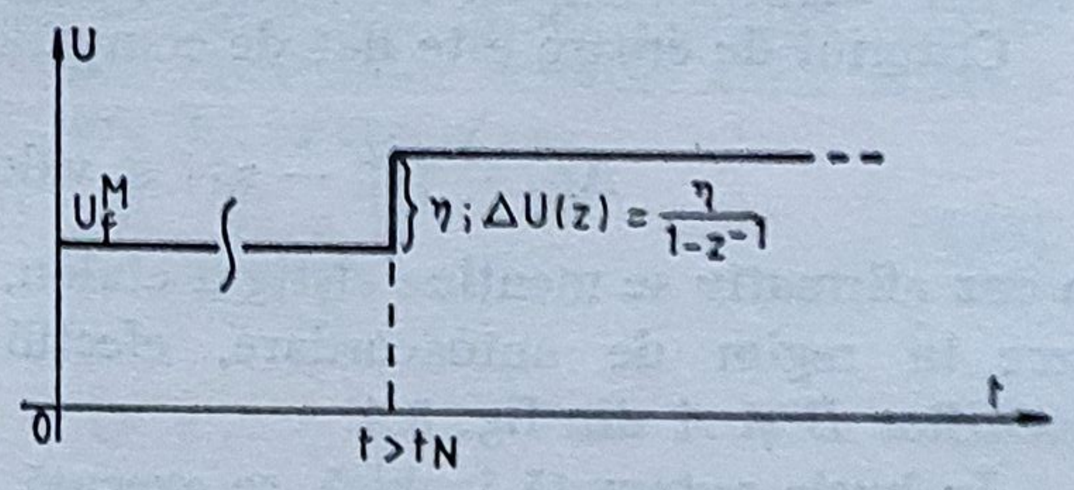


Fig. 8.3

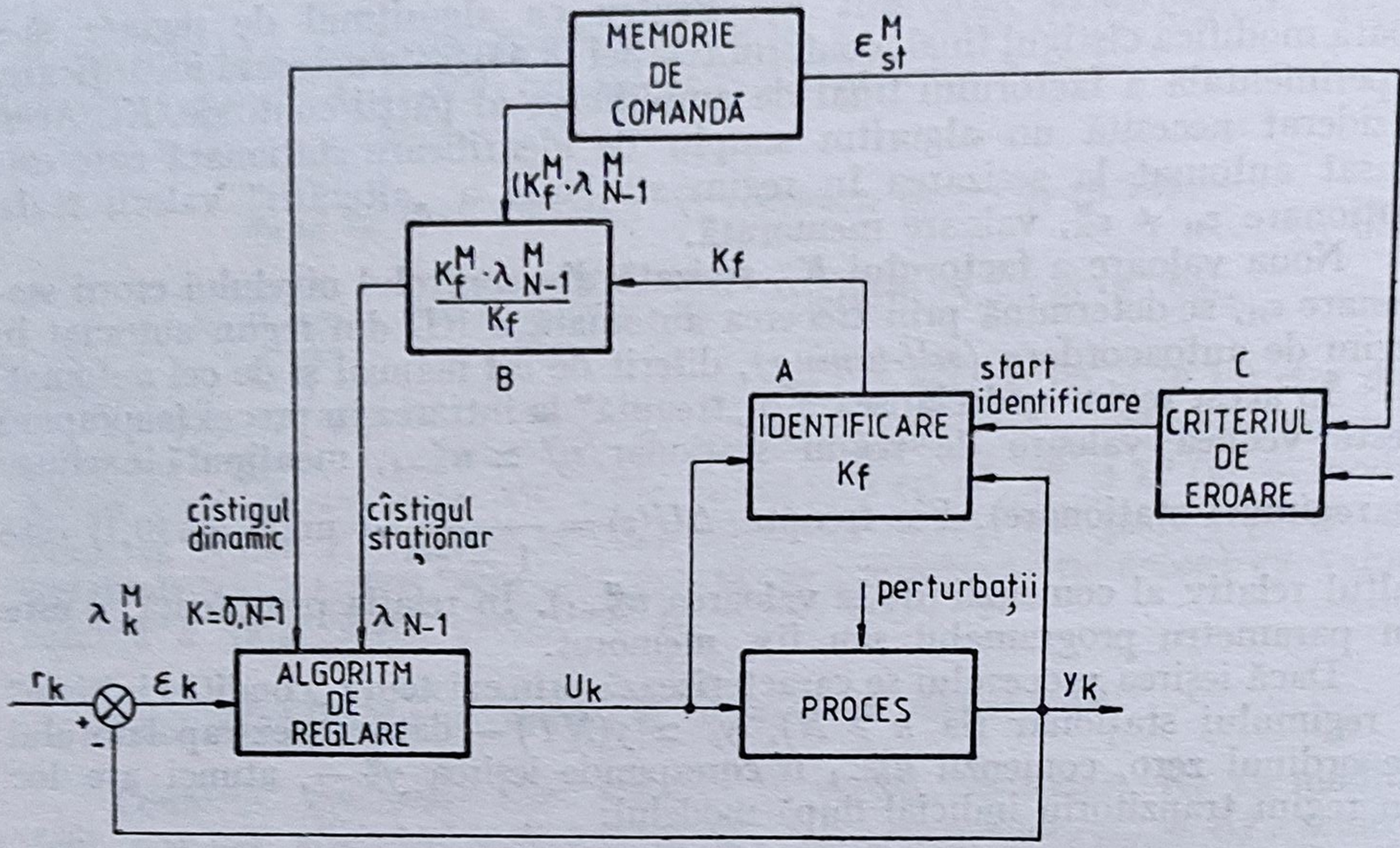


Fig. 8.4

timp. Deci, pentru o durată de cel puțin $2NT$, K_f nu se modifică sesizabil ($2NT = NT + NT =$ durata regimului tranzitoriu + durata regimului de identificare).

• *Implementarea algoritmului modificat*

Algoritmul modificat este ilustrat sintetic în schema-bloc din fig. 8.4.

Algoritmii aferenți blocurilor *A* și *B* se execută *on-line* în buclă automată deschisă, condiționați de blocul *C* — „criteriul de eroare", care decide „startul" algoritmului de identificare, blocul *B*.

Criteriul de eroare este dat de compararea erorii

$$\Delta\varepsilon_{st} \stackrel{\Delta}{=} |\varepsilon^M_{st} - \varepsilon_{st}| \leqslant \text{valoare dată}. \tag{8.48}$$

În caz afirmativ se menține cîștigul etalon, λ^M_{N-1}, iar în caz contrar, RD trece în regim de autoacordare, efectuîndu-se algoritmii corespunzător blocurilor *B* și *A* din fig. 8.4.

În bucla automată închisă, se execută *on-line* doar algoritmul de calcul al comenzii $u_k = \lambda_k \varepsilon_k$, unde cîștigul curent λ_k este transferat din memoria de comandă. Algoritmul necesită doar o multiplicare în timp real și comparația ilustrată în relația (8.48).

8.5. ALGORITMUL DE REGLARE. EROAREA DE POZIȚIE NULĂ

Conform relației (8.36*b*), în regim staționar $\lambda_k = \lambda_{N-1}$, $(\forall)\, k \geqslant N$ și RA devine un element proporțional, P, cu cîștig constant. Eroarea de poziție a răspunsului indicial este nenulă și egală aproximativ cu $\varepsilon_{N-1} \simeq (1\%-5\%)\, r$.

În aplicațiile practice în care sînt necesare precizii staționare foarte bune, adică eroare de poziție nulă, $\lim_{k\to 0} \varepsilon_k = 0$, algoritmul din (8.36^b) se modifică astfel:

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, \ k = \overline{0, N-1} \\ \lambda_{N-1}\left(1 + \dfrac{K_i}{1-z^{-1}}\right)\varepsilon_k, \ (\forall)\ k \geqslant N \end{cases} \tag{8.49}$$

sau

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, \ k = \overline{0, N-1}; \\ \dfrac{\lambda_{N-1}}{1-z^{-1}}\varepsilon_k, \ (\forall)\ k \geqslant N. \end{cases} \tag{8.50}$$

Se consideră algoritmul din expresia (8.50). Pentru $k \geqslant N$, $H_R(z) = \dfrac{\lambda_{N-1}}{1-z^{-1}}$ și, conform (8.11), $H_f(z) = \dfrac{K_f(1-b)}{z-b}$, rezultînd $\widetilde{H}(z) \triangleq H_f(z)\,H_R(z) = \dfrac{K_f\lambda_{N-1}(1-b)\,z}{(z-1)(z-b)}$. După cum se observă din (8.39), $\xi_{N-1} = K_f\lambda_{N-1}$; așadar,

$$\widetilde{H}(z) = \frac{(1-b)\,\xi_{N-1}\,z}{(z-1)(z-b)}. \tag{8.51}$$

Pentru $k \geqslant N$, ecuația caracteristică a buclei închise este $1 + \widetilde{H}(z) = 0$ sau

$$F(z) \triangleq z^2 + [(1-b)\,\xi_{N-1} - 1 - b]\,z + b = 0. \tag{8.52}$$

Cînd $k \geqslant N$ și $k \to \infty$, utilizîndu-se algoritmul (8.50), condiția de stabilitate a buclei închise este ca modulul rădăcinilor ecuației caracteristice (8.52) să fie subunitar. Aplicînd testul Jury [6], ar trebui ca

$$F(1) > 0,\ F(-1) > 0,\ |b| < 1, \tag{8.53}$$

unde

$$F(1) = (1-b)\,\xi_{N-1} > 0$$

$$F(-1) = 2(1+b) - (1-b)\,\xi_{N-1} > 0, \text{ inegalitate condiționată;} \tag{8.54}$$

$$|b| = e^{-\frac{T}{T_f}} < 1$$

Condițiile (8.53) sînt îndeplinite simultan dacă, după calculul cîștigului $\lambda_{N-1} = \dfrac{\xi_{N-1}}{K_f}$, conform formulei generale (8.35) sau (8.38), relația (8.54) este satisfăcută, adică:

$$\xi_{N-1} < 2\,\frac{1+b}{1-b}. \tag{8.55}$$

În situația că relația (8.55) nu este satisfăcută, pentru a evita recalcularea valorilor b și ξ_* prin modificarea parametrilor β sau γ și T, în algoritmul din (8.50) se introduce parametrul K_i:

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, \ k = \overline{0, \ N-1} \\ \dfrac{\lambda_{N-1} K_i}{1 - z^{-1}} \varepsilon_k, \ (\forall) \ k \geqslant N. \end{cases} \tag{8.56}$$

Folosindu-se algoritmul din (8.56), pentru $k \geqslant N$, ecuația caracteristică din (8.52) se modifică devenind:

$$F(z) \triangleq z^2 + [K_i (1 - b) \xi_{N-1} - 1 - b] z + b = 0. \tag{8.57}$$

Dacă se impun condițiile (8.53), inegalitatea condiționată $F(-1) > 0$ adoptă forma:

$$2 (1 + b) - K_i (1 - b) \ \xi_{N-1} > 0. \tag{8.58}$$

Parametrul ξ_{N-1} fiind deja calculat, se alege K_i astfel încît

$$K_i < 2 \frac{1 + b}{1 - b} \frac{1}{\xi_{N-1}}. \tag{8.59}$$

Prin alegerea lui K_i algoritmul de reglare (8.65) este complet determinat.

Oricare din algoritmii de reglare modificați din (8.49), (8.50) sau (8.56) asigură eroare de poziție nulă (la $k \to \infty$), deoarece introduc un pol în $z = 1$ (efect I).

8.6. MODALITĂȚI PRACTICE DE IMPLEMENTARE A ALGORITMULUI

• *Stabilitatea în regim staționar*. Pentru $k \geqslant N$, RA este descris prin funcția de transfer $H_R(z) = \lambda_{N-1} =$ constant. Dacă partea fixată discretă coincide cu cea prezentată în relația (8.11), atunci funcția de transfer discretă la $k \geqslant N$ (terminarea regimului tranzitoriu impus) a buclei deschise este $\tilde{H}(z) \triangleq H_f(z) H_R(z)$ sau

$$\tilde{H}(z) = \frac{K_f (1 - b) \lambda_{N-1}}{z - b} = \frac{(1 - b) \ \xi_{N-1}}{z - b}. \tag{8.60}$$

Cînd $k \geqslant N$, bucla închisă discretă care utilizează algoritmul (8.36b) are funcția de transfer:

$$H_0(z) = \frac{\tilde{H}(z)}{1 + \tilde{H}(z)} = \frac{(1 - b) \ \xi_{N-1}}{z - [b - (1 - b) \xi_{N-1}]}. \tag{8.61}$$

În relația (8.61), polul discret $\tilde{p}$ este:

$$\tilde{p} \triangleq b - (1 - b) \xi_{N-1}. \tag{8.62}$$

Condiția ca pentru $k \to \infty$ sistemul închis în care RA, implementat sub forma din (8.36^b), să fie stabil este:

$$|\tilde{p}| \leqslant 1. \tag{8.63}$$

Cînd relația (8.63) nu este satisfăcută — ea este testată după calculul cîștigului λ_k din (8.38) — se modifică parametrii liberi de proiectare γ sau β din (8.33) sau perioada de eșantionare a SA, T.

În acest ultim caz există condiția $NT = t_r^{impus} = \text{constant}$, deci se modifică și polul p din expresia (8.26).

• *Eroarea de poziție*. Dacă în locul algoritmului real din (8.36^b), cu N valori (N — finit) ale cîștigului RA, s-ar utiliza algoritmul teoretic $u_k = \lambda_k \varepsilon_k$ cu λ_k din (8.35), $(\forall)\ k \geqslant 0$ (imposibil și ineficient de implementat, avînd o infinitate de valori ale cîștigului λ_k), atunci eroarea de poziție a răspunsului indicial, conform (8.20), ar fi exact $r(1 - H_0(1)) = \beta_r = (0{,}005 \ldots 0{,}01)\, r$.

Prin implementarea algoritmului simplu din (8.36^b), comportarea sistemului închis, pentru $k \geqslant N$ și $k \to \infty$, este dată aproximativ de modelul $\tilde{H}_0(z)$ din (8.61). Eroarea de poziție în acest caz real este:

$$\tilde{\varepsilon}_{st} = r(1 - \tilde{H}_0(1)) = \frac{r}{1 + \xi_{N-1}} = \frac{r}{1 + K_f \lambda_{N-1}}. \tag{8.64}$$

• *Eroarea de viteză*. După cum rezultă din capitolul **6**, coeficientul erorii de viteză este dat de relația $K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1)\, \tilde{H}(z) = 0$, deoarece $\tilde{H}(1) = \xi_{N-1} < \infty$, adică eroarea de viteză este infinită. Acest fapt este valabil pentru toate procesele fără pol în $s = 0$ (continuu) sau $z = 1$ (discret). Pentru procesele cu pol în $s = 0$ eroarea de viteză este finită.

De exemplu, pentru $H_f'(s) = K_f/s$ (integrator pur) rezultă

$$H_f(z) = \frac{K_f T}{z - 1} \text{ și } \tilde{H}(z) = \frac{K_f T}{z - 1} \lambda_{N-1} = \frac{T \xi_{N-1}}{z - 1}.$$

Coeficientul erorii de viteză este în acest caz

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} (z - 1)\, \tilde{H}(z) = \xi_{N-1}.$$

8.7. APLICAȚIE

Se consideră partea fixată continuă descrisă prin modelul din (8.10), în care $K_f = 1$, $T_f = 10\text{s}$, și performanța de regim staționar din (8.22), $t_r^{impus} = T_f = 10\text{s}$. Alegînd perioada de eșantionare $T = T_f/10 = 1\text{s}$, rezultă $N = 10$, $b = e^{-\frac{T}{T_f}} \simeq 0{,}9048$ și $p = \left(\frac{4}{99}\right)^{0{,}1} = 0{,}7255$. Se alege $\beta = 0{,}01$ din (8.15), rezultînd $\gamma = 99$ din (8.34). Cîștigul RA, λ_k din (8.35), are aspectul numeric:

$$\lambda_k = 99\, \frac{1 + 1{,}8834 \cdot 0{,}7255^k}{1 + 99 \cdot 0{,}7255^k}. \tag{8.65}$$

Conform relației (8.36*b*), algoritmul de reglare este implementat prin:

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, \; k = \overline{0;9} \\ \lambda_9 \varepsilon_k, \; (\forall)\; k \geqslant 10, \end{cases} \tag{8.66}$$

unde valorile $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_9$ din tabelul 8.2 sînt memorate în memoria RD.

Tabelul 8.2

k	λ_k
0	2,8546
1	3,217
2	3,712
3	4,3861
4	5,2997
5	6,5304
6	8,1748
7	10,3477
8	13,1778
9	16,795
10	16,795

Utilizînd algoritmul implementat din (8.66), polul $\tilde{p}$ din (8.62), pentru $b = 0{,}9048$ și $\xi_{N-1} = \xi_9 = \lambda_9$ la $K_f = 1$, este $\tilde{p} \simeq -0{,}7 \in (-1, +1)$. Deci bucla închisă este stabilă. Eroarea de poziție obținută cu algoritmul (8.66) este, conform (8.64), $\tilde{\varepsilon}_{st} = \dfrac{r}{r + \xi_9} \simeq 5{,}62\%\, r$, deci cu o precizie satisfăcătoare în regim staționar și admisibilă din punct de vedere practic.

Se mai remarcă faptul că, deoarece $\xi_9 < 2\dfrac{1+b}{1-b}$ sau $16{,}795 < 40{,}017$, condiția (8.55) este satisfăcută; totodată, conform § 8.5, algoritmul (8.66) poate fi modificat ca și în (8.50):

$$u_k = \begin{cases} \lambda_k \varepsilon_k, \; k = \overline{0,9} \\ \dfrac{\lambda_9}{1 - z^{-1}} \varepsilon_k, \; (\forall)\; k \geqslant 10. \end{cases} \tag{8.67}$$

În acest mod se poate obține eroarea de poziție nulă, $\varepsilon_{st} = \lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$.

Bucla închisă discretă s-a simulat cu polinomul $H_f(z)$ definit numeric anterior și folosindu-se algoritmul de reglare din (8.66) pentru o mărime de referință a SA de tip treaptă unitate ($r = 1$). Pentru proces s-au considerat condiții inițiale nule ($y_0 = u_0 = 0$). Evoluția în timp discret a mărimilor y_k și u_k este descrisă în fig. 8.5. S-au considerat apoi condiții inițiale nenule, arbitrar alese, rezultînd evoluția mărimilor y_k, u_k, prezentată în fig. 8.6.

Se constată (fig. 8.6) invariația performanțelor de regim staționar și, în plus, reducerea energiei de comandă atunci cînd condițiile inițiale sînt nenule (cazul real specific aplicațiilor industriale).

Menționăm faptul că, din motive de simulare, în figurile 8.5 și 8.6, bucla automată se închide la $k = 1$; așadar, $k = 1$ este momentul în care referința se modifică în treaptă.

Comparativ cu algoritmii proiectați prin metoda prezentată în capitolul 7 (proiectarea directă în domeniul timp), algoritmul studiat are următoarele avantaje:

— conform relației (8.2), numărul multiplicărilor necesare pentru calculul comenzii în buclă automată, în timp real, este minim (egal cu unitatea) și nu depinde de complexitatea modelului $H_f(z)$ sau a funcției de transfer dorite a buclei închise, $H_0(z)$;

— după cum rezultă din expresia (8.35), cîștigul RA, calculat *off-line* și memorat în memoriile de comandă ale RD, este independent de amplitudinea $r \in (0,1]$ a referinței tip treaptă a SA;

— performanțele impuse din proiectare nu depind de condițiile inițiale ale părții fixate discrete (continue). Acest fapt permite realizarea de condiții

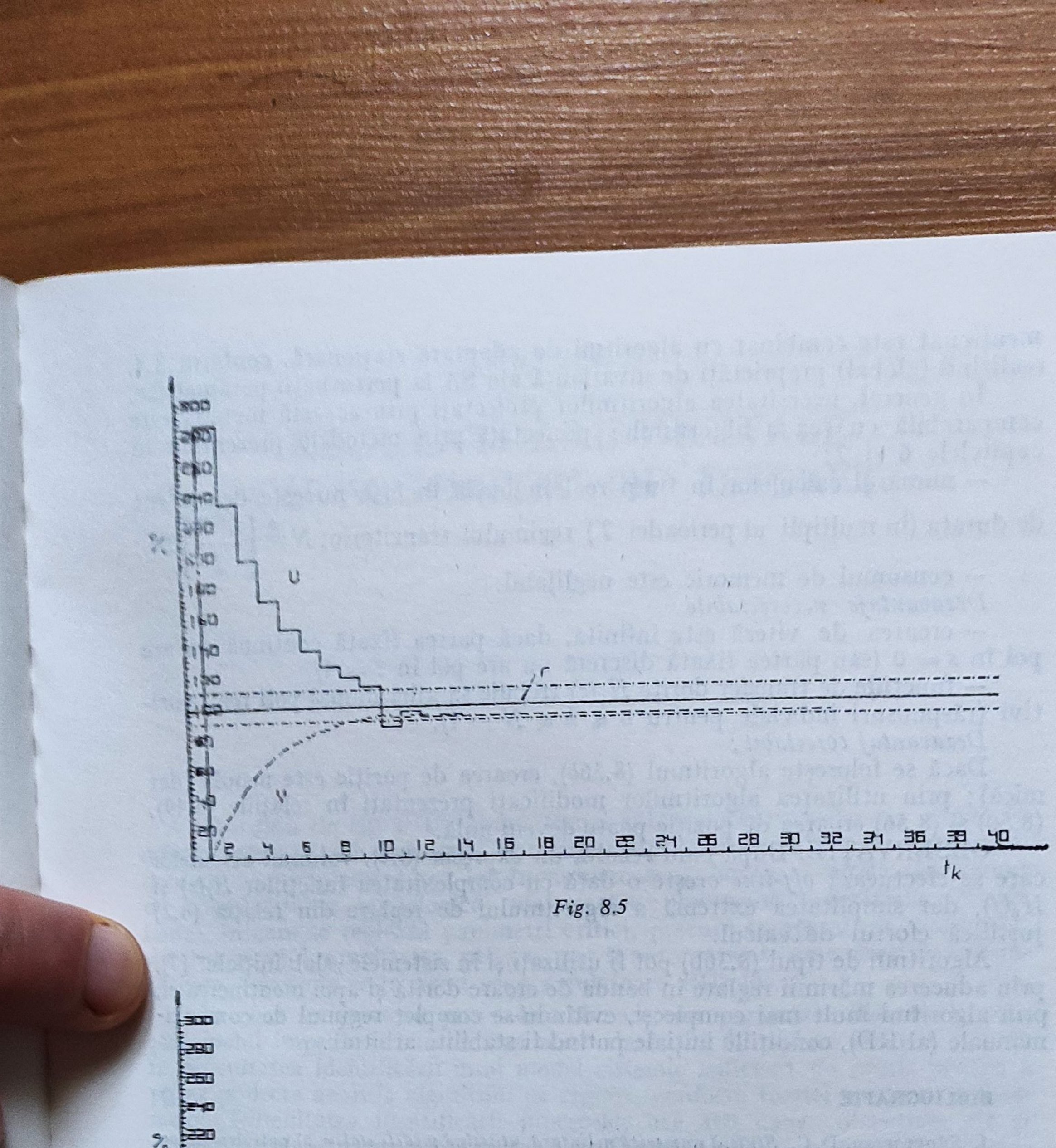


Fig. 8.5

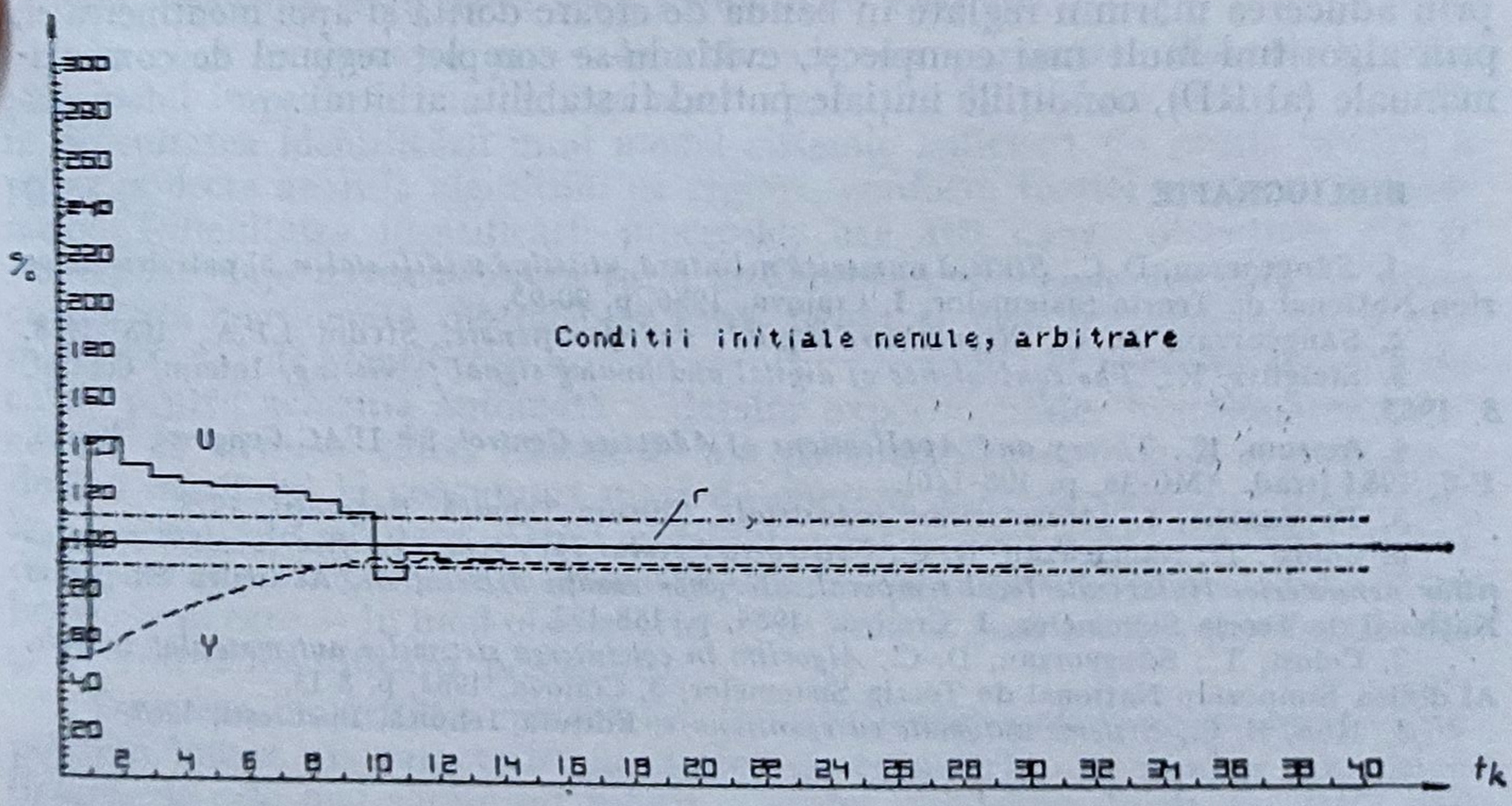


Fig. 8.6

inițiale arbitrare care nu necesită algoritmi suplimentari prin care acestea să fie luate în considerare (ca și în capitolul 7). În plus, prin condiții inițiale nenule, energia de comandă este mult micșorată (se compară parametrul u_k din figurile 8.5 și 8.6);

— datorită simplității algoritmului (8.36b), în cazul unor variații parametrice puternice (K_f), de regim staționar, pentru o aplicație dată algoritmul

menționat este combinat cu algoritmi de adaptare staționară, conform 8.4, realizînd (global) proprietăți de invarianță ale SA la perturbații parametrice.

În general, necesitatea algoritmilor proiectați prin această metodă este comparabilă cu cea a algoritmilor proiectați prin metodele prezentate în capitolele 6 și 7;

— numărul calculelor în timp real în buclă închisă nu este dependent de durata (în multipli ai perioadei T) regimului tranzitoriu, $N \triangleq \left[\frac{t_r^{impus}}{T}\right] \mathbb{N}$;

— consumul de memorie este neglijabil.

Dezavantaje necorectabile:

— eroarea de viteză este infinită, dacă partea fixată continuă nu are pol în $s = 0$ (sau partea fixată discretă nu are pol în $z = 1$)

— funcțiile de transfer dorite $H_0(z)$ trebuie să aibă numai poli reali pozitivi (răspunsuri indiciale pentru $0 \leqslant k \leqslant N - 1$).

Dezavantaj corectabil:

Dacă se folosește algoritmul (8.36*b*), eroarea de poziție este nenulă (dar mică); prin utilizarea algoritmilor modificați prezentați în relațiile (8.49), (8.50) și (8.56) eroarea de poziție poate deveni nulă.

OBSERVAȚIE. După cum rezultă dn expresia (8.4), volumul calculelor care se efectuează *off-line* crește o dată cu complexitatea funcțiilor $H_f(z)$ și $H_0(z)$, dar simplitatea extremă a algoritmului de reglare din relația (8.2) justifică efortul de calcul.

Algoritmii de tipul (8.36b) pot fi utilizați și în sistemele „slab inițiale" [7], prin aducerea mărimii reglate în banda de eroare dorită și apoi menținerea ei, prin algoritmi mult mai complecși, evitîndu-se complet regimul de comenzi-manuale (al RD), condițiile inițiale putînd fi stabilite arbitrar.

BIBLIOGRAFIE

1. Sângeorzan, D. C., *Sinteză numerică neliniară, utilizînd modele etalon*, al patrulea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1986, p. 90-95.

2. Sângeorzan, D. C., *Regulatoare digitale multifuncționale*, Studiu I.P.A., 1987-1988.

3. Steiglitz, K., *The equivalence of digital and analog signal processing*, Inform, Control, 8, 1965.

4. Astrom, K., *Theory and Applications of Adaptive Control*, 8th IFAC Congress, Kyoto, P-6, 1981 (trad. AMC-38, p. 108-126).

5. Papadache, I., *Automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1978.

6. Coloși, T.; Sângeorzan, D. C., *Utilizarea testului Jury pentru verificarea stabilității soluțiilor nenumerice liniarizate local temporal, ale unor ecuații diferențiale*, Al treilea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1984, p. 188-192.

7. Coloși, T.; Sângeorzan, D. C., *Algoritm în conducerea sistemelor automate slab inițiale*, Al doilea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 3, Craiova, 1982, p. 8-13.

8. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eșantionare*, Editura Tehnică, București, 1967.

Capitolul 9

REGULATOARE DIGITALE CU ALGORITMI PID DISCREŢI

Algoritmii de tip PID (*P*roportional-*I*ntegral-*D*erivativ) s-au impus în diferite domenii ale industriei datorită simplității deosebite și experienței dobîndite în implementarea lor în numeroase aplicații specifice. Indiferent de complexitatea tehnologică, majoritatea proceselor industriale (relativ lente), în care se reglează parametri critici, precum temperatura, presiunea, debitul, nivelul, umiditatea, pH ș.a., pot fi automatizate cu o precizie satisfăcătoare, folosindu-se în acest scop regulatoare PID [6].

În ceea ce privește procesele neliniare, cu parametri distribuiți, etc., principalul impediment în sinteza unor algoritmi de reglare evoluați constă în dificultatea identificării unui model sistemic suficient de precis pentru a putea proiecta analitic algoritmii de reglare, conform teoriei moderne a sistemelor. Dificultatea identificării proceselor are atît cauze obiective, cît și subiective, majoritatea acestora fiind analizate în [5]. Una din cauzele principale este considerată discrepanța între teoria și practica sistemelor automate. Efortul de identificare este de regulă apreciabil; el necesită sisteme de calcul pentru achiziția automată a datelor experimentale, funcționarea procesului la diverse valori extremale ale parametrilor ce vor fi reglați ș.a., ducînd inevitabil la consumuri mari de energie, materii prime și materiale, la produse finite rebutate. Astfel de situații sînt perfect obiective din punctul de vedere al proiectantului (automatist), dar ele sînt privite subiectiv de către beneficiarul care — în mod obligatoriu — trebuie să țină seama, printre altele, și de costul identificării procesului.

Deoarece majoritatea proceselor (relativ lente) pot fi aproximate (pe porțiuni liniare ale caracteristicii statice de transfer) prin modele sistemice liniare, de cele mai multe ori informaționale, regulatoarele de tip PID vin să suplinească lipsa analizei riguroase a procesului (conform teoriei identificării), permițînd ca prin intermediul a doar trei parametri de acord să se regleze satisfăcător procese de tipul menționat prin proceduri experimentale, bine puse la punct metodologic și practic.

Aceste metode includ numeroase recomandări (ca orice metodă empirico-experimentală), care nu constituie o garanție sigură (apriori) a optimalității absolute a valorilor alese pentru cei trei parametri (dovadă numărul mare de recomandări), dar constituie un punct de inițializare util într-o procedură

iterativă a acordării experimentale. Metodele clasice tipice RA-PID-continue tind să fie substituite la ora actuală prin metode moderne în care se proiectează algoritmi PID cu autoacordare, cu predicție, cu structură variabilă, adaptivi ș.a., specifici reglărilor numerice, în care beneficiul adus prin utilizarea unui sistem de calcul în timp real permite implementarea anumitor algoritmi performanți, imposibil de realizat în regulatoarele analogice la prețul și gabaritul proprii regulatoarelor digitale.

Scopul utilizării RA de tip PID rămîne dictat de dificultatea identificării precise a proceselor industriale uzuale și apelarea la metode experimentale de acordare. Tendința actuală, în ipoteza folosirii lor, este aceea de a elimina acordarea manuală, experimentală, prin proiectarea de algoritmi PID cu autoacordare (AA-*self-tuning*, PID adaptivi, în cazul perturbațiilor parametrice procesuale puternice, PID cu reacții multiple de tip *feedback* și, respectiv, *feedforward*, pentru compensarea perturbațiilor externe, măsurabile, PID cu predictori pentru procese cu timp mort mare), de alți algoritmi PID cu performanțe îmbunătățite.

Așadar, pentru procese liniare (pe porțiuni în jurul punctelor nominale de funcționare) neafectate de perturbații puternice, parametrice sau externe, cu timpi morți neexcesiv de mari, regulatoarele uzuale de tip PID se impun la ora actuală în calitate de cea mai comodă soluție de automatizare eficientă din punct de vedere economic.

9.1. ALGORITMI PID

9.1.1. Algoritmi PID discreți necvasicontinui

Algoritmul PID continuu de referință, cu factor de interinfluență nul, utilizat pentru obținerea algoritmilor PID discreți, este descris prin intermediul relației [4]:

$$u(t) = K_R\left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_d\,\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right], \tag{9.1}$$

cu condiții inițiale $u(0)$, $\varepsilon(0)$ ce vor fi precizate în paragrafele următoare, u și ε avînd semnificațiile consacrate, adică comanda („ieșirea algoritmului"), respectiv eroarea buclei automate.

Algoritmii PID discreți se obțin din cei continui (9.1) prin aproximarea modulelor P, I și D continue, într-o vecinătate a momentului curent de timp discret, $t_k \triangleq kT$, $k \geqslant 0$, în care T este perioada de eșantionare a mărimilor sistemice, aleasă relativ arbitrar. Modulele discrete P, I și D se obțin folosindu-se *metoda dreptunghiului* sau *metoda trapezelor* [2], [7].

Dacă $v(t)$ este o mărime integrabilă, atunci prin *metoda dreptunghiului* se face aproximarea:

$$\int_{t_k-T}^{t_k} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \simeq Tv(t_k) \triangleq Tv_k, \tag{9.2}$$

iar prin *metoda trapezelor*, aproximarea:

$$\int_{t_k-T}^{t_k} v(\tau)\,\mathrm{d}\tau \simeq \frac{T}{2}\,(v_k + v_{k-1}), \tag{9.3}$$

cu observația că $t_k - T \stackrel{\Delta}{=} t_{k-1}$.

Module I discrete. Pornind de la modelul I continuu $\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, se pot obține module I discrete utilizînd fie *metoda dreptunghiului*, fie *metoda trapezelor*.

În primul caz rezultă modulul I discret:

$$\frac{1}{T_i}\int_0^{t_k} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{(9.2)} \frac{T}{T_i}\sum_{j=0}^{k}\varepsilon_j,\ K_\mathrm{I} \stackrel{\Delta}{=} \frac{T}{T_i}, \tag{9.4}$$

iar în al doilea, modulul I discret:

$$\frac{1}{T_i}\int_0^{t_k} \varepsilon(\tau)\,\mathrm{d}\tau \xrightarrow{(9.3)} \frac{T}{2T_i}\sum_{j=0}^{k}(\varepsilon_j + \varepsilon_{j-1}),\ K'_\mathrm{I} \stackrel{\Delta}{=} \frac{T}{2T_i} = \frac{K_\mathrm{I}}{2}. \tag{9.5}$$

Module D discrete. Se aproximează termenul $T_d \left.\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_k}$ prin

$$T_d \left.\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_k} \simeq \frac{T_d}{T}\,(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}),\ K_\mathrm{D} \stackrel{\Delta}{=} \frac{T_d}{T}, \tag{9.6}$$

unde $\varepsilon_k \stackrel{\Delta}{=} r_k - y_k$, iar r_k, y_k reprezintă eșantioanele la $t = t_k$ ale mărimii de referință, respectiv ale măsurii (mărimii reglate).

Deoarece derivarea erorii ε presupune derivarea măsurii și a referinței, este necesară filtrarea lor numerică (FTJ). În aceste condiții pot să apară următoarele cazuri particulare:

- Referința este internă (neafectată de zgomot) și constantă sau externă (lent variabilă și neafectată sensibil de zgomot); atunci, $\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} \simeq -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, efectul D fiind filtrat și introdus doar pe măsura y.

Notîndu-se $y_k^* = y_k^{\text{filtrat}}$, modulul D discret devine:

$$T_d \left.\frac{\mathrm{d}\varepsilon^*(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_k} \simeq -K_\mathrm{D}(y_k^* - y_{k-1}^*), \tag{9.7}$$

conform schemei din fig. 9.1. Filtrul numeric este oricare din cele descrise la capitolul 3.

- Ambele mărimi, r_k și y_k, sînt afectate de zgomot (zgomot de eșantionare, la care se adaugă zgomot industrial indus). Atunci modulul D discret devine:

$$T_d \left.\frac{\mathrm{d}\varepsilon^*(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_k} \simeq K_\mathrm{D}(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^*). \tag{9.8}$$

conform schemei din fig. 9.2.

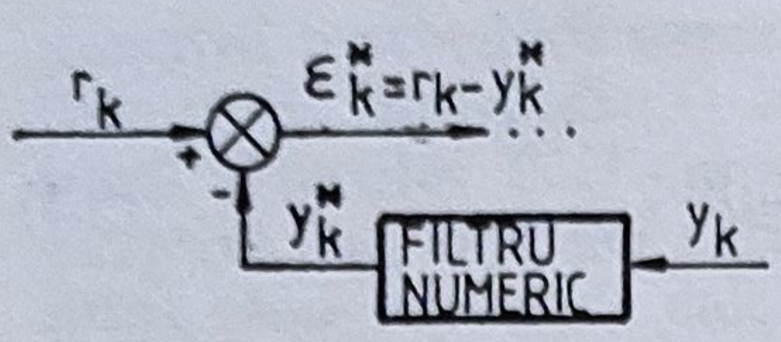


Fig. 9.1

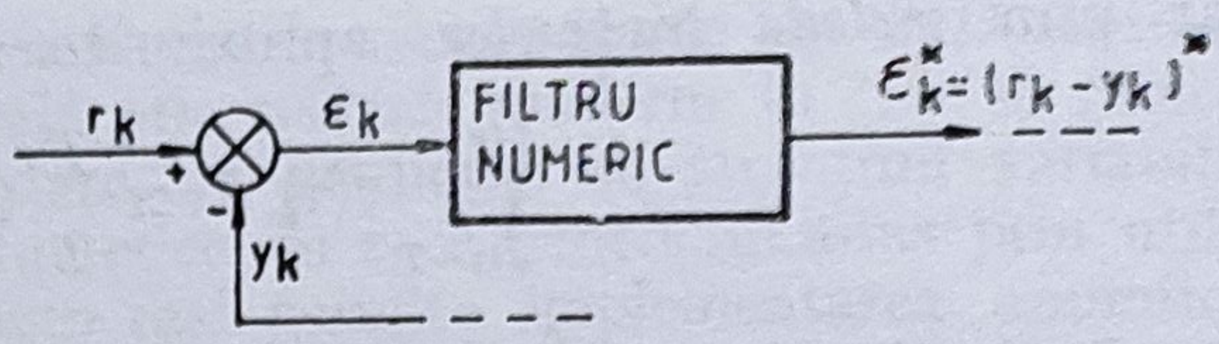


Fig. 9.2

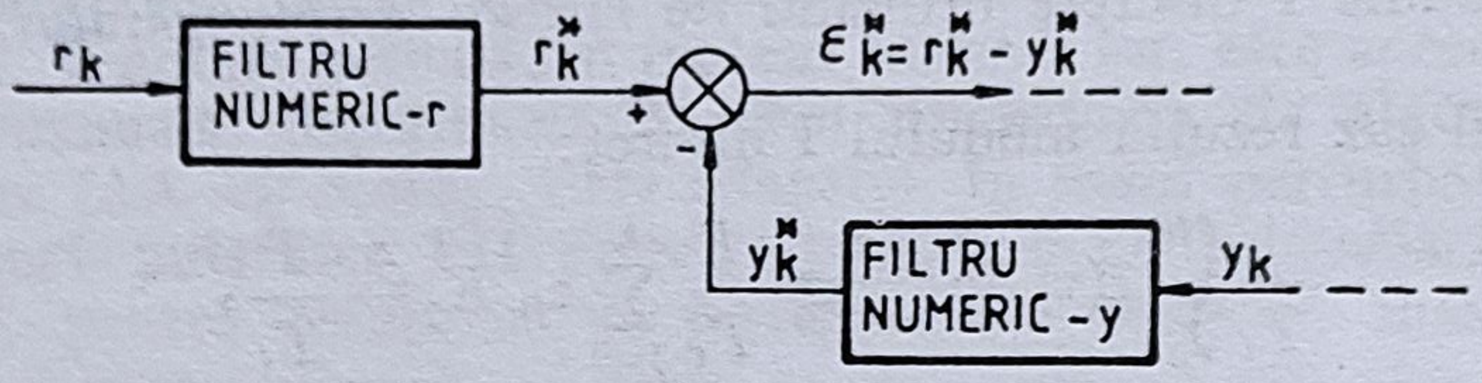


Fig. 9.3

De remarcat că în prezența unor modificări în treaptă (bruște) ale mărimii de referință în buclă închisă, la perioade de eșantionare T relativ mari, pot să apară valori inițiale excesive ale erorii ε_0, ε_1 ,..., cu suprareglaje puternice și (sau) saturări ale comenzii globale u_k, datorate modulelor P și D (pentru procese care necesită acordarea algoritmului, cu valori mari ale parametrilor K_R și K_D). În această situație se recomandă filtrarea numerică independentă, de măsură, a referinței (internă sau externă), conform schemei din fig. 9.3, unde frecvența de tăiere a filtrului F_1 este de regulă fixă, iar cea a filtrului F_2, variabilă (programabilă) [1].

Modulul D discret, preferat în majoritatea algoritmilor PID discreți uzuali, este cel descris în (9.7), deci cu „derivarea" exclusiv a măsurii filtrate numeric, utilizînd filtre numerice liniare de ordinul I (capitolul 3), filtre care necesită numărul minim de multiplicări în timp real, în buclă închisă.

Algoritmi PID discreți uzuali. Reunind diferitele module I și D discrete din paragraful precedent, se obțin diverși algoritmi PID de poziție care furnizează comenzi u_k absolute (în mărime) [2], [4].

Considerînd pentru modulul I discret varianta din (9.4), rezultă algoritmul

$$u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* + K_I \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j^* + K_D(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^*)\right), \tag{9.9}$$

unde s-a utilizat modulul D discret din (9.8), cu filtrare, conform fig. 9.2 sau 9.3, respectiv algoritmul

$$u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* + K_I \sum_{j=0}^{k} \varepsilon_j^* - K_D(y_k^* - y_{k-1}^*)\right), \tag{9.10}$$

pentru modulul D discret în varianta din (9.7).

Dacă se consideră modulul I discret cu aspectul din (9.5), rezultă algoritmul:

$$u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* + \frac{K_I}{2} \sum_{i=0}^{k} (\varepsilon_i^* + \varepsilon_{i-1}^*) + K_D(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^*)\right), \tag{9.11}$$

iar dacă se utilizează modulul D din (9.8) se obține

$$u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* + \frac{K_I}{2}\sum_{j=0}^{k}(\varepsilon_j^* + \varepsilon_{j-1}^*) - K_D(y_k^* - y_{k-1}^*)\right), \qquad (9.12)$$

unde pentru modulul D discret s-a utilizat relația (9.7).

Algoritmii PID discreți de poziție descriși în relațiile (9.9), (9.10), (9.11) și (9.12) au echivalent în algoritmii incrementali, cînd RA furnizează comanda incrementală $\Delta u_k \overset{\Delta}{=} u_k - u_{k-1}$, iar EE este de tip integrator, completînd funcția sistemică de tip PID, [2], [4]. Corespunzător acestor relații se obțin următorii algoritmi incrementali:

$$\Delta u_k = K_R(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^* + K_I\varepsilon_k^* + K_D(\varepsilon_k^* - 2\varepsilon_{k-1}^* + \varepsilon_{k-2}^*)), \qquad (9.13)$$

corespunzător algoritmului (9.9)

$$\Delta u_k = K_R(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^* + K_I\varepsilon_k^* - K_D(y_k^* - 2y_{k-1}^* + y_{k-2}^*)), \qquad (9.14)$$

pentru algoritmul din (9.10);

$$\Delta u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^* + \frac{K_I}{2}(\varepsilon_k^* + \varepsilon_{k-1}^*) + K_D(\varepsilon_k^* - 2\varepsilon_{k-1}^* + \varepsilon_{k-2}^*)\right), \qquad (9.15)$$

ce corespunde algoritmului (9.11) și

$$\Delta u_k = K_R\left(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}^* + \frac{K_I}{2}(\varepsilon_k^* + \varepsilon_{k-1}^*) - K_D(y_k^* - 2y_{k-1}^* + y_{k-2}^*)\right), \qquad (9.16)$$

echivalent algoritmului (9.12)

Toți algoritmii de poziție din relațiile (9.9), (9.10), (9.11) și (9.12) pot fi scriși conform formulei:

$$u_k^{abs.} = u_{k-1}^{abs.} + \Delta u_k, \qquad (9.17)$$

unde $u_{k-1}^{abs.}$ este comanda absolută calculată la pasul anterior, $t_{k-1} \overset{\Delta}{=} (k-1)T$, și memorată. La momentul curent t_k se calculează comanda absolută, după relația (9.17), unde Δu_k sînt comenzile incrementale calculate conform uneia din expresiile (9.13), (9.14), (9.15) sau (9.16). Acestea pot fi și ele scrise modularizat prin:

$$\Delta u_k = K_R(\Delta u_k^P + \Delta u_k^I + \Delta u_k^D). \qquad (9.18)$$

Aspectele minimale (ca număr de multiplicări) ale subcomenzilor Δu_k^P, Δu_k^I, Δu_k^D pot fi deduse direct din cele patru relații distincte corespunzătoare lui Δu_k — (9.13), (9.14), (9.15) și (9.16).

Indiferent de tipul algoritmului, de poziție sau incremental, este indicat calculul subcomenzilor incrementale, conform relațiilor (9.18), (9.13), (9.14), (9.15) și (9.16), de unde se obține rezultatul final pentru comenzile incrementale sau, utilizînd relația (9.17), rezultă cele absolute.

Exprimarea în domeniul z a algoritmilor PID discreți. În abordarea acestui aspect se va avea în atenție numai algoritmii de poziție.

Forma interpretabilă sistemic a tuturor algoritmilor necesită exprimarea lor în domeniul z, în care variabila z^{-1} se asimilează cu operatorul de întîrziere de o perioadă de eșantionare (conform capitolului 2).

Conform [8], sumele reale $\sum_{j=0}^{h} v_j$ au, după aplicarea transformatei $\mathfrak{Z}$ și asimilarea lui z^{-1} ca operatorul mai sus amintit, aspectul în z^{-1}:

$$\mathfrak{Z}\left\{\sum_{j=0}^{h} v_j\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} v_k, \; v\text{-stabil.} \tag{9.19}$$

Utilizînd relația generală (9.19), algoritmii de poziție descriși în relațiile (9.9), (9.10), (9.11) și (9.12) au în z^{-1} aspectul [1]:

$$u_k = K_R\left(1 + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right)\varepsilon_k^*, \tag{9.20}$$

corespunzător algoritmului (9.9);

$$u_k = K_R\left(1 + \frac{K_I}{1-z^{-1}}\right)\varepsilon_k^* - K_R K_D(1-z^{-1})\, y_k^*, \tag{9.21}$$

pentru algoritmul din (9.10), cu $\varepsilon_k^* \triangleq r_k - y_k^*$;

$$u_k = K_R\left(1 + \frac{K_I}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right)\varepsilon_k^*, \tag{9.22}$$

echivalent algoritmului (9.11), cu $\varepsilon_k^* \triangleq r_k - y_k^*$.

$$u_k = K_R\left(1 \dot{+} \frac{K_i}{2}\,\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\varepsilon_k^* - K_R K_D(1-z^{-1})\, y_k^* \tag{9.23}$$

corespunzător algoritmului 9.12.

Cel mai utilizat aspect este cel din relația (9.21), unde modulul D discret este aplicat exclusiv pe măsura filtrată prin filtre numerice de ordinul I.

Forma în domeniul z a filtrului de ordinul I este:

$$F(z^{-1}) = \frac{1-c}{1-cz^{-1}}, \; c \triangleq 1 - c_f \in [0,\ 1],$$

unde c_f este constanta (adimensională) a filtrului, cu semnificațiile din capitolul 3.

Algoritmul din (9.21), reordonat conform relației $\varepsilon_k^* = r_k - y_k^*$, în care se evidențiază filtrul $F(z^{-1})$ aplicat, este de forma

$$u_k = K_R\left(1 + \frac{K_I}{1-z^{-1}}\right)r_k - K_R\left(1 + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right)y_k^*, \tag{9.24}$$

cu

$$y_k^* = F(z^{-1})\, y_k. \tag{9.25}$$

Deci,

$$u_k = \frac{K_R(1+K_I-z^{-1})}{1-z^{-1}} r_k - K_R\,\frac{1-z^{-1}+K_I+K_D(1-z^{-1})^2}{1-z^{-1}}\,\frac{1-c}{1-cz^{-1}}\, y_k. \tag{9.26}$$

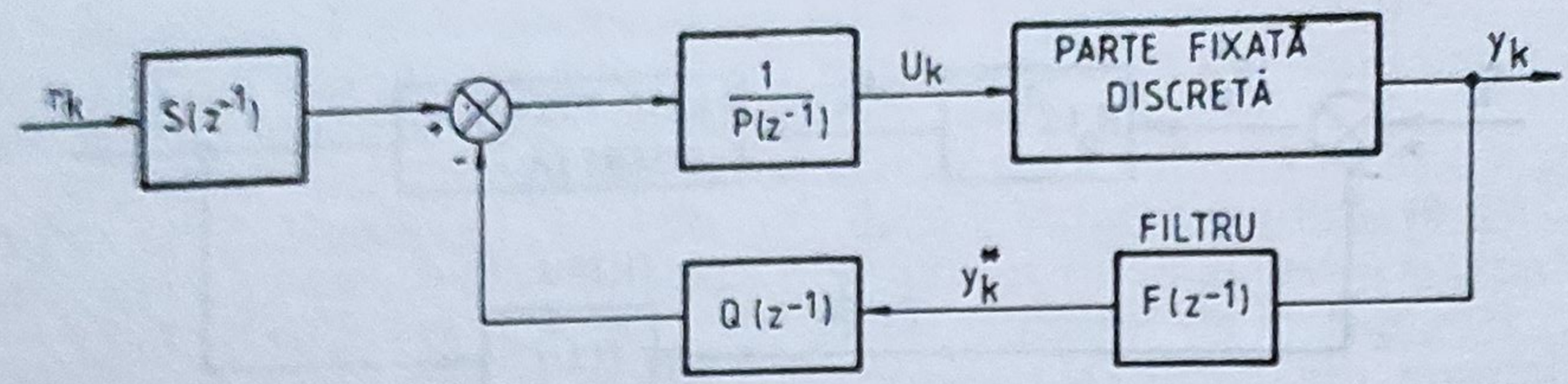


Fig. 9.4

Polinoamele formale, în z^{-1}, evidențiate în (9.26) se notează astfel:

$$S(z^{-1}) \triangleq K_R(1 + K_I - z^{-1}),$$

$$P(z^{-1}) \triangleq 1 - z^{-1}, \tag{9.27}$$

$$Q(z^{-1}) \triangleq K_R[1 - z^{-1} + K_I + K_D(1 - z^{-1})^2].$$

Cu aceste notații, algoritmul din (9.26) se scrie:

$$u_k = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})} r_k - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} F(z^{-1})\, y_k. \tag{9.28}$$

care corespunde configurației sistemice din fig. 9.4.

Aspectul algoritmului din (9.28) ese preferat în sinteza algoritmilor PID discreți adaptivi [9], [25].

Dacă în relația (9.21) se notează:

$$H_{R_1}(z^{-1}) \triangleq K_R\left(1 + \frac{K_I}{1 - z^{-1}}\right), \quad H_{R_2}(z^{-1}) \triangleq K_R K_D(1 - z^{-1}),$$

rezultă:

$$u_k = H_{R_1}(z^{-1})\, \varepsilon_k^* - H_{R_2}(z^{-1})\, y_k^*. \tag{9.29}$$

Algoritmul din (9.21), cel mai uzual implementat, este descris prin schema-bloc din fig. 9.5.

Notîndu-se

$$H_R(z^{-1}) \triangleq K_R\left(1 + \frac{K_I}{1 - z^{-1}} + K_D(1 - z^{-1})\right), \tag{9.30}$$

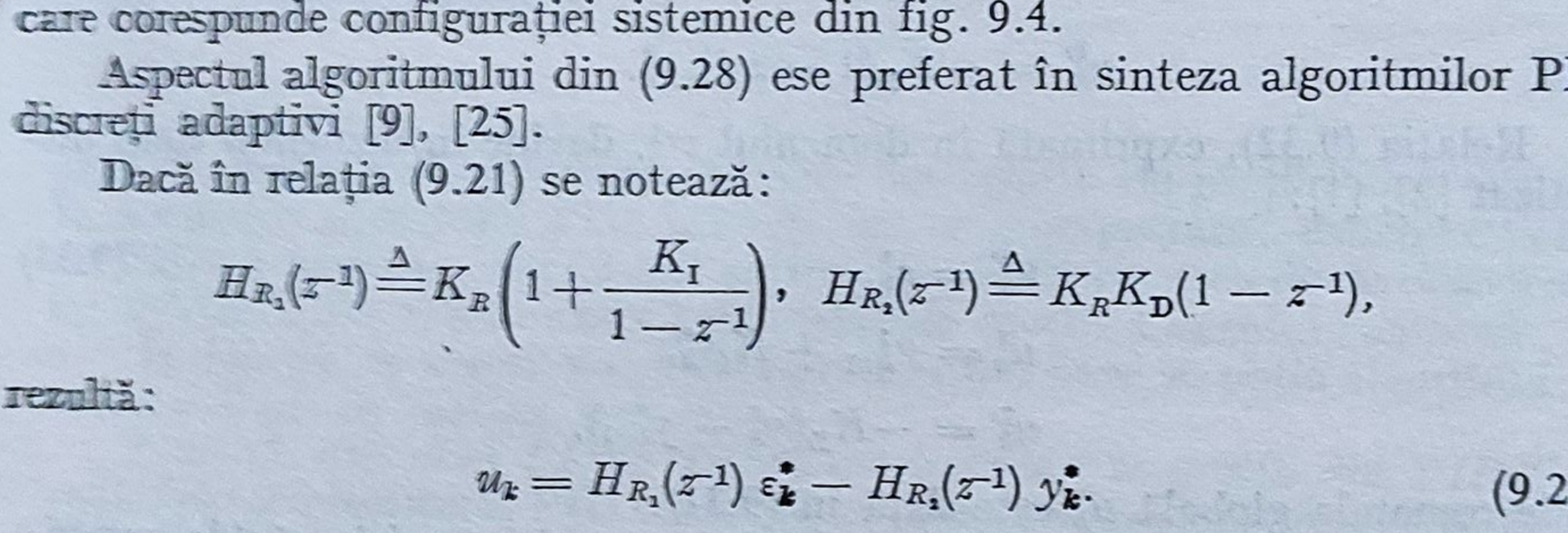


Fig. 9.5

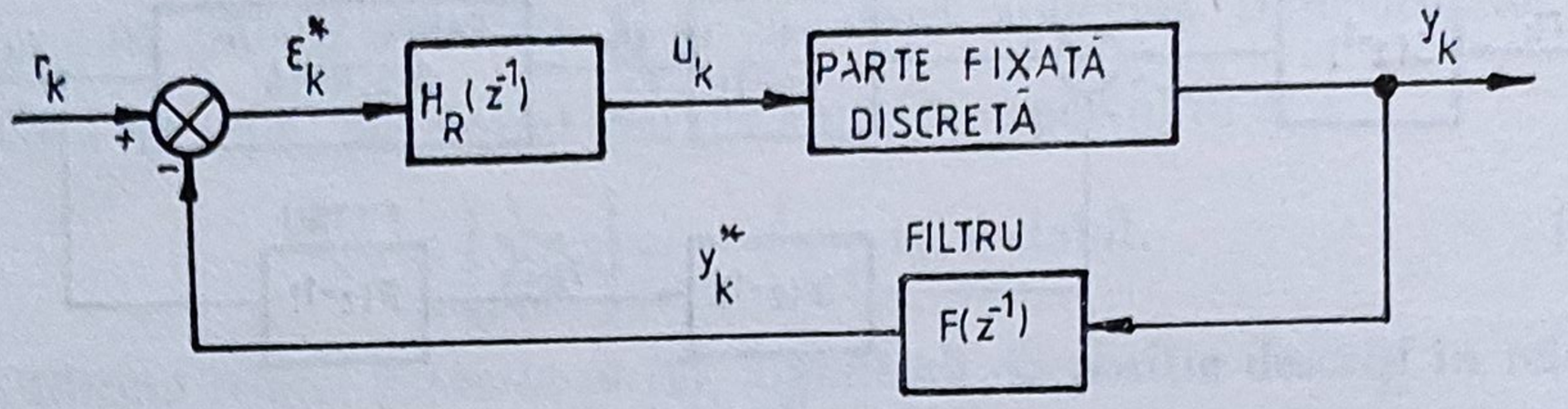


Fig. 9.6

algoritmul PID discret din (9.20) se reprezintă comparativ cu (9.21) în schema din fig. 9.6.

Din punctul de vedere al implementării practice în RD, sub aspectul numărului minim de calcule în timp real, în buclă automată, algoritmul (9.21) — considerat de referință — este calculat modularizat [1]:

$$u_k = K_R(u_k^{\mathrm{P}} + u_k^{\mathrm{I}} + u_k^{\mathrm{D}}), \tag{9.31}$$

$$u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k^*, \quad \varepsilon_k^* = r_k - y_k^*;$$

unde

$$u_k^{\mathrm{I}} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{1 - z^{-1}} \varepsilon_k^*, \tag{9.32}$$

$$u_k^{\mathrm{D}} = -K_{\mathrm{D}}(1 - z^{-1})\, y_k^*.$$

Relația (9.32), exprimată în domeniul z^{-1}, devine în domeniul timp discretizat [2], [1]:

$$u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k^*, \tag{9.33}$$

$$u_k^{\mathrm{I}} = u_{k-1}^{\mathrm{I}} + K_{\mathrm{I}}\varepsilon_k^*,$$

$$u_k^{\mathrm{D}} = -K_{\mathrm{D}}(y_k^* - y_{k-1}^*),$$

unde comanda globală u_k este dată în (9.31).

Dacă pentru modulul I discret se dorește o precizie mai bună (de aproximare a lui din cel continuu), mai ales la perioade relativ mari de eșantionare T, atunci se utilizează forma din relația (9.23), care diferă de cea din (9.21) numai prin modulul I discret [2], [1]

$$u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k^*; \tag{9.34}$$

$$u_k^{\mathrm{I}} = u_{k-1}^{\mathrm{I}} + \frac{K_{\mathrm{I}}}{2}(\varepsilon_k^* + \varepsilon_{k-1}^*);$$

$$u_k^{\mathrm{D}} = -K_{\mathrm{D}}(y_k^* - y_{k-1}^*).$$

Eroarea filtrată ε_k^* se obține fie din $\varepsilon_k^* = r_k - y_k^*$, fie din $\varepsilon_k^* = r_k^* - y_k^*$, respectiv conform figurilor 9.2 și 9.3, iar comanda globală, u_k, din relația (9.31).

Filtrul $F(z^{-1})$ aplicat fie pe referința r_k, fie pe măsura y_k, fie independent (cu frecvențe de tăiere diferite) pe eroarea ε_k are aspectul

$$y_k^* = y_{k-1}^* + c_f^y(y_k - y_{k-1}^*). \tag{9.35}$$

Algoritmul PID-F discret (unde inițiala F provine de la filtrul aplicat) de poziție cel mai utilizat este descris prin ecuațiile cu diferențe finite (9.33), sau (9.34), cu filtrul din expresia (9.35).

Numărul total de multiplicări necesare pentru calculul comenzii globale este de patru. Algoritmul (9.33) necesită două multiplicări, filtrul (9.35) — una, iar comanda globală (9.31) — o singură multiplicare (în total, patru multiplicări).

Dacă se utilizează modulul I din (9.34), numărul de multiplicări rămîne același ca și pentru algoritmul din (9.33), deoarece la calculul său, multiplicarea cu factorul (coeficientul) $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ se aplică pe date reprezentate în format binar intern, de regulă fracționar, și se realizează prin simpla deplasare spre stînga a rangului virgulei numărului fracționar binar.

S-au recenzat operațiile de multiplicare pentru că în regim automat de funcționare a RD, ele consumă cea mai mare parte din timpul de calcul al comenzii u_k.

OBSERVAȚIE. Toate mărimile sistemice care intervin în acest capitol sînt normate conform relațiilor din capitolul 2.

9.1.2. Algoritmi PID-F discreți cvasicontinui

Ipoteza de cvasicontinuitate [10] presupune alegerea perioadei de eșantionare, T, conform relației

$$T \leqslant 0{,}1 \sum_i T_{fi}, \tag{9.36}$$

unde T_{fi} reprezintă constantele de timp dominante ale părții fixate continue. În acest caz, algoritmii PID discreți au o „comportare" cvasiidentică cu cei PID continui din care au fost obținuți prin diverse metode de discretizare, iar acordarea lor se face exact prin metodele specifice cazului continuu.

În funcție de algoritmul PID continuu din care se obțin algoritmii PID cvasicontinui, se disting trei cazuri.

Cazul 1. *Algoritmi PID-F discret cvasicontinui ce provin din PID-F discreți*. Pentru algoritmul PID continuu se consideră aspectul din (9.1), în care filtrarea se face cu filtre numerice, adică filtrul continuu nu este considerat înglobat în algoritmul continuu PID-F; atunci, oricare din formele (9.13) ... ... (9.16) de algoritmi incrementați cu comanda absolută dată în (9.17) constituie un algoritm PID cvasicontinuu, cu condiția ca perioada de eșantionare, T, să se aleagă mică (foarte mică), conform relației (9.36).

În abordarea cvasicontinuă, algoritmul incremental din (9.13) sau cel din (9.15) se aduce la o formă minimală din punctul de vedere al calculelor.

În formă redusă, algoritmul incremental din (9.13) se scrie astfel

$$\Delta u_k = K_R(1 + K_I + K_D)\,\varepsilon_k^* - K_R(1 + 2K_D)\,\varepsilon_{k-1}^* + K_R K_D \varepsilon_{k-2}^*, \tag{9.37}$$

iar cel din (9.15),

$$\Delta u_k = K_R\left(1 + \frac{K_I}{2} + K_D\right)\varepsilon_k^* - K_R\left(1 - \frac{K_I}{2} + 2K_D\right)\varepsilon_{k-1}^* + K_R K_D \varepsilon_{k-2}^*, \tag{9.38}$$

unde K_I și K_D au semnificațiile din expresiile (9.4) și (9.6).

Notîndu-se

$$\alpha_0 = K_R(1 + K_I + K_D),\ \alpha_1 = -K_R(1 + 2K_D),\ \alpha_2 = K_R K_D,$$

$$\beta_0 = K_R\left(1 + \frac{K_I}{2} + K_D\right),\quad \beta_1 = -K_R\left(1 - \frac{K_I}{2} + 2K_D\right),\quad \beta_2 = \alpha_2, \tag{9.39}$$

algoritmii incrementali (9.37) și (9.38) iau forma:

$$\Delta u_k = \alpha_0 \varepsilon_k^* + \alpha_1 \varepsilon_{k-1}^* + \alpha_2 \varepsilon_{k-2}^*, \tag{9.40}$$

$$\Delta u_k = \beta_0 \varepsilon_k^* + \beta_1 \varepsilon_{k-1}^* + \beta_2 \varepsilon_{k-2}^*, \tag{9.41}$$

iar comanda absolută este dată de relația (9.17).

OBSERVAȚIE. Numărul de multiplicări în timp real necesare pentru calculul comenzii u_k, la ieșirea RD, este egal cu trei. Coeficienții α_0, α_1, α_2 sau β_0, β_1, β_2 se definitivează după acordarea algoritmului PID cvasicontinuu, în funcție de parametrii K_R, T_i și T_d. Coeficientul α_i sau β_i se definitivează numeric fie *off-line* (manual) fie *on-line*, de către propriul sistem de calcul al RD, astfel încît — pentru a păstra analogia urmărită — coeficienții care se introduc prin panoul RD să fie identici cu cei din cazul continuu (K_R, T_i, T_d). Această variantă finală este utilizată de toate RD care au implementați algoritmi PID cvasicontinui.

În aceeași idee, de cvasiidentitate funcțională sistemică, se preferă varianta de algoritm din (9.41), în care modulul I discret s-a obținut prin *metoda trapezelor* (mai precisă decît *metoda dreptunghiului*).

Cazul 2. *Algoritmi PID-F cvasicontinui provenind din cei continui cu interinfluență nulă*. Algoritmul PID-F continuu este:

$$H_{\text{PID-F}}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \alpha T_d s}\right) \triangleq \frac{U(s)}{\varepsilon(s)}. \tag{9.42}$$

Algoritmul (9.42) este cu interinfluență nulă și cu filtrarea componentei derivativă, D.

Parametrul α se consideră în plaja de valori [3]:

$$\alpha = 0{,}1 \ldots 0{,}2. \tag{9.43}$$

Pentru a obține algoritmul PID-F discret, $H_{\text{PID-F}}(s)$, relația (9.42) se scrie sub forma:

$$H_{\text{PID-F}}(s) = K_R \frac{(1+\alpha)T_i T_d s^2 + (T_i + \alpha T_d)s + 1}{\alpha T_d T_i s^2 + T_i s} = \frac{U(s)}{\varepsilon(s)}. \tag{9.44}$$

Utilizînd *metoda dreptunghiului* (9.2), algoritmul PID-F discret corespunzător algoritmului continuu din (9.44) este descris prin relația:

$$u_k = \frac{2\alpha K_D + 1}{\alpha K_D + 1} u_{k-1} - \frac{\alpha K_D}{\alpha K_D + 1} u_{k-2} + K_R \frac{(1+\alpha)K_D + \alpha K_D K_I + K_I + 1}{\alpha K_D + 1} \varepsilon_k -$$

$$- K_R \frac{2(1+\alpha)K_D + \alpha K_I K_D + 1}{\alpha K_D + 1} \varepsilon_{k-1} + K_R \frac{(1+\alpha)K_D}{\alpha K_D + 1} \varepsilon_{k-2}; \tag{9.45}$$

coeficienții K_I și K_D sînt definiți în (9.4) și (9.6).

Dacă în (9.42) se ia $T_d = 0$ se obține algoritmul PI continuu:

$$H_{\text{PI}}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right), \tag{9.46}$$

care, discretizat prin *metoda dreptunghiului*, conduce la algoritmul PI discret:

$$u_k = u_{k-1} + K_R(1 + K_{\text{I}})\,\varepsilon_k - K_R\varepsilon_{k-1}. \tag{9.47}$$

Dacă în algoritmul PID-F discret din (9.45) se consideră $K_{\text{D}} = 0$, rezultă algoritmul discret:

$$u_k = u_{k-1} + K_R(1 + K_{\text{I}})\,\varepsilon_k - K_R\varepsilon_{k-1}. \tag{9.48}$$

Comparîndu-se algoritmii (9.47) și (9.48) se constată că ei coincid.
Dacă în (9.42) se consideră $T_i \to \infty$, se obține algoritmul continuu PD-F:

$$H_{\text{PD-F}}(s) = K_R\left(1 + \frac{T_d s}{1 + \alpha T_d s}\right), \tag{9.49}$$

care, discretizat prin *metoda dreptunghiului*, conduce la algoritmul PD-F discret:

$$u_k = \frac{\alpha K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1} u_{k-1} + K_R \frac{1 + (1 + \alpha)\,K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1}\varepsilon_k - K_R \frac{(1 + \alpha)\,K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1}\varepsilon_{k-1}. \tag{9.50}$$

În situația că în algoritmul PID-F discret din (9.45) se ia $K_{\text{I}} = 0 (T_i \to \infty)$ se obține algoritmul discret:

$$u_k = \frac{2\alpha K_{\text{D}} + 1}{\alpha K_{\text{D}} + 1} u_{k-1} - \frac{\alpha K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1} u_{k-2} + K_R \frac{1 + (1 + \alpha)\,K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1}\varepsilon_k -$$

$$- K_R \frac{1 + 2(1 + \alpha)\,K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1}\varepsilon_{k-1} + K_R \frac{(1 + \alpha)\,K_{\text{D}}}{\alpha K_{\text{D}} + 1}\varepsilon_{k-2}. \tag{9.51}$$

Comparîndu-se algoritmii (9.50) și (9.51) se constată că aceștia nu coincid.
În concluzie, algoritmul general (9.45) PID-F discret nu se recomandă spre implementare în RD cu configurații programabile (P, PD-F, PI, PID-F), întrucît necesită, pentru configurația PD-F, un modul (software) independent. Configurația PD-F din (9.50) nu se obține din (9.45) prin simpla opțiune $K_{\text{I}} = 0$.

Soluția constă în aceea că, în cazul implementării algoritmului PID-F discret din relația (9.45) în RD cu configurații programabile prin opțiunile $K_{\text{D}} = 0$ sau $K_{\text{I}} = 0$, este preferată modularizarea algoritmului (9.42) care se scrie:

$$U(s) = K_R(U^{\text{P}}(s) + U^{\text{I}}(s) + U^{\text{D-F}}(s)), \tag{9.52}$$

unde

$$U^{\text{P}}(s) = \varepsilon(s);\; U^{\text{I}}(s) = \frac{1}{T_i s}\varepsilon(s);\; U^{\text{D-F}}_{(s)} = \frac{T_d s}{1 + \alpha T_d s}\varepsilon(s). \tag{9.53}$$

Folosindu-se *metoda trapezelor* în (9.53) se obțin modulele discrete $u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k$

$$u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k$$

$$u_k^{\mathrm{I}} = u_{k-1}^{\mathrm{I}} + \frac{T}{2T_i}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}), \tag{9.54}$$

$$u_k^{\mathrm{D-F}} = \frac{\alpha T_d - \frac{T}{2}}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} u_{k-1}^{\mathrm{D-F}} + \frac{T_d}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} \varepsilon_k - \frac{T_d}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} \varepsilon_{k-1},$$

cu $\alpha T_d > \frac{T}{2}$, pentru a evita oscilațiile subcomenzii $u_k^{\mathrm{D-F}}$.

Algoritmul PID-F discret-cvasicontinuu este dat de relația:

$$u_k = K_R(u_k^{\mathrm{P}} + u_k^{\mathrm{I}} + u_k^{\mathrm{D-F}}). \tag{9.55}$$

Pentru $T_d = 0$ rezultă modulul PI discret:

$$u_k = K_R(u_k^{\mathrm{P}} + u_k^{\mathrm{I}}), \tag{9.56}$$

iar dacă $T_i \to \infty$, modulul PD-F discret:

$$u_k = K_R(u_k^{\mathrm{P}} + u_k^{\mathrm{D-F}}). \tag{9.57}$$

O configurație particulară de reglare este selecționată prin opțiunile simple $K_{\mathrm{D}} = 0$ $(T_d = 0)$ sau $K_{\mathrm{I}} = 0$ $(T_i \to \infty)$.

Reducerea numărului de calcule în varianta modularizată din (9.54) și (9.55) a permis utilizarea *metodei trapezelor* pentru obținerea algoritmilor discreți.

Aspectul modularizat din relațiile (9.54) și (9.55) reprezintă avantajul acordării independente a modulelor P, I și D-F, algoritmul din relația (9.42) fiind cu interinfluență nulă.

Cazul 3. *Algoritmi PID cvasicontinui provenind din cei PID-F continui cu interinfluență*. Algoritmul PID-F continuu este descris de relația:

$$H_{\mathrm{PID-F}}(s) = K_R \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + \alpha T_d s)}. \tag{9.58}$$

Conform [11], algoritmul PID-F discret cvasicontinuu obținut din cel continuu (9.58) folosindu-se *metoda trapezelor* pentru aproximare are aspectul:

$$u_k = c_1 u_{k-1} + c_2 u_{k-2} + d_0 \varepsilon_k + d_1 \varepsilon_{k-1} + d_2 \varepsilon_{k-2}, \tag{9.59}$$

unde coeficienții sînt [11]:

$$c_1 = \frac{4\alpha T_d}{2\alpha T_d + T}, \quad c_2 = -\frac{2\alpha T_d - T}{2\alpha T_d + T};$$

$$d_0 = K_R \frac{2T_i + T}{2T_i} \frac{2T_d + T}{2\alpha T_d + T}, \quad d_1 = -2K_R \frac{4T_i T_d - T^2}{2T_i(2\alpha T_d + T)}; \tag{9.60}$$

$$d_2 = K_R \frac{2T_i - T}{2T_i} \frac{2T_d - T}{2\alpha T_d + T}.$$

Pentru $T_d = 0$, în (9.58) se obține algoritmul PI continuu:

$$H_{PI}(s) = K_R \frac{1 + T_i s}{T_i s}, \tag{9.61}$$

care — prin *metoda trapezelor* — conduce la algoritmul PI discret descris prin relația:

$$u_k = u_{k-1} + K_R\left(\frac{T}{2T_i} + 1\right)\varepsilon_k + K_R\left(\frac{T}{2T_i} - 1\right)\varepsilon_{k-1}. \tag{9.62}$$

Dacă în algoritmul general PID-F cvasicontinuu din (9.59), cu coeficienții din (9.60), se consideră $T_d = 0$, atunci rezultă algoritmul:

$$u_k = c'_1 u_{k-1} + c'_2 u_{k-2} + d'_0\varepsilon_k + d'_1\varepsilon_{k-1} + d'_2\varepsilon_{k-2}, \tag{9.63}$$

în care

$$c'_1 = 0,\ c'_2 = 1,\ d'_0 = K_R\left(1 + \frac{T}{2T_i}\right),\ d'_1 = K_R\frac{T}{T_i},\ d'_2 = K_R\left(\frac{T}{2T_i} - 1\right). \tag{9.64}$$

Comparîndu-se algoritmul PI discret din (9.62) cu algoritmul obținut în (9.63) cu coeficienții din (9.64) se constată faptul că ei nu coincid.

Se consideră în relația (9.58) $T_i \to \infty$ și se obține algoritmul PD-F continuu:

$$H_{PD\text{-}F}(s) = K_R \frac{1 + T_d s}{1 + \alpha T_d s}, \tag{9.65}$$

care nu este totuși tipic — un modul PD-F cu interinfluență nulă, relația (9.49) — , ci are un aspect de modul *lead-lag* cu avans de fază.

Algoritmul PD-F discret obținut din cel continuu, relația (9.65), prin *metoda trapezelor* are aspectul:

$$u_k = \frac{\alpha T_d - \frac{T}{2}}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} u_{k-1} + K_R \frac{T_d + \frac{T}{2}}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} \varepsilon_k - K_R \frac{T_d - \frac{T}{2}}{\alpha T_d + \frac{T}{2}} \varepsilon_{k-1}. \tag{9.66}$$

Dacă în algoritmul general din expresiile (9.59) și (9.60) se consideră $T_i \to \infty$ se obține algoritmul:

$$u_k = c''_1 u_{k-1} + c''_2 u_{k-2} + d''_0\varepsilon_k + d''_1\varepsilon_{k-1} + d''_2\varepsilon_{k-2}, \tag{9.67}$$

cu coeficienții:

$$c''_1 = \frac{4\alpha T_d}{2\alpha T_d + T};\quad c''_2 = -\frac{2\alpha T_d - T}{2\alpha T_d + T};\quad d''_0 = K_R\frac{2T_d + T}{2\alpha T_d + T};$$
$$d''_1 = -4K_R\frac{T_d}{2\alpha T_d + T};\quad d''_2 = K_R\frac{2T_d - T}{2\alpha T_d + T}. \tag{9.68}$$

Comparînd algoritmul PD-F cvasicontinuu, din (9.66), cu algoritmul (9.67), obținut din cel general (9.59) prin $T_i \to \infty$, se constată necoincidența lor. Acest algoritm nu se recomandă a fi implementat în RD cu configurații programabile P, PI, PD, PID, deoarece necesită module independente (software) pentru fiecare configurație. În aplicații particulare, în care se preferă configurația completă PID-F, el se acordează prin metoda *compensării prin anulare*, combinată cu procedeele de corecție în frecvență (v. capitolele 5 și 9). Această metodă presupune apriori identificarea modelului continuu al părții fixate, la joasă frecvență, cu maximum două constante de timp dominante.

9.2. INIȚIALIZAREA ALGORITMILOR PID ȘI A FILTRELOR NUMERICE

9.2.1. Efectele condițiilor inițiale asupra SA

În orice sistem de conducere automată (nu numai la RD) există în principal, indiferent de tipul algoritmului de reglare implementat, două regimuri de funcționare: manual (M) și, respectiv, automat (A). Marea majoritate a proceselor au caracteristici statice neliniare, ceea ce nu permite utilizarea algoritmilor de reglare liniari decît în vecinătatea punctelor nominale de funcționare, acolo unde caracteristica statică de transfer este aproximativ liniară. Este necesară deci „aducerea" ieșirii procesului în apropierea punctului nominal de funcționare (sau chiar în el) prin comenzi manuale, apoi închiderea buclei prin trecerea în regim automat, în care comenzile sînt furnizate de RD conform algoritmilor de reglare implementați. Din considerentele expuse rezultă existența inerentă a condițiilor inițiale nenule în momentul schimbării regimurilor de lucru.

În momentul (și în momentele imediat următoare) trecerii de la comenzile manuale la cele automate, algoritmul de reglare aplicat cu amendamentul condițiilor inițiale nenule, $u(0)$, $y(0)$, $\varepsilon(0)$, generează șocuri mari în comandă, deci și în ieșirea reglată. Șocurile apar atît la trecerea din regim manual în regim automat, (M) → (A), cît și la modificarea în treaptă în regim automat a referinței SA.

În RD se folosesc frecvent cîteva metode de eliminare (diminuare) a acestor șocuri.

În regim automat, șocurile datorate modificării în treaptă a referinței SA se elimină (diminuează, de regulă) prin filtrarea numerică a referinței cu filtre ce au frecvența de tăiere fixă.

Eliminarea sau diminuarea considerabilă a șocului trecerii de la comanda manuală la cea automată se face în principal prin tehnici *software*, adică prin inițializarea adecvată a filtrelor numerice și a algoritmilor de reglare (în cazul studiat, PID), iar de la cea automată la cea manuală prin diverse metode tipice fiecărei configurații *hard-soft* a RD, care constau în esență în inițializarea comenzii manuale cu ultima valoare a comenzii automate.

9.2.2. Inițializarea filtrelor numerice

Se consideră cazul filtrelor de ordinul I (capitolul 3), preferate în RD uzuale, datorită necesității unei singure multiplicări în timp real, în buclă închisă. De asemenea, fie cazul general cît atît referința, r_k, cît și măsura, y_k,

sînt filtrate independent cu filtre ce au frecvențe de tăiere diferite (și independente).

Ipoteză preliminară. Dacă în momentul de timp (referință pe axa timp) $t_0 = 0.T = 0$ se trece RD din regim M în regim A, atunci în memoria de lucru (RAM) a RD s-au memorat ultimele valori ale comenzii manuale, u_M, respectiv ale măsurii, y_M, la același moment fictiv, considerat $t_{-1} = (-1)T$, $k = -1$, în raport cu momentul $t_0 = 0$ al trecerii în regim A; deci, $y_M \triangleq y_{-1} = y(-T) \cong y_0$ și $u_M \triangleq u_{-1}$.

Inițializarea filtrului mărimii de referință. Ecuația cu diferențe a filtrului este:

$$r_k^* = r_{k-1}^* + c_f^r(r_k - r_{k-1}^*), \tag{9.69}$$

unde $r_k^* \triangleq r_k^{\text{filtrat}}$.

Frecvența de tăiere a filtrului este determinată de coeficientul (adimensional) $c_f^r \in [0,1]$. Pentru $c_f^r = 1$ efectul de filtrare este nul.

Dacă în ecuația (9.69) se ia $k = -1$ rezultă:

$$r_0^* = r_{-1}^* + c_f^r(r_0 - r_{-1}^*); \tag{9.70}$$

inițializarea recomandată este [1];

$$r_{-1}^* = y_M. \tag{9.71}$$

La momentul $t_0 = 0$ referința are valoarea r_0, adică eroarea inițială a buclei închise este:

$$\varepsilon_0 = r_0 - y_M. \tag{9.72}$$

Dacă referința este filtrată, atunci valoarea inițială a erorii buclei va fi:

$$\varepsilon_0^* = r_0^* - y_M. \tag{9.73}$$

Din relațiile (9.70) și (9.71) rezultă:

$$r_0^* = y_M + c_f^r(r_0 - y_M); \tag{9.74}$$

atunci,

$$\varepsilon_0^* = r_0^* - y_M = c_f^r(r_0 - y_M) < r_0 - y_M = \varepsilon_0 \tag{9.75}$$

deoarece $0 < c_f^r < 1$. Așadar, utilizîndu-se filtrul (9.69) cu inițializarea (9.71), eroarea inițială ε_0 care se folosește în algoritmul de reglare se micșorează cu coeficientul c_f^r, $\varepsilon_0^* < \varepsilon_0$. „Saltul" mărimii de referință în absența filtrării este (în mod absolut):

$$\Delta r \triangleq r_0 - y_M = \varepsilon_0,$$

iar dacă mărimea de referință se filtrează, „saltul" efectiv la $t_0 = 0$ va fi:

$$(\Delta r)^* \triangleq r_0^* - y_M = \varepsilon_0^* < \varepsilon_0.$$

Practic, alegîndu-se parametrul

$$c_f^r = 0{,}5, \tag{9.76}$$

după circa 10 perioade de eșantionare, $(\forall)\ k \geqslant 10$, valoarea filtrată $r_k^* \simeq r_k$ cu o precizie mai bună de 10^{-3}, din care motiv efectul de filtrare devine neglijabil.

OBSERVAȚIE. Pentru eliminarea completă a șocului datorat saltului efectiv al mărimii de referință-treaptă, la conectarea RD în regim automat ar trebui, conform relației (9.72), ca $\varepsilon_0 = r_0 - y_M = 0$. Cu alte cuvinte, prin comenzi în regim manual se „aduce" ieșirea reglată (măsura y) la valoarea r_0 a referinței sistemului automat. Algoritmul PID (și în general orice algoritm de reglare după eroare) generează o comandă inițială identică cu cea manuală, u_M, care se menține și la momentele discrete de timp ulterioare pe întreaga durată dacă condiția $\varepsilon_k = 0$ este îndeplinită, situație însă pur teoretică. De altfel, realizarea prin comenzi manuale a egalității $y_M = r_0$ nu este utilizată de regulă pentru sistemele lente sau foarte lente, întrucît „atingerea" condiției $y_M = r_0$ (dacă $r_0 \ll y_M$ sau $r_0 \gg y_M$) ar avea loc după un timp prea îndelungat. Fie referința tip treaptă cu care va funcționa sistemul automat, $r_0 = 0{,}5$ (conform observației din §9.2.1, toate mărimile sistemice sînt normate) și fie ultima valoare a măsurii (mărimii reglate) $y_M = 0{,}25$, la momentul $t_0 = 0$, corespunzător trecerii din regim manual în regim automat, precum și coeficientul $c_f^r = 0{,}5$, unde s-a ținut seama de recomandarea (9.76)

Filtrul cu aspectul din (9.69) se inițializează, conform (9.71), prin $r_{-1}^* = y_M = 0{,}25$.

Cu expresia (9.70) prima valoare filtrată r_0^* este:

$$r_0^* = y_M + 0{,}5\,(r_0 - y_M) = 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}375.$$

Saltul efectiv al referinței, în absența filtrării, ar fi:

$$\Delta r = r_0 - y_M = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25,$$

iar cu filtrare:

$$(\Delta r)^* = r_0^* - y_M = c_f^r(\Delta r) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$$

Dacă algoritmul PID este cel descris prin relația (9.31) sau (9.33), atunci, în condițiile nefiltrării referinței, subcomanda aferentă modului P are valoarea inițială:

$$u_0^P = \varepsilon_0 = r_0 - y_M = \Delta r = 0{,}25.$$

Dacă referința este filtrată, atunci:

$$u_0^P = \varepsilon_0^* = r_0^* - y_M = (\Delta r)^* = 0{,}125.$$

Se presupune că după acordarea algoritmului PID discret (9.31) și (9.33) valoarea cîștigului K_R este cel puțin egală cu 6($K_R = 6$).

Atunci cînd referința nu este filtrată, subcomanda $K_R u_0^P$ are valoarea:

$$K_R u_0^P = 0{,}25\ K_R = 0{,}25 \cdot 6 = 1{,}5 = 150\%\ u_{\max} > u_{\max};$$

așadar, comanda globală u_0 este din start saturată la valoarea maximă, datorită exclusiv modulului P, fără a mai lua în considerare celelalte subcomenzi u_0^I, u_0^D.

Dacă perioada de eșantionare a SA, T, este mică în comparație cu constantele de timp ale părții fixate, comanda globală va rămîne saturată („agățată" la $u = 1 = u_{\max}$) cîteva perioade de eșantionare, ducînd fie la solicitarea EE, fie la suprareglaje puternice ale mărimii reglate.

Filtrînd referința cu $c_f^r = 0{,}5$, rezultă $K_R u_0^P = K_R \varepsilon_0^* = 0{,}75 < 1$, situație mult mai favorabilă față de cazul precedent.

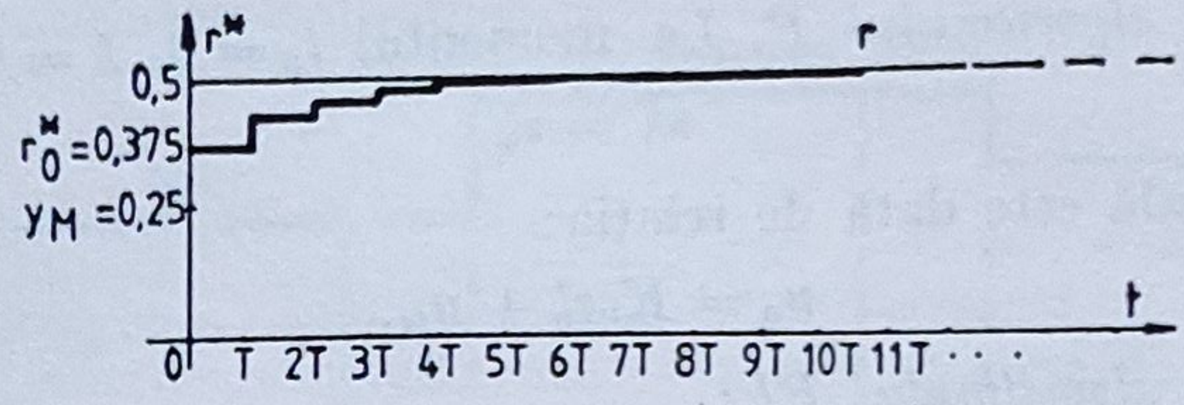


Fig. 9.7

Prin filtrare, alura tip treaptă nu este alterată semnificativ (fig. 9.7).

Pentru $k = 10$, $r^*_{10} \simeq 0{,}5 = r_0$ cu o precizie absolută de $0{,}4 \cdot 10^{-4}$ (deci, foarte bună).

Urmărirea acestui tip de referință duce la două avantaje principale [1]:

- micșorarea suprareglajului răspunsului indicial al SA;
- evitarea saturării comenzii, algoritmul de reglare emițînd comenzi liniare (comanda saturată este ieșirea fictivă a unui element neliniar static), fără a solicita excesiv EE.

În concluzie, inițializarea recomandată în (9.71) și efectele filtrării descrise anterior sînt valabile atît în cazul referinței interne a RD, cît și externe.

OBSERVAȚIE. Dacă referința este variabilă (referința-program sau sistemul automat are caracter de urmărire-raport, cascadă ș.a.), atunci utilizarea filtrului (9.69) „netezește" variațiile bruște ale referinței variabile în timp, dar introduce și o „eroare de urmărire" datorită întîrzierii introduse de polul $p_r \overset{\Delta}{=} 1 - c^r_f$ al filtrului (9.69). Întîrzierea se micșorează prin mărirea coeficientului c^r_f, deci prin reducerea valorii polului $p_r \in [0, 1]$, adică $c^r_f > 0{,}5$ sau $p_r < 0{,}5$, fără ca în unele situații practice să se mai apeleaze la filtrarea referinței ($c^r_f = 1$ sau $p_r = 0$).

Inițializarea filtrului măsurii. Ecuația cu diferențe finite a filtrului este descrisă în relația:

$$y^*_k = y^*_{k-1} + c^y_f(y_k - y_{k-1}),$$

unde $c^y_f \in [0, 1]$. Dacă $c^y_f = 1$, atunci efectul de filtrare este nul.

Cu ipoteza preliminară prezentată la începutul §9.3.2, inițializarea recomandată este [1]:

$$y^*_{-1} = y_{-1} = y_M \simeq y_0. \tag{9.77}$$

Prima valoare filtrată, la $t_0 = 0$, este:

$$y^*_0 = y^*_{-1} + c^y_f(y_0 - y^*_{-1}) = y_M + c^y_f(y_0 - y_M) \simeq y_M. \tag{9.78}$$

Conform diagramei din fig. 9.4, valorile y_0 și y_M coincid; așadar, valoarea y_0 nu se filtrează.

9.2.3. **Inițializarea algoritmului PID discret** [1]

Se consideră cel mai utilizat algoritm PID discret — v. relația (9.21) —, cu aspectul modularizat din expresiile (9.31) și (9.33). Există patru configurații distincte cu care se poate opera cu acest algoritm în regim automat — P, PI, PD, PID.

Inițializarea algoritmului P. La momentul $t_0 = 0$, $k = 0$,

$$u_0^P = \varepsilon_0^* \tag{9.79}$$

și comanda globală este dată de relația:

$$u_0 = K_R \varepsilon_0^* + u_M. \tag{9.80}$$

Inițializarea algoritmului PI:

$$u_0^P = \varepsilon_0^*,$$

$$u_{-1}^I = \frac{u_M}{K_R}, \quad u_0^I = \frac{u_M}{K_R} + K_I \varepsilon_0^*, \tag{9.81}$$

iar comanda globală are aspectul':

$$u_0 = K_R(u_0^P + u_0^I) = K_R(1 + K_I)\, \varepsilon_0^* + u_M. \tag{9.82}$$

Inițializarea algoritmului PD:

$$u_0^P = \varepsilon_0^*,$$

$$u_0^D = K_D(y_0^* - y_{-1}^*) = 0; \tag{9.83}$$

comanda globală este dată de expresia:

$$u_0 = K_R(u_0^P + u_0^D) + u_M = K_R \varepsilon_0^* + u_M. \tag{9.84}$$

Se observă că pentru $y_0^* \cong y_0$ (și $y_0 \approx y_M$), comenzile P și PD din (9.80) respectiv (9.84) au aceeași inițializare.

Inițializarea algoritmului PID:

$$u_0^P = \varepsilon_0^*$$

$$u_{-1}^I = \frac{u_M}{K_R}, \quad u_0^I = u_{-1}^I + K_I \varepsilon_0^*, \tag{9.85}$$

$$u_0^D = 0;$$

inițializarea comenzii globale este de forma:

$$u_0 = K_R(u_0^P + u_0^I + u_0^D) = K_R(1 + K_I)\, \varepsilon_0^* + u_M. \tag{9.86}$$

Se observă că algoritmii PI și PID au aceeași inițializare. Ori de cîte ori se utilizează modulul I, acesta se inițializează cu $u_{-1}^I = \frac{u_M}{K_R}$. Comanda manuală u_M și parametrul (inițial ales) K_R se cunosc în momentul trecerii din regim manual în regim automat, chiar dacă RD nu este încă acordat ($K_R = K_{R_0}$ = valoare inițială). Eroarea inițială ε_0^* este obținută fie prin $\varepsilon_0^* = r_0 - y_0^* = r_0 - y_M$, fie prin $\varepsilon_0^* = r_0^* - y_0^* = r_0^* - y_M < r_0 - y_M$.

9.3. DIAGRAMELE DE TIMP ALE CALCULULUI COMENZII

9.3.1. Algoritmi cauzali la limită

La limită, algoritmii de reglare numerică cauzali au aspectul general:

$$u_k = f(\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, \ldots) = f(r_k - y_k, r_{k-1} - y_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, \ldots). \tag{9.87}$$

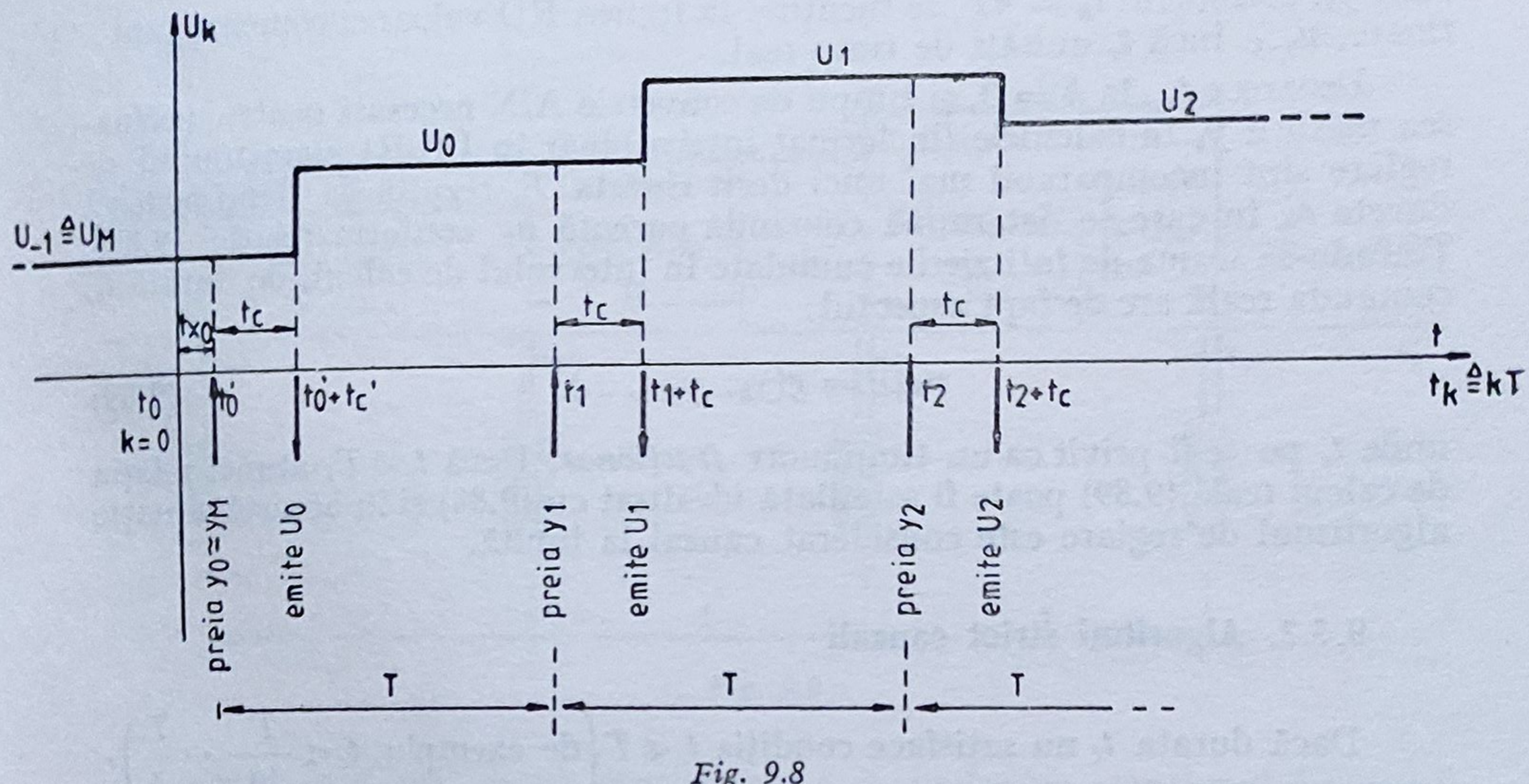


Fig. 9.8

Comanda la pasul curent t_k, u_k este dependentă direct de eşantionul cules al măsurii y_k la acelaşi moment de eşantionare:

$$u_k = g(y_k,\ y_{k-1},\ \ldots,\ u_{k-1},\ \ldots) \tag{9.88}$$

Deoarece comanda nu poate fi emisă instantaneu cu preluarea (din interfaţa de intrări analogice) a măsurii y_k, datorită calculelor aritmetice pe care le implică algoritmul de reglare implementat în RD, reprezentat simbolic în relaţia (9.88) prin funcţia $g(y_k, y_{k-1}, \ldots)$, rezultă că există inerent un timp de calcul, $t_c \neq 0$, în care se determină comanda curentă u_k. Ţinîndu-se seama de acest interval de timp, aspectul diagramelor de timp ale comenzii la ieşirea RD (care înglobează şi extrapolatorul de ordin zero) este descris în fig. 9.8.

Momentul de timp t_0 coincide cu comutarea RD din regim manual în regimul automat. Datorită unor eventuale iniţializări tipice exclusiv primei perioade de eşantionare, măsura la primul pas, y_0, se preia din proces la momentul $t_{x_0} + t_0 > t_0$.

Momentul de timp $(t_0 + t_{x_0})$ este considerat iniţial pentru mărimile sistemice ale buclei închise (automate), începînd de la care toate calculele, preluările de date din proces (măsura y_k) şi emiterea de comenzi (u_k) se fac după algoritmi ciclici, cu ciclul dat de frecvenţa de eşantionare, $1/T$.

Din momentul de timp $t_0' \triangleq t_{x_0} + t_0$ al preluării măsurii y_0 din bufferul convertorului A/N şi pînă în momentul terminării calculelor algoritmului din (9.88) se consumă un interval de timp (acoperitor) de durată t_c. În acest interval de timp se efectuează numai calcule strict necesare determinării comenzii u_0.

În general, în tot intervalul de timp $[t_0', t_0' + t_c]$, respectiv $[t_k, t_k + t_c]$, extrapolatorul de ordinul zero menţine la ieşirea RD comanda anterioară (u_M, respectiv u_{k-1}).

La primul pas $(k = 0)$ se menţine la ieşire, de la momentul t_0 pînă la momentul $t_0' + t_c$, valoarea ultimei comenzi manuale, u_M (9.3), apoi în perioadele de eşantionare următoare (ale regimului A) din momentul preluării mă-

surii y_k, considerat $t_k = kT$, se menține la ieșirea RD valoarea comenzii anterioare, u_{k-1}, încă t_c unități de timp real.

Deoarece t_{x_0}, la $k = 0$, și timpii de conversie A/N necesari pentru preluarea măsurii y_k în calculele (în format intern binar în UC-R) algoritmului de reglare sînt incomparabil mai mici decît durata T, rezultă ca semnificativă durata t_c, în care se determină comanda curentă u_k, conform relației (9.88). Ținîndu-se seama de întîrzierile cumulate în intervalul de calcul, de durată t_c, comanda reală are de fapt aspectul:

$$u_{k+t_c} = g(y_k,\ y_{k-1},\ \ldots), \tag{9.89}$$

unde t_c poate fi privit ca un timp mort *fracționar*. Dacă $t_c \ll T$, atunci relația de calcul reală (9.89) poate fi asimilată idealizat cu (9.88) și în această situație algoritmul de reglare este considerat cauzal la limită.

9.3.2. Algoritmi strict cauzali

Dacă durata t_c nu satisface condiția $t_c \ll T \left(\text{de exemplu, } t_c < \frac{T}{10} \cdots \frac{T}{5}\right)$, devenind comparabilă ca mărime cu T, iar T nu este aleasă excesiv de mică în raport cu constantele de timp ale părții fixate continue ca și la algoritmii cvasicontinui de reglare, atunci timpul mort fracționar $\left(0 < \frac{t_c}{T} < 1\right)$ poate înrăutăți sensibil performanțele sistemului automat cu eșantionare [30].

Există și situații practice în care complexitatea algoritmului de reglare (care nu mai este de tip PID) necesită un interval de calcul t_c comparabil cu T, $\frac{t_c}{T} \leqslant 1$, situație depinzînd și de performanțele *hardware* și *software* ale RD. În astfel de cazuri este necesară (și inevitabilă) introducerea intenționată a unui timp mort în emiterea comenzilor la ieșirea RD. Acesta se ia evident egal cu T, pentru a nu opera cu timpi morți fracționari, nelucrativi din punctul de vedere al proiectării sistemice.

Aspectul general al algoritmilor de reglare strict cauzali este:

$$u_k = h(y_{k-1},\ y_{k-2},\ \ldots,\ u_{k-1}\ \ldots). \tag{9.90}$$

În acest caz, diagramele de timp discret ale comenzii sînt descrise în fig. 9.9. Ținîndu-se seama de relația precedentă, din figura menționată rezultă

$$u_1 = h(y_0,\ u_m);\ u_2 = h(y_1,\ y_0,\ u_1,\ u_M)\ \ldots .$$

Intervalul t_c' necesar calculării comenzii u_k conform relației (9.90) poate fi în situația studiată mult mai mare decît cel din cazul anterior, t_c. Intervalul t_c' este estimat ca acoperitor în ceea ce privește perioada de eșantionare T; se alege (tot apriori) $T > t_c'$ astfel încît în rezerva de timp neconsumată $[t_k + t_c',\ t_{k+1}]$ să se efectueze alte *task*-uri ciclice $\left(\text{cu } f_{eș} = \frac{1}{T}\right)$ de timp real, necesare unei conduceri moderne a procesului.

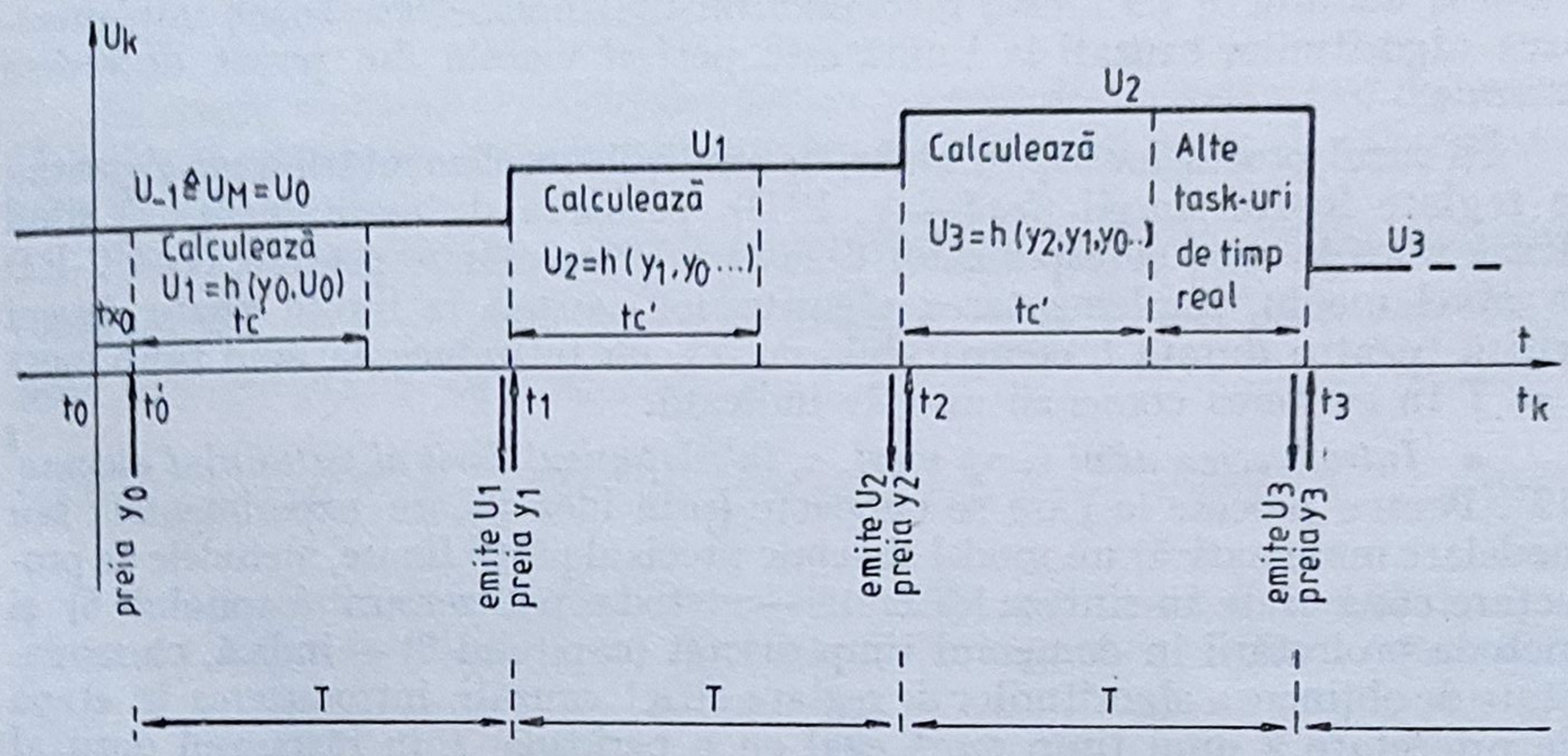


Fig. 9.9

Comanda u_k este emisă cvasisimultan cu preluarea eșantionului măsurii y_k, ea fiind deja calculată în momentul preluării y_k. Timpii de conversie A/N și N/A sînt considerați neglijabili la scara de timp real a desfășurării procesului automatizat, convertoarele CAN și CNA alegîndu-se și din aceste considerente ($t^{\text{conversie}} \ll T$), nu numai din cel legat de precizia conversiei.

Folosirea algoritmilor de reglare strict cauzali se recomandă în următoarele situații: procese rapide; perioada T mică (sau foarte mică); t'_c comparabil cu T; timpul mort, T, introdus la ieșirea RD în emiterea comenzii nu afectează nici o performanță sistemică; RD este dotat cu microprocesor de nivel mediu (ca performanță) ce poate fi obținut la un preț de cost scăzut.

9.4. ALGORITMI DE REGLARE CU PREDICTORI UNIPAS

9.4.1. Metode de proiectare a algoritmilor strict cauzali

Practica și literatura de specialitate au consacrat cîteva metode de proiectare a algoritmilor de reglare strict cauzali, din care cele mai uzuale sînt următoarele:

- *Introducerea unui timp mort de o perioadă de eșantionare în calculul comenzii.* În § 9.3 s-a ilustrat modalitatea practică, de principiu, prin care în situații critice (depinzînd de contextul aplicației și de RD) se implementează algoritmi de reglare strict cauzali prin „introducerea" forțată a unui „timp mort", τ, egal cu o perioadă de eșantionare, în emiterea comenzii curente u_k, algoritmul de reglare fiind proiectat inițial cauzal la limită ($u_k = g(y_k, y_{k-1}, \ldots)$. Din relația (9.88), apoi în final, prin întîrzierea introdusă de o perioadă de eșantionare, T, se obține algoritmul de reglare strict cauzal.

Acest „timp mort" introdus intenționat din etapa de proiectare poate genera efecte sistemice negative [3].

În cazul proceselor relativ lente (și lente), prin alegerea unei perioade de eșantionare mari, adecvată dinamicii lente a procesului (capitolul 2), durata de

calcul t_c definită în § 9.3 este incomparabil mai mică decît T, iar implementarea algoritmilor cauzali la limită este perfect viabilă din punct de vedere sistemic.

În cazul proceselor rapide chiar, în condițiile implementării unor algoritmi de reglare foarte simpli (*lead–lag*, PID), perioada de eșantionare, T, fiind aleasă mică în mod corespunzător dinamicii proceselor respective, iar UC-RD de nivel mediu, implementarea algoritmilor cauzali la limită poate deveni critică (pentru durata t_c comparabilă cu T), iar introducerea unui timp mort $\tau = T$ în emiterea comenzii nu este indicată.

• *Introducerea unui timp mort, τ, în răspunsul dorit al sistemului automa*[t] [12]. Pentru procese la care se cunoaște (prin identificare experimentală sau modelare matematică) un model sistemic precis al părții fixate, metodele de proiectare consacrate în sinteza discretă — metoda poli-zerouri (capitolul 6) și metoda proiectării în domeniul timp discret (capitolul 7) — indică, ca modalitate de obținere a algoritmilor de reglare strict cauzali, introducerea în etapa de proiectare a unui timp mort egal cu o perioadă T în răspunsul dorit al ieșirii SA (practic, în funcția de transfer discretă a buclei automate închis dorite).

Algoritmul de reglare se proiectează prin prisma funcției de transfer $H_{cd}(z^{-1})$, în contextul cauzal la limită, apoi — după obținerea ei — funcția de transfer a RA rezultă din relația $H_R(z^{-1}) = \lambda(H_f(z^{-1})\, z^{-1} H_{cd}(z^{-1}))$, introducerea întîrzierii z^{-1} avînd un efect de predicție de un pas [12].

Aplicarea acestei tehnici de proiectare a permis menținerea tuturor indicilor de calitate ai regimurilor etalon, cu excepția duratei regimului tranzitoriu indicial care se mărește exact cu o perioadă de eșantionare, T.

Metoda menționată — indicată îndeosebi la sisteme (procese) nu prea rapide — este cea mai folosită în cazul sistemelor (relativ) lente.

• *Utilizarea unor predictori unipas*. În cazul proceselor rapide (acționări electrice, electromecanice ș.a.) mărirea duratei regimurilor tranzitorii nu este indicată în reglarea acestor procese, dorindu-se răspunsuri rapide (mai ales că aceste procese nu au timp mort). În astfel de situații, cînd durata t_c este comparabilă cu perioada de eșantionare T care nu mai poate fi mărită, se recomandă utilizarea predictorilor unipas [13].

Dacă algoritmul de reglare este cauzal la limită, avînd aspectul din relația (9.87) sau (9.88), iar predictorul de un pas este descris sintetic prin $P(z^{-1})$, atunci în (9.87) se substituie ε_k prin $\tilde{\varepsilon}_k \overset{\Delta}{=} P(z^{-1})\varepsilon_k$, $\tilde{\varepsilon}_k$ fiind valoarea predictată a erorii curente, sau, conform relației (9.88), se substituie y_k prin $\tilde{y}_k \cong P(z^{-1})y_k$, $\tilde{y}_k$ fiind valoarea predictată a măsurii y_k, calculată din valorile anterioare măsurate.

Predictorul $P(z^{-1})$ se aplică fie pe eroarea ε_k, fie pe măsura y_k, în funcție de tipul referinței SA, r_k.

Dacă mărimea de referință a SA este de tip treaptă, deci $(\forall)\, k \geqslant 0$ $r_k = \text{constant}$, atunci predictorul se utilizează numai pentru predicția măsurii curente, y_k.

În cazul că mărimea de referință este variabilă (sisteme de urmărire, cascadă, referință program ș.a.), atunci predictorul se folosește pentru predicția erorii curente a buclei automate, ε_k.

9.4.2. Predictori liniari unipas

Se consideră cazul predictorilor liniari unipas, de ordinul I sau de ordinul II, datorită simplității implementării lor și a numărului redus de calcule necesare pentru predicție.

Fie, în caz general, v_k eșantionul curent al unei funcții indefinit derivabile continue $v(t)$, la momentul $t_k \triangleq kT$. Notîndu-se $v_k \triangleq v(kT)$, se dezvoltă în serie Taylor $v(kT+T) \triangleq v_{k+1}$:

$$v(kT+T) = v(kT) + \frac{T}{1!}v'(kT) + \frac{T^2}{2!}v''(kT) + \ldots + \frac{T^n}{n!}v^{(n)}(kT) + \ldots . \quad (9.91)$$

Se aproximează valorile derivatelor $v^{(n)}(t)$ de ordinul n (arbitrar) în punctul $t = t_k$, prin formulele cu diferențe finite regresive ale lui Newton [14]:

$$v^{(n)}(kT) \simeq \frac{\Delta^n v_k}{T^n} \triangleq \frac{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j v_{k-j}}{T^n} \quad (9.92)$$

unde $\Delta^n v_k$ este diferența de ordinul n a funcției $v(t)$ în $t = t_k$, iar C_n^j înt combinările $C_n^j = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

Dacă $\delta^i v_k \triangleq \dfrac{T^i}{i!} v^{(i)}(kT)$ este variația de ordinul i a funcției $v(t)$ în $t = t_k$, din expresiile (9.91) și (9.92) rezultă:

$$v_{k+1} = v_k + \delta^1 v_k + \delta^2 v_k + \ldots + \delta^i v_k + \ldots , \quad (9.93)$$

unde

$$\delta^1 v_k = v_k - v_{k-1},$$

$$\delta^2 v_k = \frac{1}{2}(v_k - 2v_{k-1} + v_{k-2}). \quad (9.94)$$

$$\vdots$$

Predictorul de ordinul unu. Dacă în seria (9.93) variația de ordinul doi este aproximativ nulă, $\delta^2 v_k \simeq 0$, și evident $(\forall) i > 2$, $\delta^i v_k \simeq 0$, atunci este valabilă aproximarea:

$$v_{k+1} \simeq v_k + \delta^1 v_k. \quad (9.95)$$

Folosindu-se relațiile (9.94), rezultă:

$$v_{k+1} \simeq v_k + (v_k - v_{k-1}). \quad (9.96)$$

Notîndu-se

$$\tilde{v}_{k+1} \triangleq 2v_k - v_{k-1} \quad (9.97)$$

și decalînd relația de mai sus cu o perioadă de eșantionare, T, se obține expresia predictorului de ordinul unu:

$$\tilde{v}_k = 2v_{k-1} - v_{k-2}, \quad \tilde{v}_k \simeq v_k. \quad (9.98)$$

Valorile v_0 și v_1 (cînd $k \geqslant 2$) sau v_{-2} și v_{-1} (cînd $k \geqslant 0$) nu pot fi predictate.

Condiția $\delta^2 v_k \simeq 0$, $(\forall)\, k > 0$ semnifică $\Delta^2 v_k \cong 0$; deci, $\Delta^1 v_k = \Delta v_k = $ = constant.

Dacă perioada de eșantionare, T, este aleasă astfel încît variația funcției $v(t)$ pe orice interval $[t_k, t_{k+1}]$ este cel mult liniară, atunci $\Delta^2 u_k \approx 0$ și predictorul din (9.98) este suficient de precis.

Expresia predictorului în domeniul z^{-1}. Dacă se asimilează prin z^{-1} operatorul de întîrziere cu o perioadă de eșantionare, din expresia (9.98) rezultă:

$$\tilde{v}_k = (2z^{-1} - z^{-2})\, v_k. \tag{9.99}$$

Atunci, predictorul $P_1(z^{-1})$ este:

$$P_1(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} 2z^{-1} - z^{-2} = \frac{2z - 1}{z^2}, \tag{9.100}$$

avînd zeroul $z_1 = 0{,}5$ și polul dublu $p_1 = 0$.

Predictorul de ordinul doi. Dacă în cazul anterior aproximarea $\delta^2 v_k \simeq 0$ este prea grosieră, atunci în dezvoltarea din (9.93) trebuie luat în considerare și acest termen, dar cu ipoteza $\delta^3 v_k \simeq 0$, $(\forall)\, k \geqslant 0$ (și evident $\delta^i v_k \simeq 0$, $(\forall)\, i > 3$). Cu aceste aserțiuni este adevărată aproximarea:

$$v_{k+1} \simeq v_k + \delta^1 v_k + \delta^2 v_k. \tag{9.101}$$

Folosindu-se formulele (9.94), rezultă:

$$v_{k+1} \cong v_k + (v_k - v_{k-1}) + \frac{1}{2}(v_k - 2v_{k-1} + v_{k-2})$$

sau

$$v_{k+1} \simeq 2{,}5v_k - 2v_{k-1} + 0{,}5v_{k-2}. \tag{9.102}$$

Notîndu-se

$$\tilde{v}_{k+1} \stackrel{\Delta}{=} 2{,}5v_k - 2v_{k-1} + 0{,}5v_{k-2} \tag{9.103}$$

și decalînd ultima relație cu o perioadă T, rezultă predictorul liniar de ordinul doi:

$$\tilde{v}_k = 2{,}5v_{k-1} - 2v_{k-2} + 0{,}5v_{k-3}. \tag{9.104}$$

Valorile v_0, v_1, v_2 (dacă $k \geqslant 3$) sau v_{-3}, v_{-2}, v_{-1} (dacă $k \geqslant 0$) nu pot fi predictate.

Condiția $\delta^3 v_k \simeq 0$, $(\forall)\, k \geqslant 0$ semnifică $\Delta^3 v_k \simeq 0$; deci, $\Delta^2 v_k \simeq$ const., iar $\Delta^1 v_k$ are aproximativ o variație liniară.

Cînd perioada de eșantionare T este aleasă astfel încît variația funcției $v(t)$ pe orice interval $[t_{k1}, t_{k+1}]$ este cel mult parabolică, $at^2 + bt + c$, atunci $\Delta^3 v_k \simeq 0$ și predictorul din relația (9.104) este suficient de precis.

Exprimarea predictorului în domeniul z^{-1}. Ca și în cazul precedent, se obține:

$$\tilde{v}_k = (2{,}5z^{-1} - 2z^{-2} + 0{,}5z^{-3})\, v_k. \tag{9.105}$$

Predictorul liniar de ordinul doi este descris în domeniul z^{-1} prin relația:

$$P_{II}(z^{-1}) = 2{,}5z^{-1} - 2z^{-2} + 0{,}5z^{-3} = \frac{2{,}5z^2 - 2z + 0{,}5}{z^3}, \qquad (9.106)$$

cu zerourile $z_{1,2} = 0{,}4 \pm j\,0{,}2$, $|z_{1,2}| < 1$ și polul triplu $p_1 = 0$.

De remarcat faptul că ambii predictori din expresiile (9.98) și (9.104) sînt descriși prin modele de medie alunecătoare, în care v_{k-1}, v_{k-2}, v_{k-3}, ... sînt valorile reale, măsurate la pașii anteriori, t_{k-1}, t_{k-2}, t_{k-3}, ..., iar valoarea predictată este calculată, aproximînd valoarea curentă reală v_k înainte de a fi măsurată.

9.4.3. Algoritmi PID discreți cu predictori unipas

Pentru exemplificare, se consideră cel mai uzual algoritm PID discret, descris prin relația (9.21), cu „derivarea" exclusiv a măsurii filtrate, folosindu-se în acest scop filtrul de ordinul I prezentat descris în expresia (9.35).

Se preferă aspectul algoritmului din relația (9.28):

$$u_k = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})} r_k - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} F(z^{-1})\, y_k,$$

unde filtrul $F(z^{-1})$ este descris în (9.25), iar $\varepsilon_k^* = r_k - y_k^* = r_k - F(z^{-1})\, y_k$.

Notîndu-se $\tilde{y}_k = P_{I,II}(z^{-1})\, y_k$ valoarea predictată a eșantionului y_k în funcție de valorile anterioare măsurate și utilizîndu-se predictorul de ordinul unu, $P_I(z^{-1})$ din (9.100), rezultă algoritmul PID discret cu predictor unipas:

$$u_k = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})} r_k - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} F(z^{-1})\, y_k. \qquad (9.107)$$

Dacă se folosește predictorul de ordinul doi (9.106), rezultă:

$$u_k = \frac{S(z^{-1})}{P(z^{-1})} r_k - \frac{Q(z^{-1})}{P(z^{-1})} F(z^{-1})\, P_{II}(z^{-1})\, y_k. \qquad (9.108)$$

Utilizîndu-se acum aspectul din (9.29) al algoritmului, se obțin $u_k = H_{R_1}(z^{-1})\, \varepsilon_k^* - H_{R_2}(z^{-1})\, y_k^*$ și $\varepsilon_k^* = r_k - y_k^*$.

Folosindu-se predictorul $P_I(z^{-1})$ sau $P_{II}(z^{-1})$, rezultă — echivalent cu expresiile (9.107) și (9.108) — următoarea relație:

$$u_k = H_{R_1}(z^{-1})\,(r_k - P_{I,II}(z^{-1})\, y_k^*) - H_{R_2}(z^{-1})\, P_{I,II}(z^{-1})\, y_k^*$$

sau, prin explicitarea filtrului,

$$u_k = H_{R_1}(z^{-1})\,[r_k - F(z^{-1})\, P_{I,II}(z^{-1})\, y_k] - H_{R_2}(z^{-1})\, F(z^{-1})\, P_{I,II}(z^{-1})\, y_k. \qquad (9.109)$$

Relația (9.109) corespunde schemei-bloc din fig. 9.10.

Toate considerațiile anterioare sînt adevărate dacă mărimea de referință este cunoscută $(\forall)\ k \geq 0$ (de exemplu, r_k este de tip treaptă). În caz contrar (mărimea r_k este variabilă în timp) se impune și predictarea erorii ε_k, conform schemei din fig. 9.11.

Deși exemplificarea anterioară s-a referit la algoritmul PID cel mai utilizat — din relația (9.21) — , există situații cînd se folosește și algoritmul

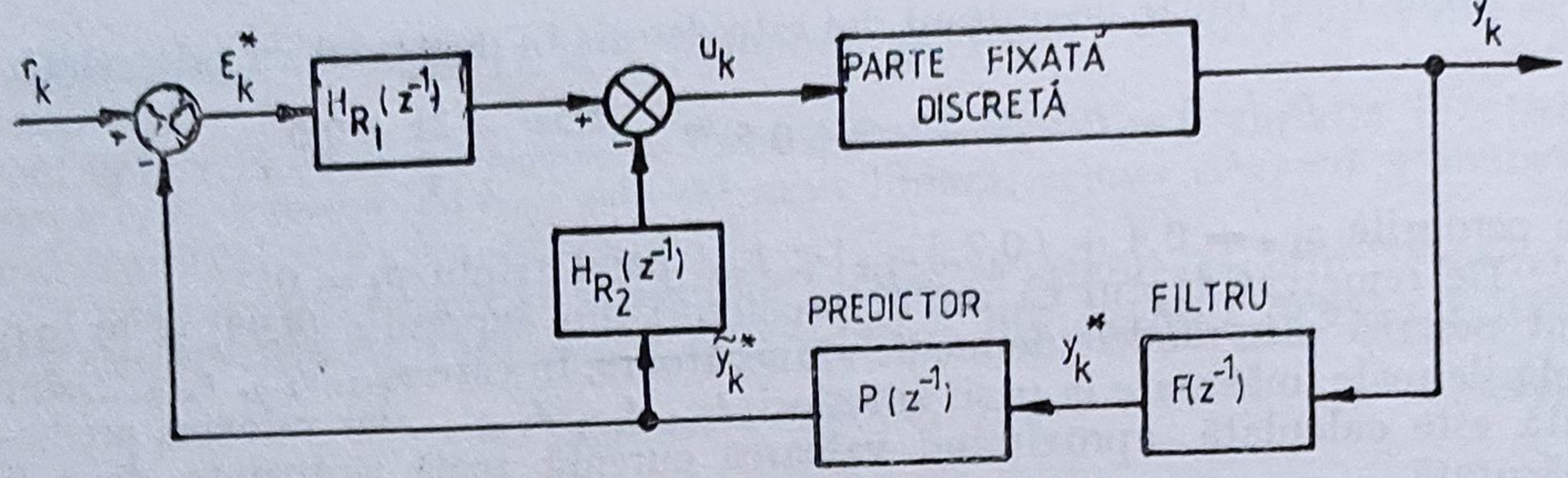


Fig. 9.10

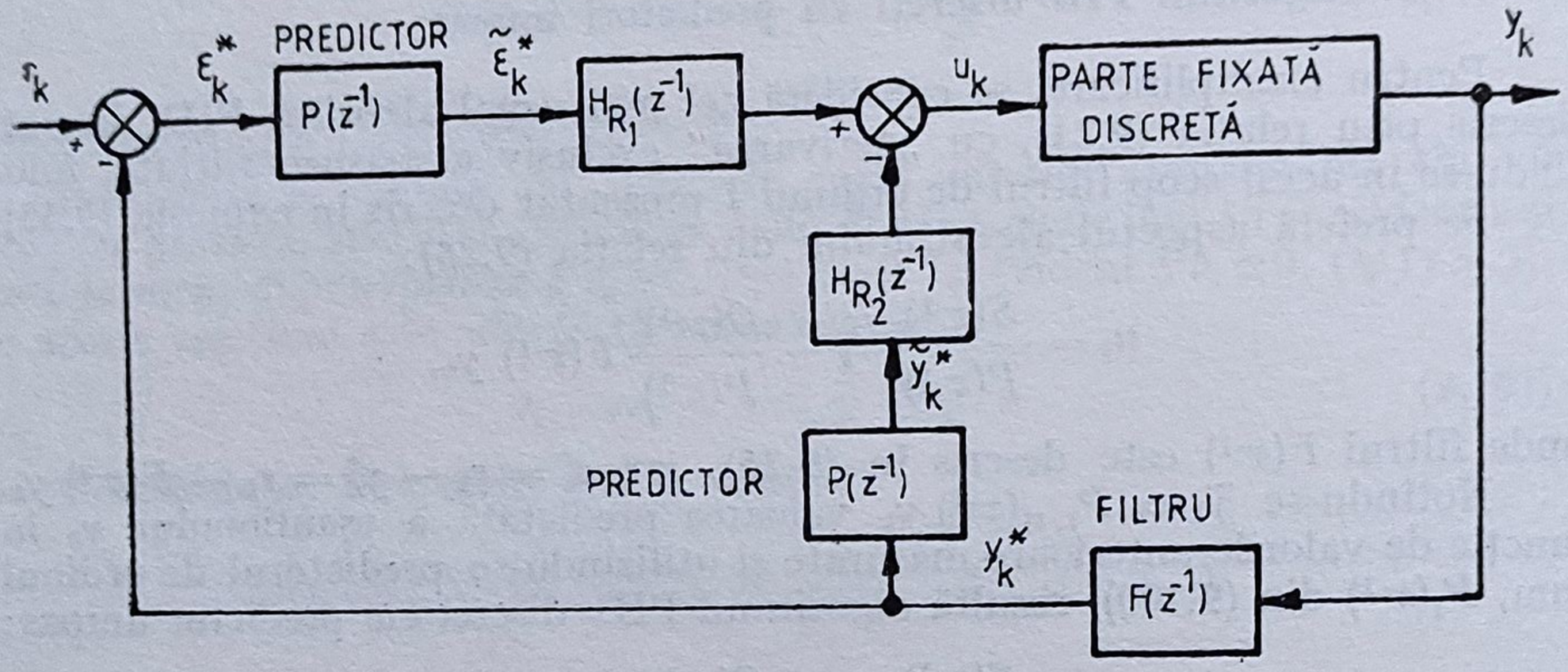


Fig. 9.11

(9.20) cu notația din expresia (9.30), utilizîndu-se predictori pe eroare; acesta are aspectul:

$$u_k = H_R(z^{-1})\,\tilde{\varepsilon}_k^* = H_R(z^{-1})\,P(z^{-1})\,F(z^{-1})\,\varepsilon_k, \tag{9.110}$$

unde

$$\tilde{\varepsilon}_k^* = P(z^{-1})\,\varepsilon_k^* = P(z^{-1})\,F(z^{-1})\,\varepsilon_k \text{ și } P(z^{-1}) \stackrel{\Delta}{=} P_{\text{I, II}}.$$

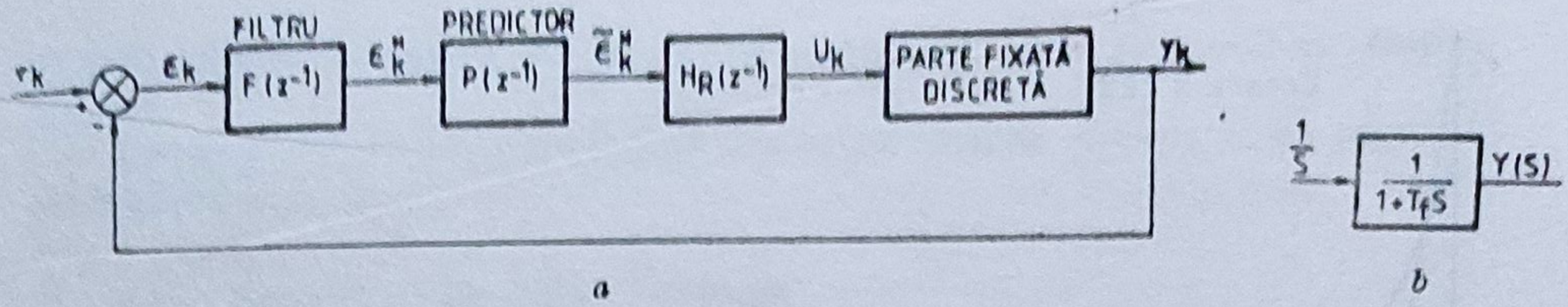
OBSERVAȚIE. În toate situațiile, ordinea cronologică referitoare la aplicarea operatorilor $F(z^{-1})$ și $P(z^{-1})$ este: $F(z^{-1})$ — se filtrează date reale din proces, apoi $P(z^{-1})$ — se predictează prin calcule teoretice, folosindu-se datele reale, filtrate, din proces.

Pentru algoritmul PID din (9.110) s-a presupus exclusiv filtrarea erorii ε_k.

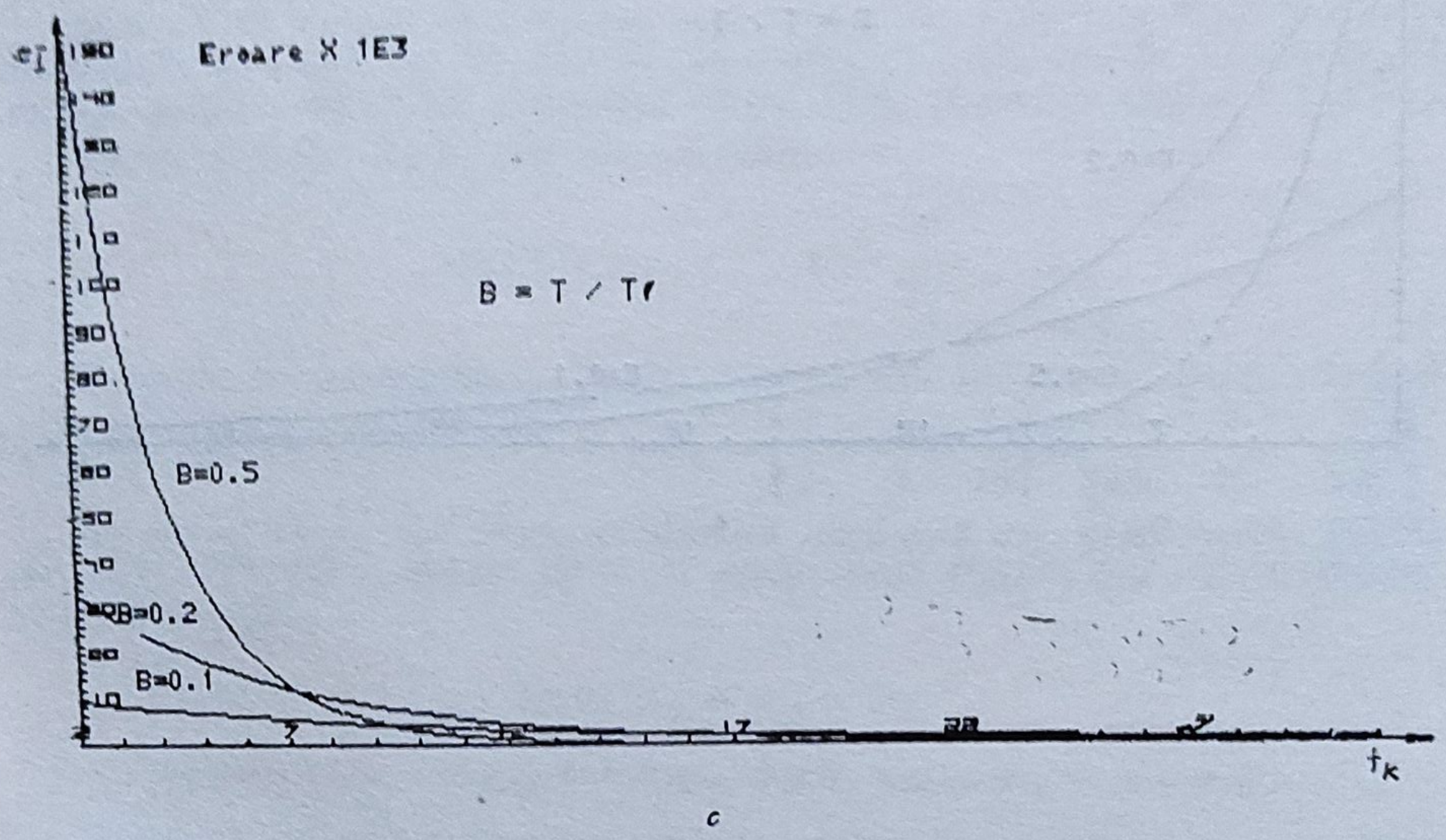
Algoritmul PID din (9.110) este realizat cu schema-bloc din fig. 9.12.

În timpul real al regimului automat, predictorii $P_{\text{I}}(z^{-1})$ și $P_{\text{II}}(z^{-1})$ cu aspectul din relația (9.99), respectiv (9.104) nu necesită multiplicări suplimentare, deoarece toți coeficienții lor sînt puteri pozitive sau negative ale bazei 2 sau sume de puteri ale bazei 2; în plus, ei operează pe date interne reprezentate în binar în formă fracționară (sau în virgulă mobilă, VM), formă în care multiplicarea cu coeficientul 2^i se realizează prin deplasarea virgulei cu i ranguri spre dreapta, dacă $i > 0$, sau spre stînga, dacă $i < 0$.

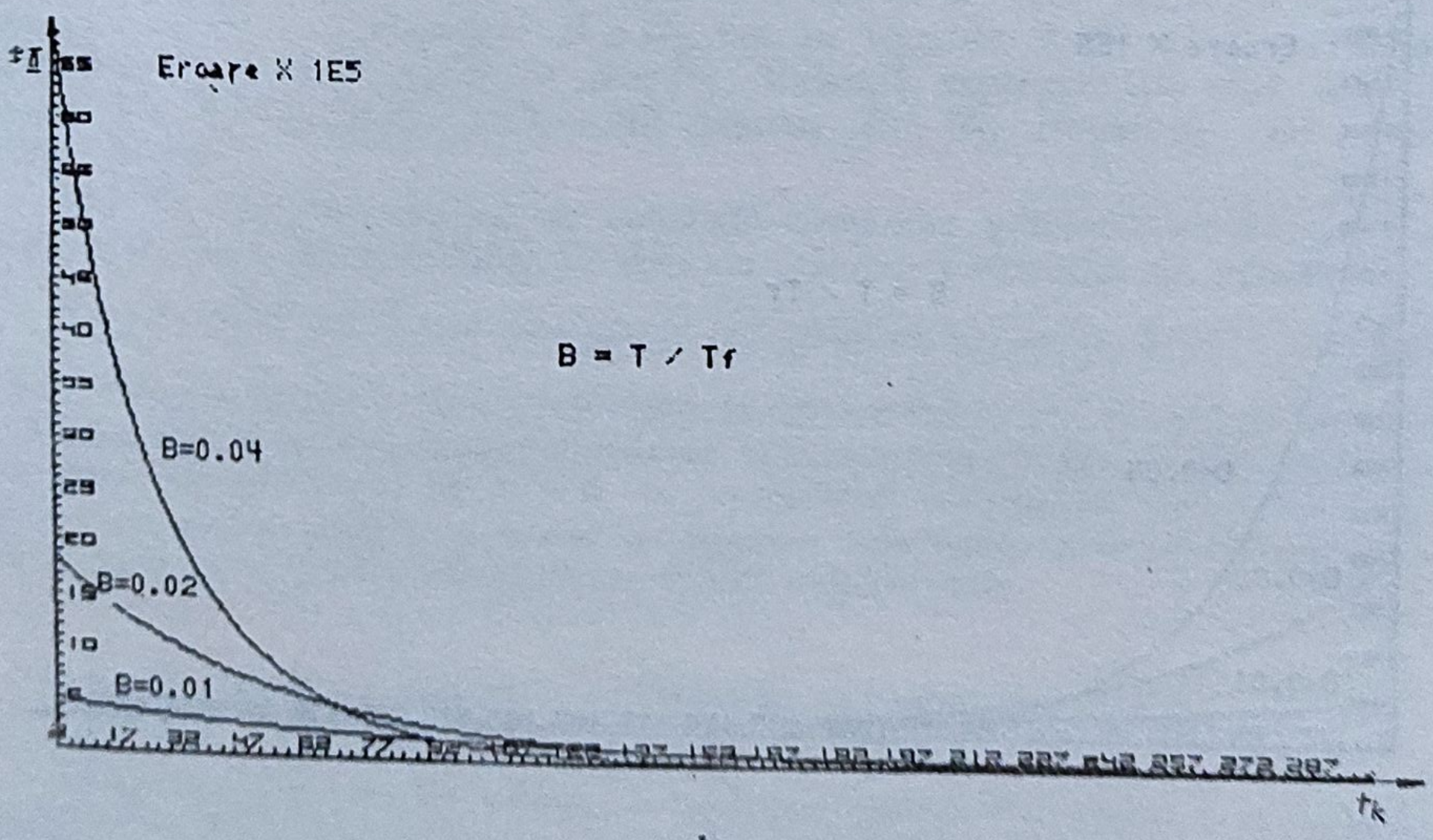
Pentru predictorul $P_{\text{I}}(z^{-1})$, descris în timp discret prin intermediul relației (9.98), coeficienții sînt 2 și respectiv -2^0, iar pentru predictorul


FILTRU
PREDICTOR
r_k
ε_k
$F(z^{-1})$
ε_k^M
$P(z^{-1})$
$\bar{\varepsilon}_k^M$
$H_R(z^{-1})$
U_k
PARTE FIXATĂ DISCRETĂ
y_k
$\frac{1}{S}$
$\frac{1}{1+T_f S}$
Y(S)

a *b*

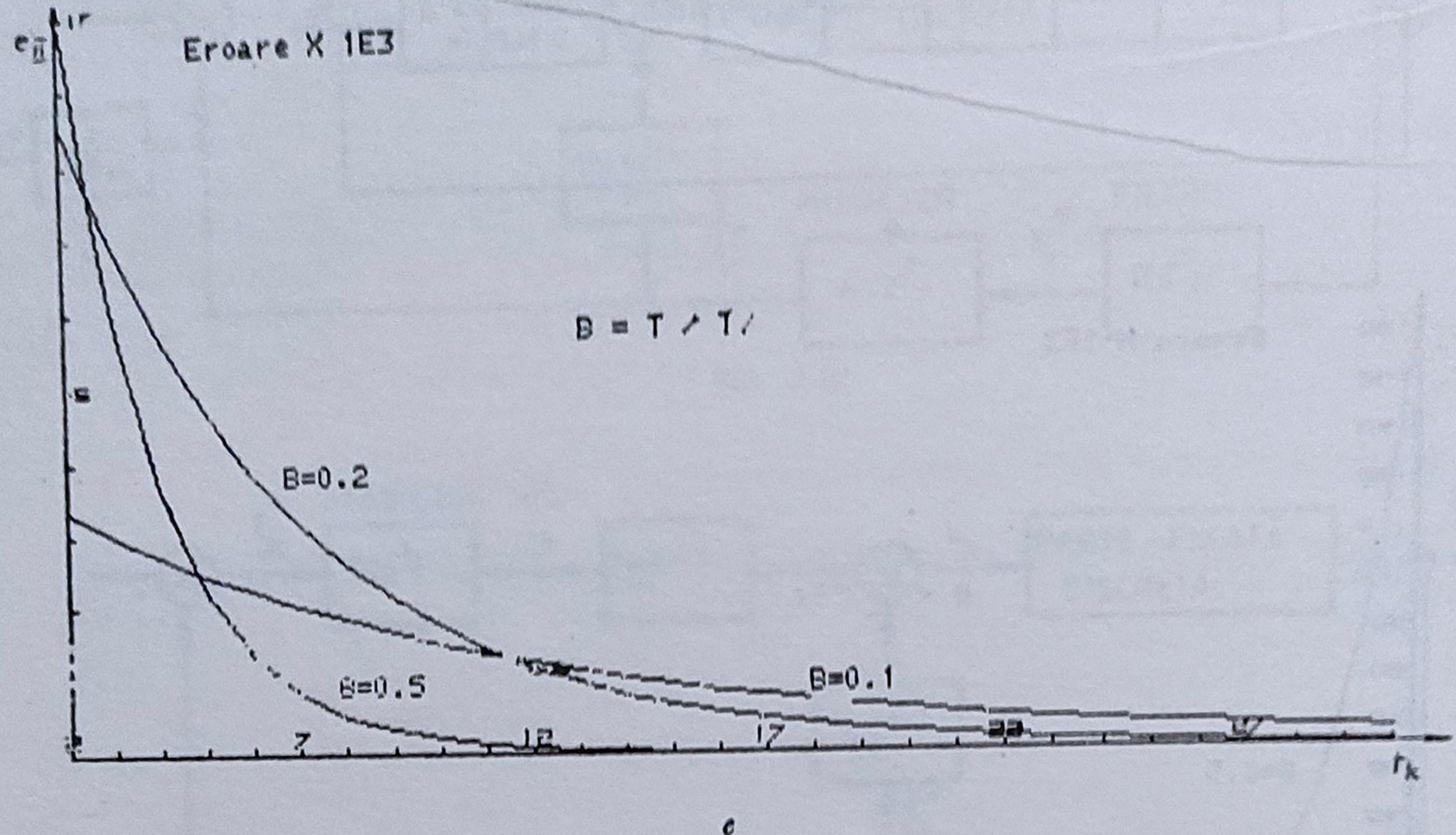

e_I
Eroare X 1E3
B = T / Tf
B=0.5
B=0.2
B=0.1
t_k

c


e_I
Eroare X 1E5
B = T / Tf
B=0.04
B=0.02
B=0.01
t_k

d

Fig. 9.12


Eroare X 1E3
B = T / Tf
B=0.2
B=0.5
B=0.1
7
12
17
22
27
r_k

c

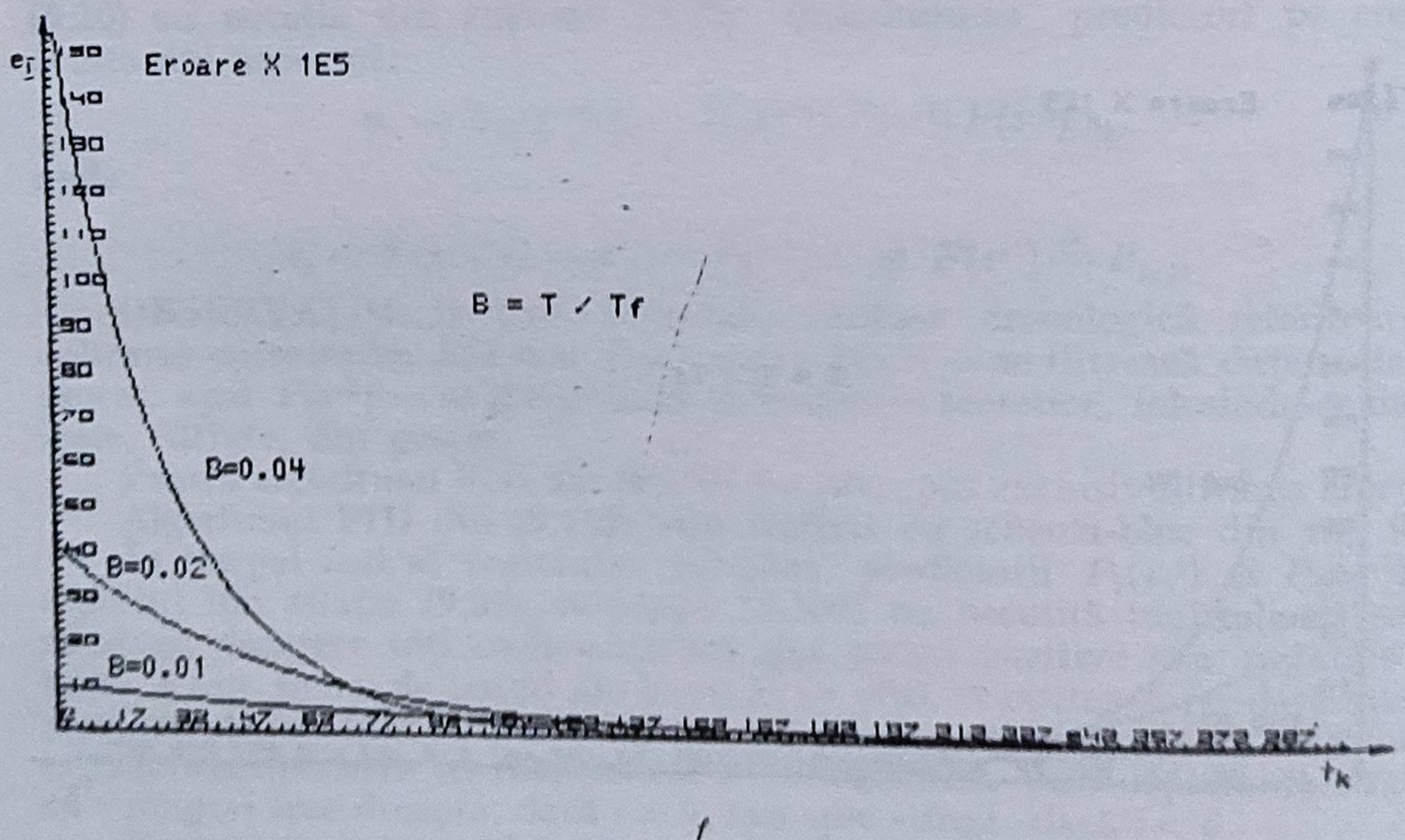

Eroare X 1E5
B = T / Tf
B=0.04
B=0.02
B=0.01
r_k

Fig. 9.12

$P_{II}(z^{-1})$, descris în relația (9.104), coeficienții sînt $(2 + 2^{-1})$, -2 și, respectiv, 2^{-1}.

De menționat că predictorii P_I și P_{II} se pot utiliza pentru orice algoritm de reglare, $H_R(z^{-1})$.

9.4.4. Eroarea de predicție. Exemple

Se studiază eroarea de predicție a predictorilor $P_I(z^{-1})$ și $P_{II}(z^{-1})$ pentru sistemul de ordinul I din fig. (9.12*b*); se consideră o mărime de intrare de tip treaptă unitate, rezultînd răspunsul exact $Y(s)$, respectiv $y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Pentru $t = kT$, $k \geqslant 0$, $y(t)$ are aspectul:

$$y(kT) = 1 - e^{-kB}, \quad B \triangleq \frac{T}{T_f}.$$

Perioada de eșantionare, T, se alege în funcție de T_f, parametrul B luînd valori în mulțimea $B \in B_1 \cup B_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right\} \cup \left\{\frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{100}\right\}$.

Se consideră $\tilde{y}_k^I$ mărimea predictată obținută cu predictorul $P_I(z^{-1})$ din relația (9.98) și, respectiv $\tilde{y}_k^{II}$ — cu predictorul $P_{II}(z^{-1})$ din relația (9.104), avînd expresiile:

$$\tilde{y}_k^I = 2y_{k-1} - y_{k-2}, \quad k \geqslant 0, \quad y_{-1} = y_{-2} = 0;$$

$$\tilde{y}_k^{II} = 2{,}5y_{k-1} - 2y_{k-2} + 0{,}5y_{k-3}, \quad k \geqslant 0, \quad y_{-1} = y_{-2} = y_{-3} = 0.$$

Erorile de predicție corespunzătoare se notează cu $e_I(k) = |y_k - \tilde{y}_k^I|$ și, respectiv, $e_{II}(k) = |y_k - \tilde{y}_k^{II}|$. În figurile 9.12*c* și *d* este ilustrată eroarea $r_I(k)$ pentru $B \in B_1$, respectiv $B \in B_2$, iar în figurile 9.12*e* și *f* — eroarea $e_{II}(k)$ pentru $B \in B_1$, respectiv $B \in B_2$. Valorile reprezentate sînt scalate cu factorii multiplicativi $1E3 = 10^3$ pentru $B \in B_1$, respectiv $1E5 = 10^5$ pentru $B \in B_2$.

Din examinarea erorilor se constată creșterea preciziei predictorilor o dată cu scăderea parametrului B, deci cu mărirea frecvenței de eșantionare, $\frac{1}{T}$. Predictorul $P_{II}(z^{-1})$ este mai precis cel puțin cu un ordin de mărime decît $P_I(z^{-1})$. Erorile de predicție sînt maxime la momentul inițial și tind asimptotic spre zero pentru $k \to \infty$ (model staționar al sistemului din fig. 9.12*b*). Micșorarea erorii de predicție, la $k = 0$, în momentul declanșării regimului tranzitoriu, se poate realiza printr-o inițializare adecvată, în exemplele anterioare folosindu-se pentru simplitate condiții inițiale nule.

9.5. ALGORITMI PID ÎN STRUCTURI SISTEMICE NELINIARE

Utilizarea tehnicii de calcul în reglarea proceselor permite extinderea algoritmilor PID liniari invarianți la algoritmi PID cu structură variabilă, în care parametrii de acord K_R, K_I și K_D sînt funcții liniare sau neliniare de diverși parametri externi, procesuali, cu efect perturbator asupra desfășurării procesu-

lui automatizat. Luarea lor în considerare în timp real, în buclă închisă, menține relativ invarianți indicii de calitate ai regimurilor-etalon tranzitorii și staționare. De regulă, parametrii externi măsurabili, care concură la realizarea invariantei SA, sînt expresia — în termeni sistemici — perturbațiilor parametrice relativ rapide și puternice ce acționează în proces; acestea nu mai conferă viabilitate modelului sistemic invariant ce a fost utilizat în proiectarea inițială a algoritmilor de reglare (invarianți). Ei sînt practic imposibil de implementat, în mod eficient (din toate punctele de vedere), în RA analogic de serie.

Algoritmii cu structuri variabile necesită inevitabil mai multe calcule decît cei invarianți, motiv pentru care utilizarea lor este condiționată de dinamica parametrilor reglați, de dinamica perturbațiilor măsurabile și de performanțele RD.

9.5.1. Algoritmi PID cu cîștig adaptiv

Un RA liniar cu factor de amplificare constant nu are capacitatea de a compensa un proces cu caracteristică statică de transfer neliniară, reglarea liniară (cu algoritmi liniari invarianți) fiind posibilă într-o vecinătate a punctului nominal de funcționare. În celelalte puncte ale caracteristicii statice de transfer, cîștigul RA va fi prea mare sau prea mic datorită variațiilor parametrice ale modelului sistemic liniar, asociat procesului doar în vecinătatea punctului. nominal de funcționare prestabilit, acordarea RA făcîndu-se în acel punct

În unele situații practice este posibilă găsirea unor variabile auxiliare ale procesului (măsurabile), aflate într-o bună corelație cu modificările din dinamica acestuia. În astfel de situații este posibilă eliminarea (sau cel puțin diminuarea) variațiilor parametrilor procesuali prin modificarea parametrilor regulatorului în funcție de aceste variabile auxiliare, conform schemei de principiu din fig. 9.13 (parametrul variabil al RA este cîștigul K_R). Această schemă este denumită programarea *cîștigului* [16], deși pot fi modificați și alți parametrii ai RA (algoritmului de reglare), denumirea provenind din aplicațiile inițiale ale metodei.

Programarea cîștigului este o schemă de adaptare în circuit deschis, comparabilă cu schemele de compensare a perturbației *feedforward*. Nu există o reacție negativă de compensare (corectare) a unui cîștig incorect (deci, nu există o buclă de adaptare închisă); odată fixată (apriori *off-line*) dependența funcțională între parametrii RA și variabilele măsurabile (fig. 9.13) nu mai este modificată *on-line* în buclă automată închisă.

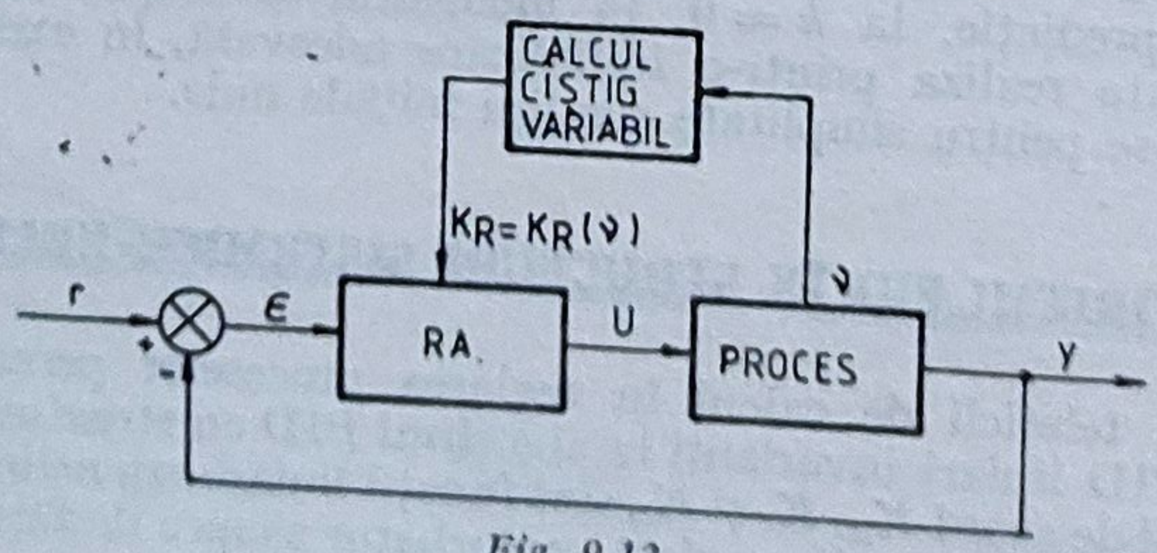


Fig. 9.13

Metoda are avantajul unei modificări foarte rapide a parametrilor RA, ca răspuns la o schimbare parametrică a procesului.

Deşi după unii autori această schemă nu este considerată adaptivă, datorită inexistenţei unei bucle închise de adaptare, ea s-a dovedit o tehnică foarte utilă pentru reducerea efectelor variaţiilor parametrilor procesuali. De altfel, *programarea cîştigului* reprezintă tehnica predominantă în proiectarea piloţilor automaţi pentru aeronavele perfecţionate [17], tehnica fiind considerată tehnologie industrială standard [16].

Dacă se consideră algoritmii PID discreţi descrişi în § 9.2, la care cîştigul K_R nu este o constantă, ci variază după legi neliniare aditive sau multiplicative, forma generală a legii de variaţie aditivă este [1]:

$$K_R = K_{R_0} + \alpha(v_k)^\beta, \tag{9.111}$$

unde v_k reprezintă eşantionul curent la momentul t_k al mărimii auxiliare procesuale măsurabile, $v(t)$. Variabila $v(t)$ este preluată de RD prin subsistemul intrărilor analogice.

Cîştigul K_R se modifică conform legii (9.111) în intervalul $[t_k, t_k + t_c]$ de calcul al comenzii u_k, ţinîndu-se seama de diagramele de timp din § 9.3; apoi valoarea K_R este menţinută constantă pînă la momentul t_{k+1} ş.a.m.d., avînd o variaţie în funcţie-scară.

Dacă se doreşte un cîştig K_R constant (independent de variabila externă v_k), atunci se ia $\alpha = 0$.

Pentru $\alpha \neq 0$ şi $\beta = \pm 1; \pm 2$, se obţin legile uzuale de variaţie:

$$K_R = K_{R_0} + \alpha v_k;$$

$$K_R = K_{R_0} + \alpha v_k^2;$$

$$K_R = K_{R_0} + \frac{\alpha}{v_k}, \quad v_k \neq 0; \tag{9.112}$$

$$K_R = K_{R_0} + \frac{\alpha}{v_k^2}.$$

Forma generală de variaţie, după o lege multiplicativă, este [1]:

$$K_R = K_{R_0}(v_k)^\beta \alpha. \tag{9.113}$$

Invarianţa cîştigului K_R faţă de variabila v_k, se realizează prin condiţia $\beta = 0$, α fiind un parametru de ponderare.

În [6], acest tip de lege, cu $\beta = 1$, este extins pentru toţi parametrii algoritmului PID, conform relaţiilor:

$$K_R = K_{R_0}\alpha v_k;\ T_i = \frac{T_{i_0}}{\alpha v_k};\quad T_d = \frac{T_{d_0}}{\alpha v_k}. \tag{9.114}$$

În [1] se recomandă o lege de forma $K_R = K_{R_0} + \alpha v_k$. Acordarea algoritmului PID se face cu $\alpha = 0$ (clasic) apoi — introducînd valori nenule, cu semn pentru coeficientul programabil, în condiţiile unor variaţii parametrice nete — se acordează parametrul α la valori pentru care RD menţine în mod acceptabil indicii de calitate ai regimurilor tranzitorii ale ieşirii procesului.

9.5.2. Structuri neliniare cu algoritmi PID

În [1] este ilustrată o schemă de reglare cu algoritmi PID invarianți (parametri constanți), în care variabila auxiliară v se utilizează într-o reacție de compensare de tip *feedforward*, reacție ponderată de un coeficient variabil a_v, depinzînd automat de mărimea absolută a erorii buclei, $|\varepsilon|$, semnul erorii, sign ε, și de sensul de variație al variabilei externe v, sign $v_k = \text{sign}\,(v_k - v_{k-1})$.

Structura este realizată complet prin tehnici *software*, eșantioanele v_k ale mărimii v fiind furnizate ciclic, de interfața de intrări analogice a RD (fig. 9.14):

$$u_k^{\text{OUT}} = u_k^{\text{PID}} \pm a_v v_k. \tag{9.115}$$

Se prezintă două aspecte ale legii de variație a coeficientului $a_v = a_v(|\varepsilon_k|, \text{sign}\,\varepsilon_k, \text{sign}\,\dot{v}_k)$.

Varianta 1. $a_v = a_v(\varepsilon_k)$ — variație continuă, limitată (fig. 9.15).

Eroarea $\varepsilon_k \in [-1, +1]$ (capitolul 2), iar $v_k \in [0, 1]$ și $[\varepsilon_m, \varepsilon_M] \subseteq [-1, +1]$.

Ieșirea RD este dată de relația (9.115), operațiile *software*, efectuate pe mărimea de ieșire din UC-RD fiind descrise în § 2.7.

Se notează $\rho = \varepsilon_M - \varepsilon_m$; $a = a_v^{\max}$; $m = \dfrac{a}{\rho}$. Din punct de vedere analitic, dependența coeficientului a_v de valoarea ε_k este dată de relația:

$$a_v = \begin{cases} -a, & \varepsilon_k < -\varepsilon_M \text{ (porțiunea } AB\text{, fig. 9.15)}; \\ m(\varepsilon_k + \varepsilon_m), & -\varepsilon_M \leqslant \varepsilon_k \leqslant -\varepsilon_m \quad (BC); \\ 0, & -\varepsilon_m \leqslant \varepsilon_k \leqslant \varepsilon_m \quad (CD); \\ m(\varepsilon_k - \varepsilon_m), & \varepsilon_m \leqslant \varepsilon_k \leqslant \varepsilon_M \quad (DE); \\ +a, & \varepsilon_k \geqslant \varepsilon_M \quad (EF). \end{cases} \tag{9.116}$$

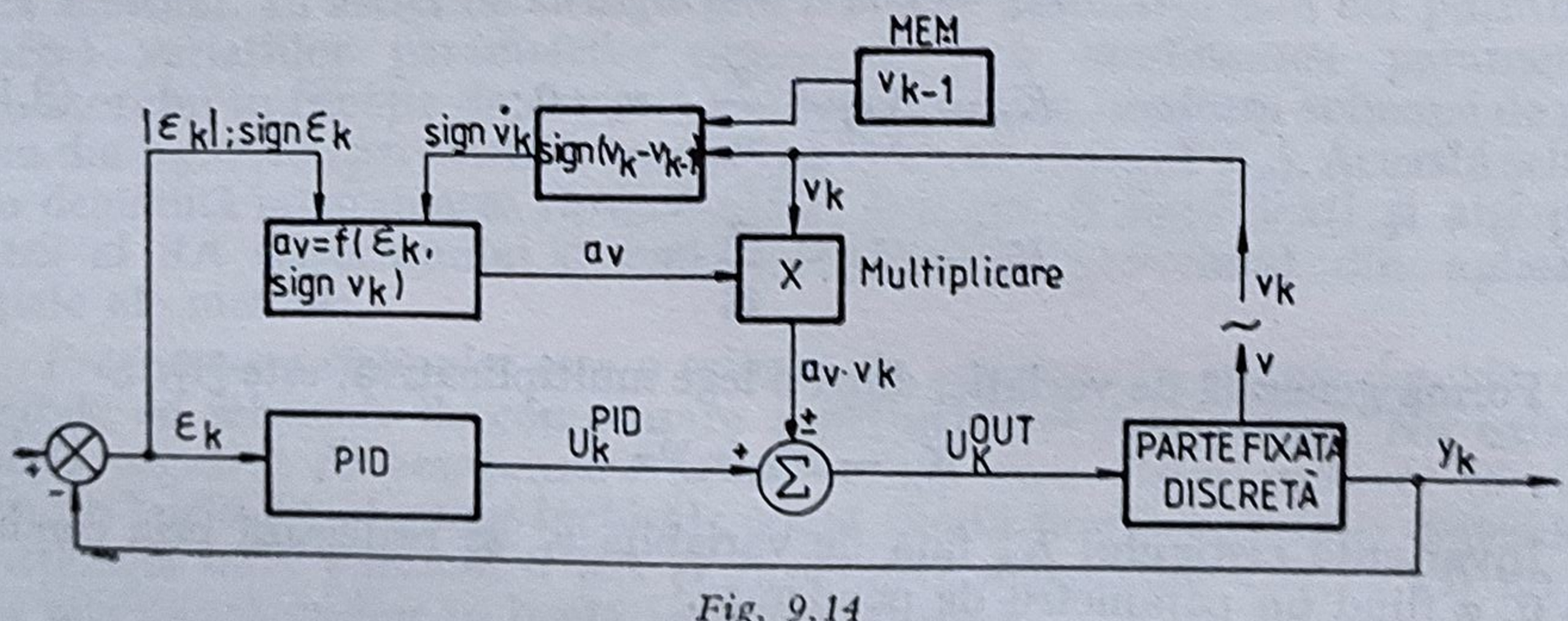


Fig. 9.14

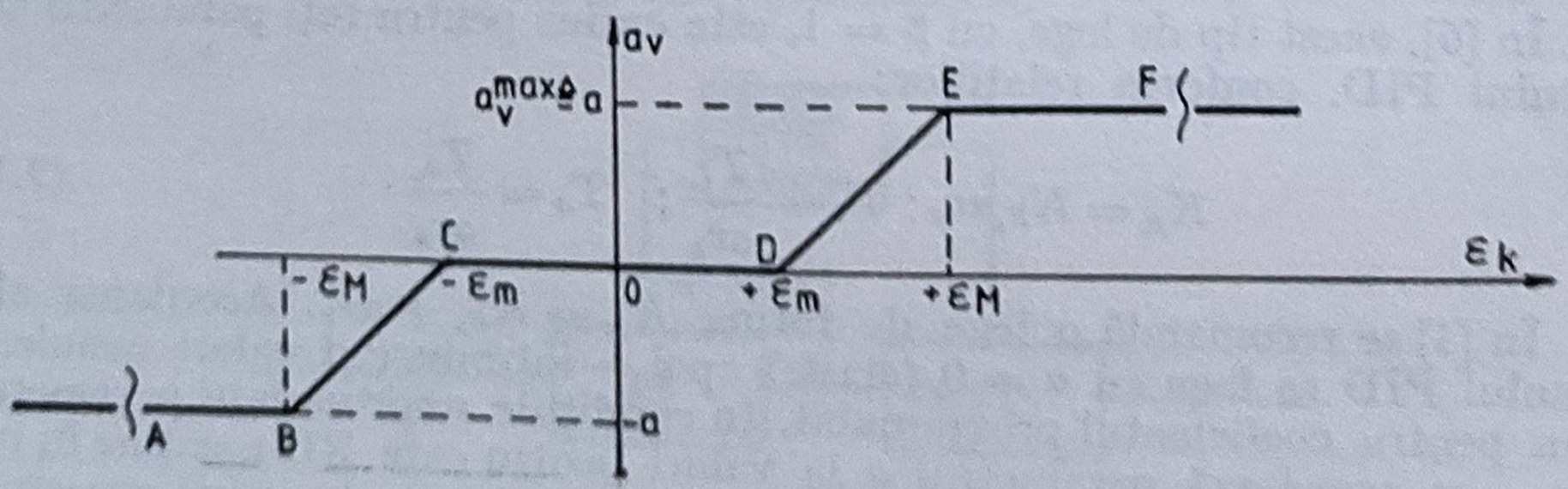


Fig. 9.15

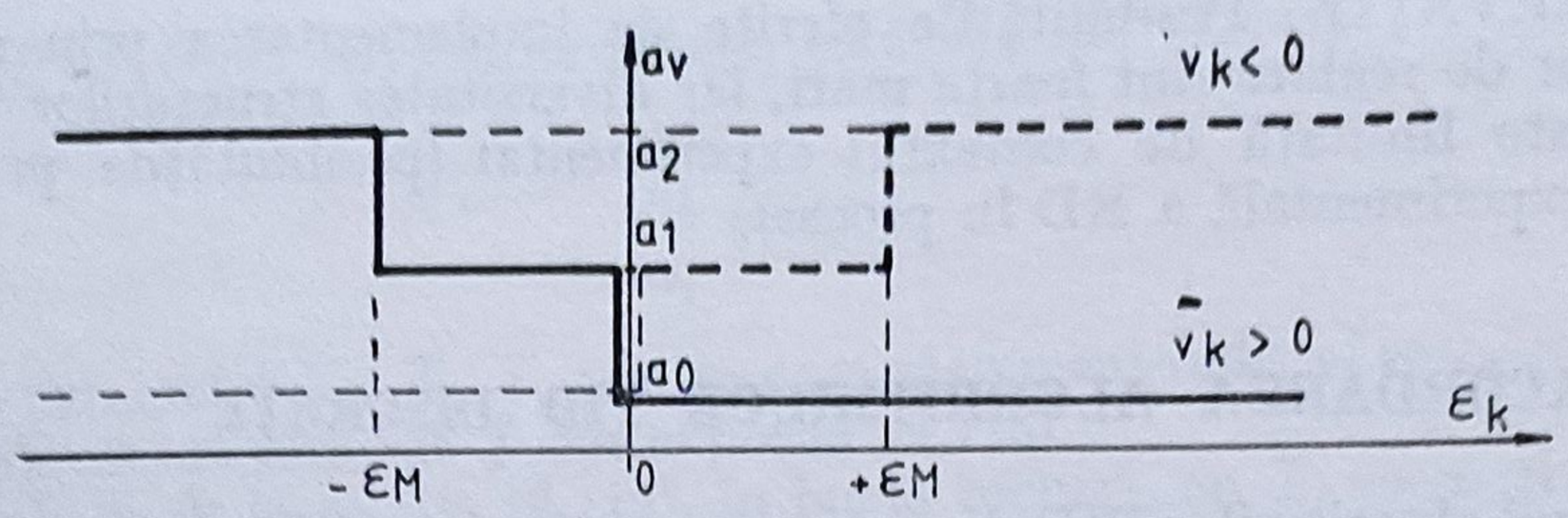


Fig. 9.16

Pe porțiunile BC și DE (fig. 9.15) această variantă necesită calcule suplimentare, adică o multiplicare între parametrul m și termenul $(\varepsilon_k + \varepsilon_m)$, respectiv $(\varepsilon_k - \varepsilon_m)$. Porțiunea CD constituie o „zonă moartă" pentru coeficientul a_v, în care $a_v = 0$ și $u_k^{OUT} = u_k^{PID}$, conform (9.115).

Varianta 2. $a_v = a_v(\varepsilon_k, \text{sign } \varepsilon_k, \text{sign } \dot{v}_k)$ — variație discontinuă.

În schema anterioară, existența unei multiplicări poate fi dezavantajoasă pentru procese rapide la care perioada de eșantionare, T, este foarte mică. În plus, nu se ține seama și de sensul variației variabilei $v(t)$ în timp, sign $\dot{v}(t)$ exprimînd tendința de variație a variabilei $v(t)$.

În această variantă, coeficientul de ponderare a_v are doar trei valori distincte, fiind permanent pozitiv:

$$a_v = \begin{cases} a_2 & (a_v \text{ foarte mare}); \\ a_1 & (a_v \text{ de valoare medie}); \\ a_0 & (a_v \text{ foarte mic, neglijabil}) \end{cases} \tag{9.117}$$

Dacă $a_0 = 0$, atunci — conform relației (9.115) — $u_k^{OUT} = u_k^{PID}$.

Variația lui a_v este descrisă în fig. 9.16.

Față de prima variantă, $a_v v_k > 0$; deci, cantitatea $a_v v_k$ se adună aritmetic permanent.

Dacă $\dot{v}_k < 0$, v_k are tendință de scădere. Funcție de mărimea erorii ε_k și de sign ε_k se obțin efectele următoare:

- ε_k este în scădere și se menține în banda $[-\varepsilon_M, 0]$, caz în care termenul $a_0 v_k$ este nesemnificativ, tendința erorii de a rămîne în acest interval fiind favorabilă din punctul de vedere al reglării;
- ε_k tinde să crească, rămînînd în banda $[0, +\varepsilon_M]$; se ține seama semnificativ de mărimea variabilei v_k și de tendința ei, termenul $a_1 v_k$ fiind de valoare medie;
- ε_k crește, $\varepsilon_k > \varepsilon_M$, iar v_k continuă să scadă; în această situație ponderea termenului $a_2 v_k$ se mărește.

Dacă alura este simetrică (față de axa a_v) în cazul sign $v = -1$, se constată în toate situațiile că termenul $a_v v_v$ tinde să fie constant pe toate cele trei intervale de valori ale mărimii de eroare, ε_k.

Din punctul de vedere al timpului de calcul această variantă nu necesită operații aritmetice, ci doar simple comparații.

Parametrii ε_M, a_0, a_1 și a_2 se definitivează în etapa de acordare experimentală a RD.

OBSERVAȚIE. Posibilitățile oferite de implementarea prin *software* a algoritmilor de reglare sînt foarte mari, iar diversitatea structurilor (configurațiilor) este limitată de contextul experimental (posibilitățile practice de acordare experimentală a RD în proces).

9.6. ACORDAREA ALGORITMILOR PID DISCREȚI

În cazul algoritmilor PID discreți cvasicontinui, însăși ipoteza de cvasicontinuitate [10] luată în considerare prin alegerea adecvată a perioadei de eșantionare a SA sugerează comportarea cvasiidentică a celor două tipuri de algoritmi: continui și cvasicontinui. S-ar părea deci că pentru algoritmi PID cvasicontinui, preluarea fidelă a metodelor din cazul continuu se face imediat, dar realitatea specifică aplicațiilor industriale cu algoritmi PID cvasicontinui nu a validat toate relațiile (numerice) de acordare ce caracterizează diferite metode folosite în cazul continuu, aceste relații cu coeficienții numerici bine precizați reținîndu-se însă ca valori de inițializare în procedurile iterative de acordare a RD [20].

Pentru o serie de algoritmi PID discreți necvasicontinui s-au impus cîteva metode tipice RD, care beneficiază în aplicarea lor fie de propriul sistem de calcul al RD, fie de un sistem de calcul de asistare a acordării (*off-line*).

O altă clasificare importantă este dată de posibilitățile de autoacordare a RD. Există RD acordabile manual (dar asistate de propriul sistem de calcul) și RD autoacordabile, care sînt mult mai eficiente din anumite puncte de vedere.

9.6.1. Acordarea algoritmilor PID discreți cvasicontinui

Datorită analogiei cu cazul continuu și în situația algoritmilor cvasicontinuali s-au impus aceleași metode bazate pe atingerea limitei de stabilitate, acordarea iterativă prin încercări, acordarea algoritmilor prin realizarea în prealabil a identificării unui model sistemic al procesului sau prin utilizarea caracteristicilor de frecvență identificate ale procesului.

- *Metode bazate pe atingerea limitei de stabilitate*. Aceste metode experimentale sînt frecvent folosite în practica automatizării proceselor continue relativ lente, uzuale [6]. Procedeele se aplică de regulă atunci cînd mărimea de referință a SA este de tip treaptă, iar perturbațiile (neexcesiv de mari) au o dinamică mai lentă decît parametrii reglați. De asemenea, se aplică în reglările nepretențioase din punctul de vedere al indicilor de calitate ai regimului tranzitoriu indicial.

Cel mai utilizat criteriu de acordare este Ziegler-Nichols [6], denumit și criteriul *suprafeței minime* sau al *coeficientului de amortizare*.

În cazul continuu, criteriul este de tip integral, avînd aspectul:

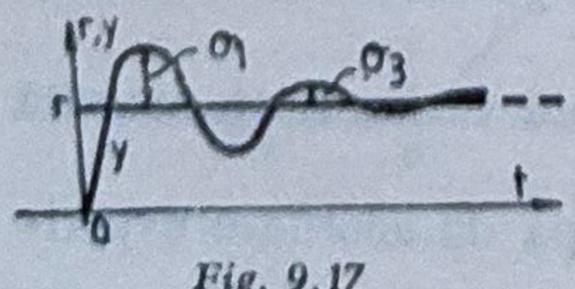


Fig. 9.17

$$J(K_R, T_i, T_d) = \int_0^\infty |\varepsilon(t)|\, dt = \min. \qquad (9.118)$$

Dacă răspunsul indicial are aspectul din fig.9.17, iar raportul dintre primele două maxime pozitive

ale erorii $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$ (suprareglaje) este $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$, de valoare

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_1} = 4, \tag{9.119}$$

atunci acei parametri K_R, T_i, T_d pentru care răspunsul indicial satisface relația (9.119) minimizează indicele J din expresia (9.118).

Pornindu-se de la relația (9.119), în buclă închisă, cu $T_i = \infty$ și $T_d = 0$, se atinge pentru o valoare $K_{R_{lim}}$ regimul de autooscilații stabile (limită de stabilitate), cu perioada T_{lim} (realizarea lui $T_i = \infty$ în RD este banală, prin $K_I \triangleq \frac{T}{T_i} = 0$).

Cunoscîndu-se experimental $K_{R_{lim}}$ și T_{lim}, în [4], [6], [21] se dau relațiile de acordare pentru parametrii K_R, T_i și T_d, în diverse configurații P, PI, PD, PID și cu diverși factori de interinfluență. Aceste relații concrete sînt descrise detaliat în [6] și [4], enumerîndu-se doar configurația PID fără interinfluență:

$$K_{R_{opt}} = 0{,}75\ K_{R_{lim}},\ T_{i_{opt}} = 0{,}6\ T_{lim},\ T_{d_{opt}} = 0{,}1\ T_{lim}, \tag{9.120}$$

valori pentru care se realizează condiția $\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = 4$.

În cazul discret cvasicontinuu, relațiile anterioare pot fi considerate ca valori de inițializare în cadrul unor proceduri iterative, ipoteza de cvasicontinuitate neînsemnînd și identitatea celor două tipuri de algoritmi-continui și discreți.

• *Metoda Offereins* [4], [21]. Ca și procedeul prezentat anterior, metoda Offereins se bazează pe aducerea sistemului închis la limită de stabilitate, fiind aplicabilă indiferent de factorul de interinfluență al algoritmului PID.

Spre deosebire de metoda Ziegler-Nichols, în care se consideră posibilă întotdeauna acordarea configurației maxime PID, în acest caz utilitatea componentei D este testată experimental prin introducerea ei treptată în regimul de autooscilații stabile, cu $K_R = K_{R_{lim}}$ și $T_i = \infty$. Dacă, introdusă treptat, componenta D duce la instabilitate, atunci nu este utilă, renunțîndu-se la ea. În caz contrar, dacă oscilațiile se diminuează, atunci componenta D este necesară și se alege conform procedurii din [21].

Componenta I este introdusă întotdeauna astfel încît să rezulte o eroare de poziție nulă, valoarea parametrului T_i, ca și a parametrului T_d, găsindu-se iterativ.

Conform [6], valorile de acordare din cazul continuu sînt:

$$K_R = 0{,}5\ K_{R_{lim}},\ T_i = 3T_{i_{lim}},\ T_d = \frac{T_{d_{lim}}}{3}. \tag{9.121}$$

situație corespunzătoare efectului D favorabil.

În [21], pentru reducerea timpului necesar acordării, se propun diverse succesiuni de etape, prin care să se asigure modificarea parametrilor de acordare.

Dezavantajul metodei constă în numeroasele aduceri ale SA la limită de stabilitate, care durează mult (procesele sînt lente) și conduc la efecte tehnologice negative din punctul de vedere al beneficiarului în etapa de acordare a RD.

• *Acordarea prin încercări* succesive. Metodele bazate pe atingerea limitei de stabilitate au dezavantajul unor suprareglaje (în prima etapă) excesiv de mari, care introduc de multe ori efecte tehnologice negative [6]. Procedeele prin încercări — de natură experimentală — caută să optimizeze calitatea regimului tranzitoriu fără aducerea la limită de stabilitate; în acest scop, la intrarea SA se folosește un set de mărimi de referință de tip treaptă subunitară (de amplitudini mici).

În [6] sînt descrise detaliat diverse asemenea metode, în care parametrii K_R, T_i și T_d (sau K_R, K_I și K_D) se modifică în anumite succesiuni, în etapa de acordare dispunînd — prin intermediul înregistratoarelor — de variațiile în timp ale parametrului reglat în buclă închisă.

Ca tehnică generală, aceste metode sînt variabile atît pentru cazul cvasicontinuu, cît și pentru cel necvasicontinuu.

Dezavantajul prezenței obligatorii a dispozitivelor cuplate *in-line*, de vizualizare a răspunsurilor SA, poate fi eliminat prin apelarea la procedeele prezentate în §9.6.2.

• *Metode bazate pe identificarea procesului*. Majoritatea metodelor uzuale se bazează pe identificarea relativ simplă a unor modele sistemice continue (funcții de transfer) ale procesului cu unul sau doi poli dominanți:

$$H'_{f_1}(s) = \frac{K_f\, e^{-\tau s}}{1 + T_f s}, \quad H'_{f_2}(s) = \frac{K_f\, e^{-\tau s}}{(1 + T'_{f_1} s)\,(1 + T'_{f_2} s}. \tag{9.122}$$

Modelul $H'_{f_1}(s)$ poate fi ușor identificat, folosindu-se răspunsul indicial al procesului [6].

Cu ipoteza de cvasicontinuitate îndeplinită, se acordează algoritmul PID continuu, apoi se folosește varianta sa discretă, cvasicontinuă, obținută prin metodele de discretizare expuse în § 9.1 și 9.2. De menționat faptul că există și metode în care se utilizează direct algoritmul discret.

Procese descrise prin modelul $H'_{f_1}(s)$. Pentru procese continue cu o constantă de timp dominantă, în practica de specialitate s-au impus diverse relații numerice de calcul al parametrilor K_R, T_i și T_d, în funcție de parametrii modelului continuu, K_f, T_f și τ. Astfel de relații de acordare sînt [4] relațiile Ziegler-Nichols; Cohen-Coon; W. Oppelt; Chien; Hrones; Reswick; Kopelovici; Smith și Murrill etc.

Cu observațiile privind valabilitatea exactă (numerică) a tuturor acestor relații inclusiv în cazul discret cvasicontinuu, aceste metode generează puncte de inițializare (K_{R_0}, T_{i_0}, T_{d_0}) în cadrul unor proceduri iterative și inevitabil experimentale, prin care se optimizează valorile parametrilor de acordare.

Procese descrise prin modelul $H'_{f_2}(s)$. Pentru astfel de procese, cu două constante de timp dominante, algoritmii PID discreți sau continui se acordează folosindu-se metoda compensării prin anulare, combinată cu procedeele de corecție în frecvență ce utilizează diagramele Bode [8]. În §9.7, astfel de metode combinate sînt descrise în două situații:

— algoritmi PID discreți necvasicontinui (perioada de eșantionare, T, relativ mare) cu interinfluență nulă, caz în care acordarea algoritmului se

face exclusiv în planul w (pseudofrecvențe discrete relative). Algoritmul PID discret acordat se determină direct în domeniul variabilei w (capitolul 4); apoi, prin transformarea omografică de rigoare, algoritmul se obține în variabila z^{-1}, de unde aspectul său discret în timp;

— algoritmi PID discreți cvasicontinui cu interinfluență, de tip serie (factorizați), situație în care — datorită analogiei cu algoritmul PID continuu — acordarea se face în domeniul variabilei s; în continuare, prin metodele de discretizare din § 9.1, se obține algoritmul PID discret cvasicontinuu.

• *Metodă de acordare pentru procese cu timp mort* [22]. Acest procedeu este indicat în cazul reglării proceselor lente cu timp mort mare.

Metoda se bazează pe schema de reglare cu predictor Smith, în care la proiectarea și acordarea algoritmului de reglare PID discret se face abstracție de timpul mort. Conform [22] metoda duce la rezultate foarte bune atunci cînd modelul este cunoscut cu precizie și în ipoteza invariației parametrice a procesului.

Dacă procedeul are variații parametrice este necesară proiectarea unui algoritm de reglare robust, invariant, care să permită reglarea satisfăcătoare a procesului pe întreaga plajă de variație a parametrilor. În scopul proiectării unui astfel de algoritm de reglare robust se folosesc funcțiile de sensibilitate ale ieșirii SA în raport cu parametrii variabili și procesului, determinîndu-se domeniile admisibile de acordare ale algoritmului de reglare.

În [22] se consideră ca parametru variabil al procesului timpul mort, τ, modelul fără timp mort fiind precis cunoscut.

Dacă procesul este descris prin $H_f(z^{-1}) = \widehat{H}_f(z^{-1})\, z^{-d}$ și modelul prin $H_M(z^{-1}) = \widehat{H}_M(z^{-1})\, z^{-d_m}$, atunci schema de reglare cu predictor Smith este dată în fig. 9.18 [22]. S-a considerat că $\widehat{H}_f(z^{-1}) = \widehat{H}_M(z^{-1})$, $d_m \neq d$, unde d reprezintă parametrul fluctuant al procesului.

În raport cu d, funcția de sensibilitate a ieșirii SA, $Y(z^{-1}; d)$, este definită prin relația:

$$S_d(z^{-1}) = \frac{\partial Y(z^{-1}, d)}{\partial d}. \tag{9.123}$$

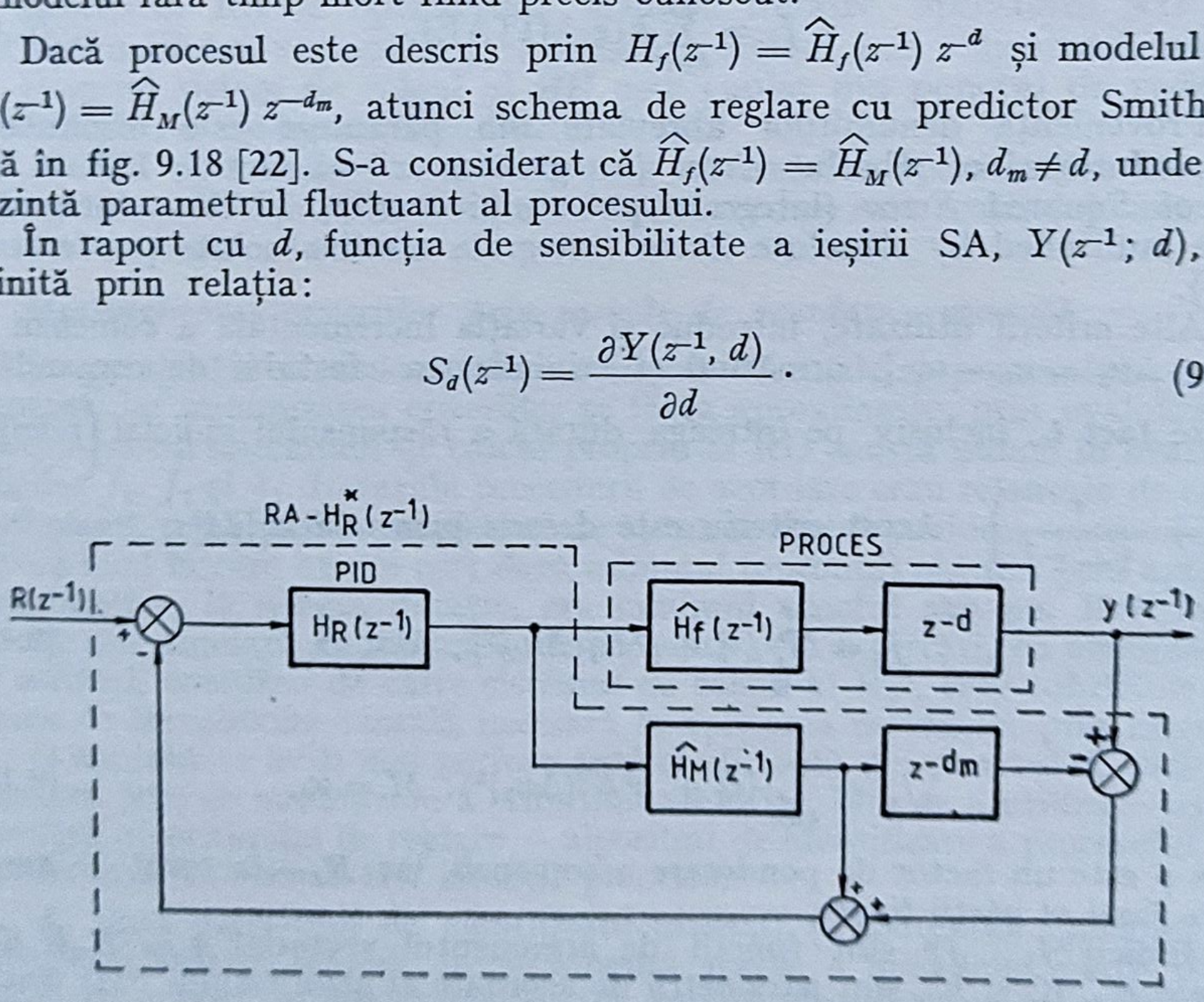


Fig. 9.18

Algoritmul PID discret descris în fig. 9.18 prin $H_R(z^{-1})$ se acordează după modelul fără timp mort, $\widehat{H}_M(z^{-1})$, prin metodele specifice acestor sisteme.

Algoritmul de reglare complet (reprezentat în fig. 9.18 cu linie întreruptă) este de forma:

$$H_R^*(z^{-1}) = \frac{H_R(z^{-1})}{1 + H_R(z^{-1})\,\widehat{H}_M(z^{-1})\,(1 - z^{-d_m})}. \tag{9.124}$$

După fiecare acordare a algoritmului $H_R(z^{-1})$, parametrii respectivi sînt validați numai dacă eșantioanele funcției de sensibilitate din (9.123) au o valoare sub cea impusă apriori, $(\forall)\, k \geqslant 0$. Rezultă un algoritm iterativ al cărui aspect procedural este prezentat detaliat în [22].

9.6.2. Acordarea algoritmilor PID discreți cu ajutorul criteriilor „integrale"

Criteriile uzuale folosite pentru acordarea RD au aspectul [13]:

$$J_1 = \sum_{k \geqslant 0} |\varepsilon_k| \quad \text{(IAE)}; \tag{9.125}$$

$$J_2 = \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon_k^2 \quad \text{(ISE)}; \tag{9.126}$$

$$J_3 = \sum_{k \geqslant 0} k\,|\varepsilon_k| \quad \text{(ITAE)}. \tag{9.127}$$

Proveniența denumirilor abreviate din paranteze este următoarea: IAE — *I*ntegral of *A*bsolut *E*rror (integrala erorii absolute); ISE — *I*ntegral of *S*quared *E*rror (integrala pătratului erorii); ITAE — *I*ntegral of *T*ime multiplied by *A*bsolute *E*rror (integrala erorii absolute ponderate în timp).

Alte criterii utilizate, introduc și variația incrementală a comenzii curente, $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$, urmărind și minimizarea efortului de comandă la fiecare tact t_k, inclusiv pe întreaga durată a răspunsului indicial (referința $R(z) = \frac{r}{1 - z^{-1}}$). Acest criteriu este descris prin relația [24]:

$$J_4 = \sum_{k=0}^{M} \{\varepsilon_k^2 + \rho^2 K_f^2 (\Delta u_k)^2\},\ M < \infty, \tag{9.128}$$

sau

$$J_4^{\infty} = \sum_{k \geqslant 0} \{\varepsilon_k^2 + \rho^2 K_f^2 (\Delta u_k)^2\},\ M = \infty, \tag{9.129}$$

unde ρ este un factor de ponderare a comenzii, iar K_f — factorul de amplificare final al părții fixate.

Indicii $J_1 \ldots J_4^{\infty}$ sînt funcții de argumentul vectorial $\bar{q} = [K_R K_I K_D]^t$, în care K_R, K_I și K_D sînt parametrii de acordare ai algoritmului PID discret (necvasicontinuu), perioada T fiind aleasă arbitrar.

Acordarea constă în a găsi $\bar{q}^{opt}$, pentru care $J(\bar{q}^{opt}) = \min$, unde J reprezintă oricare din indicii specificați mai înainte; deci,

$$\bar{q}^{opt} = \arg \min_{\bar{q}} J(\bar{q}). \tag{9.130}$$

Strategia de acordare fundamentată pe aceste criterii diferă de la caz la caz în funcție de performanțele RD și de cunoașterea modelului părții fixate.

Minimizarea criteriilor prin metode experimental-manuale

Dacă nu se cunoaște un model sistemic al părții fixate, atunci o metodologie de acordare folosind criteriile J_1, J_2 și J_3, prin care se urmărește realizarea condiției (9.130), este descrisă în [13]. Indicii J_1, J_2 și J_3 sînt calculați (cvasi)simultan, la fiecare moment t_k, și în final, la $k \to \infty$, iar valorile lor finale ($k = M < \infty$) sînt comparate reciproc prin rutine de evaluare a răspunsurilor indiciale aferente unui set standard de mărimi de referință tip treaptă (neunitar). După p — astfel de răspunsuri indiciale se examinează comparativ valorile finale ale acestor trei indici — operatorul RD ajustează manual într-un mod adecvat parametrii K_R, K_I, K_D. Procedura de ajustare este iterativă (și prin încercări), fiind relansată la fiecare iterație de către operatorul RD,

Pentru a avea o imagine globală completă asupra erorilor de acordare, se utilizează simultan toți cei trei indici, J_1, J_2 și J_3.

Acordarea RA se optimizează manual, iterativ, operatorul RD decizînd optimalitatea vectorului q; totodată, vectorul q se reajustează manual.

Propriul sistem de calcul al RD este cuplat din punctul de vedere al acordării într-o configurație *in-line*.

„Bucla" de acordare se închide prin intermediul operatorului uman, iar criteriul de oprire a procedurilor iterative de acordare este realizat de asemenea de către operatorul uman.

Minimalizarea criteriilor prin metode de acordare automată

În paragraful precedent s-a considerat că modelul procesului este necunoscut, iar minimizarea criteriilor se făcea aproximativ, prin evaluări manuale. Aportul sistemului de calcul propriu al RD consta numai în evaluarea indicilor J_1, J_2 și J_3. Iterațiile procedurii de acordare erau relansate de operatorul uman, permițînd „apropierea" de optimul căutat conform relației (9.130) într-un mod în care nu era cert dacă minimul (optimul) obținut prin aprecieri aproximative, la ultima iterație, era minimul absolut sau nu. Metodologia expusă este similară cu metodele de acordare prin încercări, cu amendamentul asistării acordării de către sistemul de calcul al RD, care substituie aparatura de înregistrare vizuală necesară la aplicarea metodelor prin încercări.

O modalitate mult mai performantă și eficientă din punctul de vedere al acordării RD, de minimizare a criteriilor amintite, este de a utiliza — apriori acordării algoritmului de reglare — algoritmi de identificare a procesului.

În general, există trei situații practice:

A. Dacă algoritmii de identificare utilizați și contextul aplicației permite determinarea *off-line*, într-o singură etapă, a modelului părții fixate, atunci cu același mini(micro)calculator auxiliar de asistare, cunoscînd acest model și tipul algoritmului de reglare folosit, se poate rezolva problema de optimizare staționară (9.130).

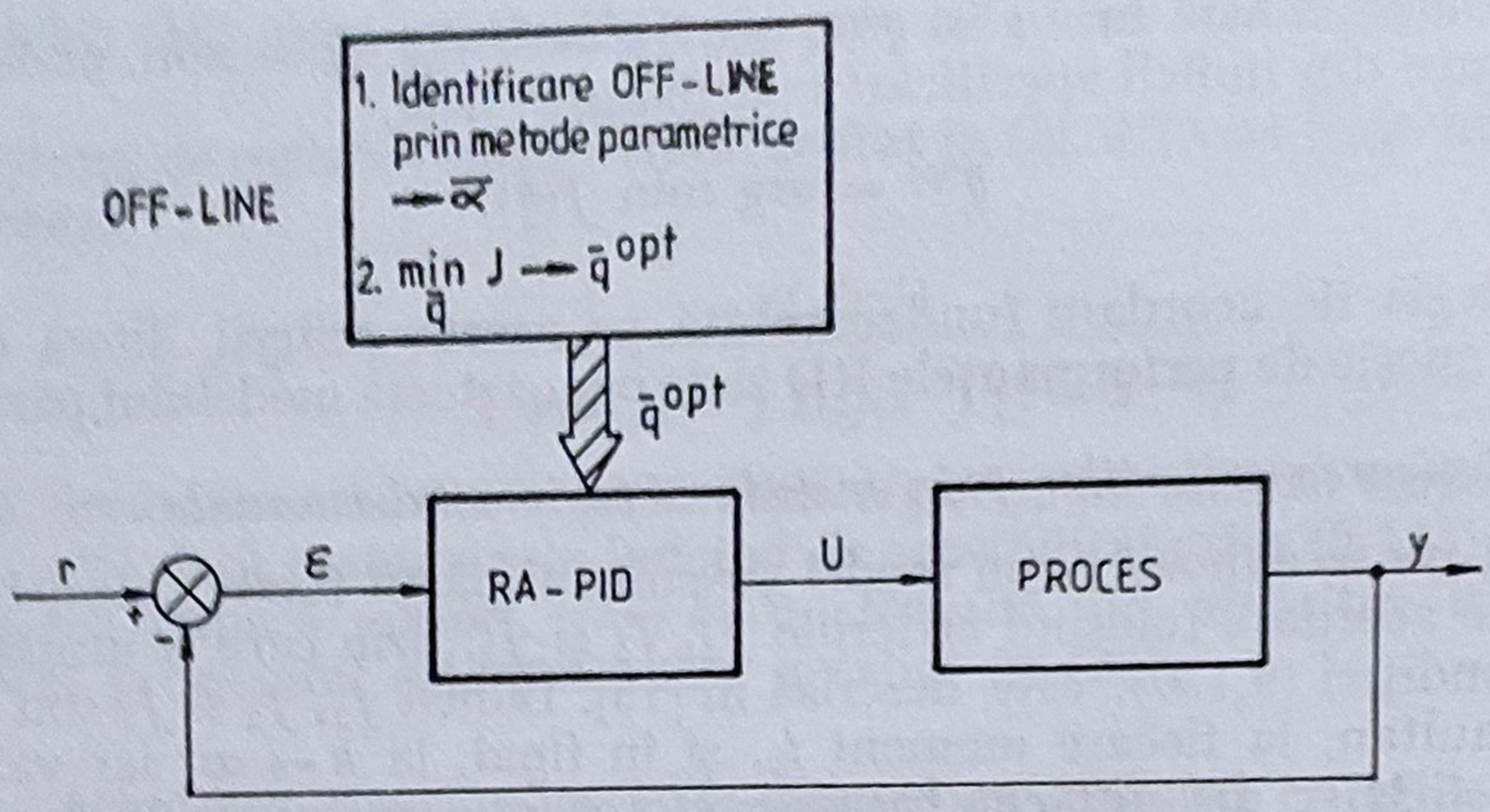


Fig. 9.19

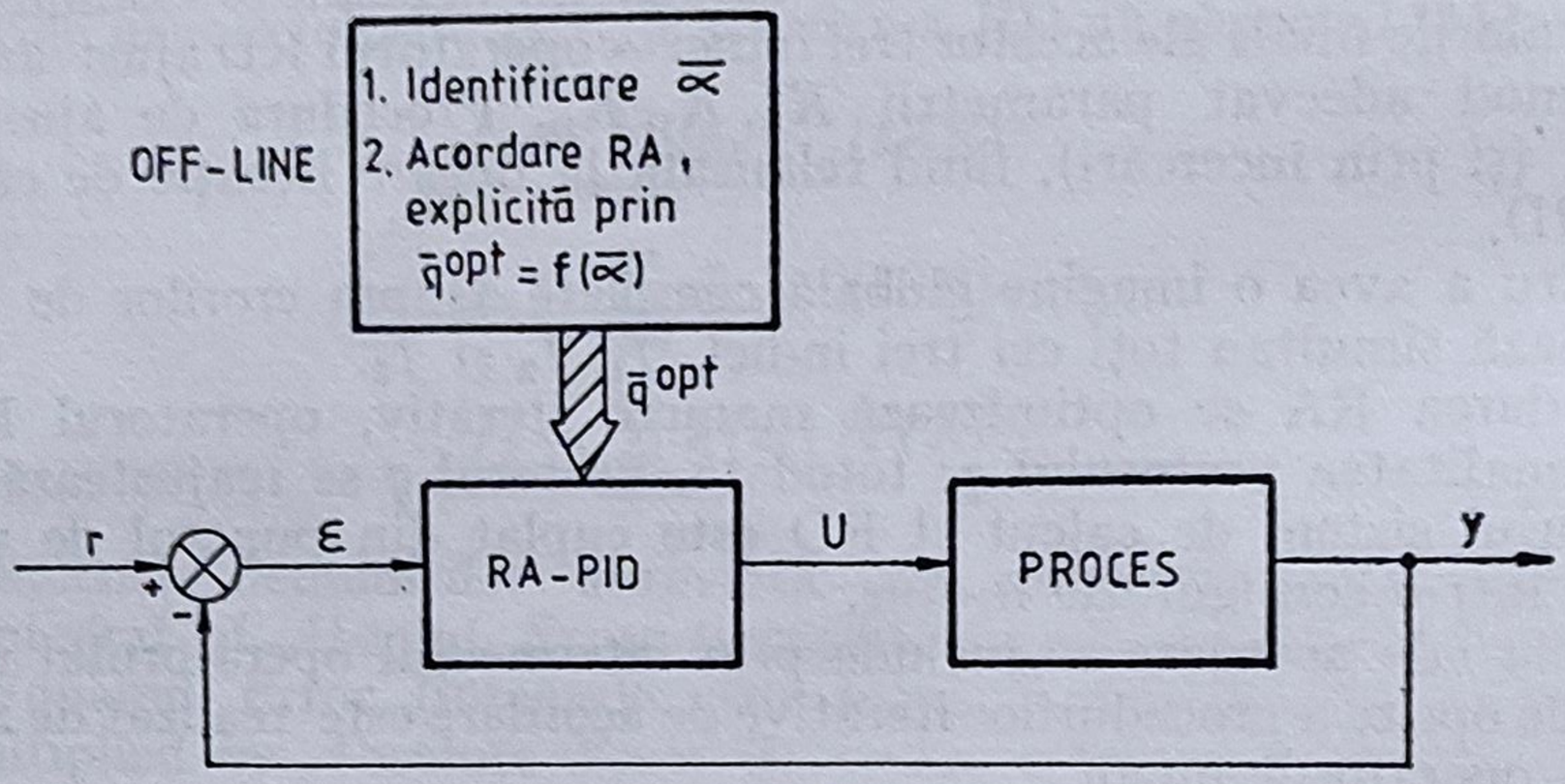


Fig. 9.20

Dacă $\bar{\alpha}$ este vectorul parametrilor modelului părții fixate și $\bar{q}$ vectorul parametrilor algoritmului de reglare, atunci diversele *task*-uri efectuate *off-line* de către calculatorul de asistare și *on-line* de către propriul sistem de calcul al RD sînt ilustrate în fig. 9.19.

Cazul $\mathbf{A_1}$ (fig. 9.19). Acordare implicită — algoritmi PID necvasicontinui:

off-line: — se identifică vectorul de proces, $\bar{\alpha}$;
— se rezolvă problema (9.130), rezultînd $\bar{q}^{opt}$;

MANUAL: — se introduce în RD parametrul vectorial $\bar{q}^{opt}$ al algoritmului de reglare;

on-line (RD) (Regim A) — se execută algoritmul de reglare.

Cazul $\mathbf{A_2}$ (fig. 9.20). Acordare explicită-algoritmi PID cvasicontinui; introducere $\bar{q}^{opt}$:

off-line: — se identifică $\bar{\alpha}$;
— din cazul continuu se calculează $\bar{q}^{opt} = f(\bar{\alpha})$;

MANUAL: — se introduce în RD vectorul parametrilor RA, $\bar{q}^{opt}$;

on-line (RD): — se execută algoritmul de reglare.

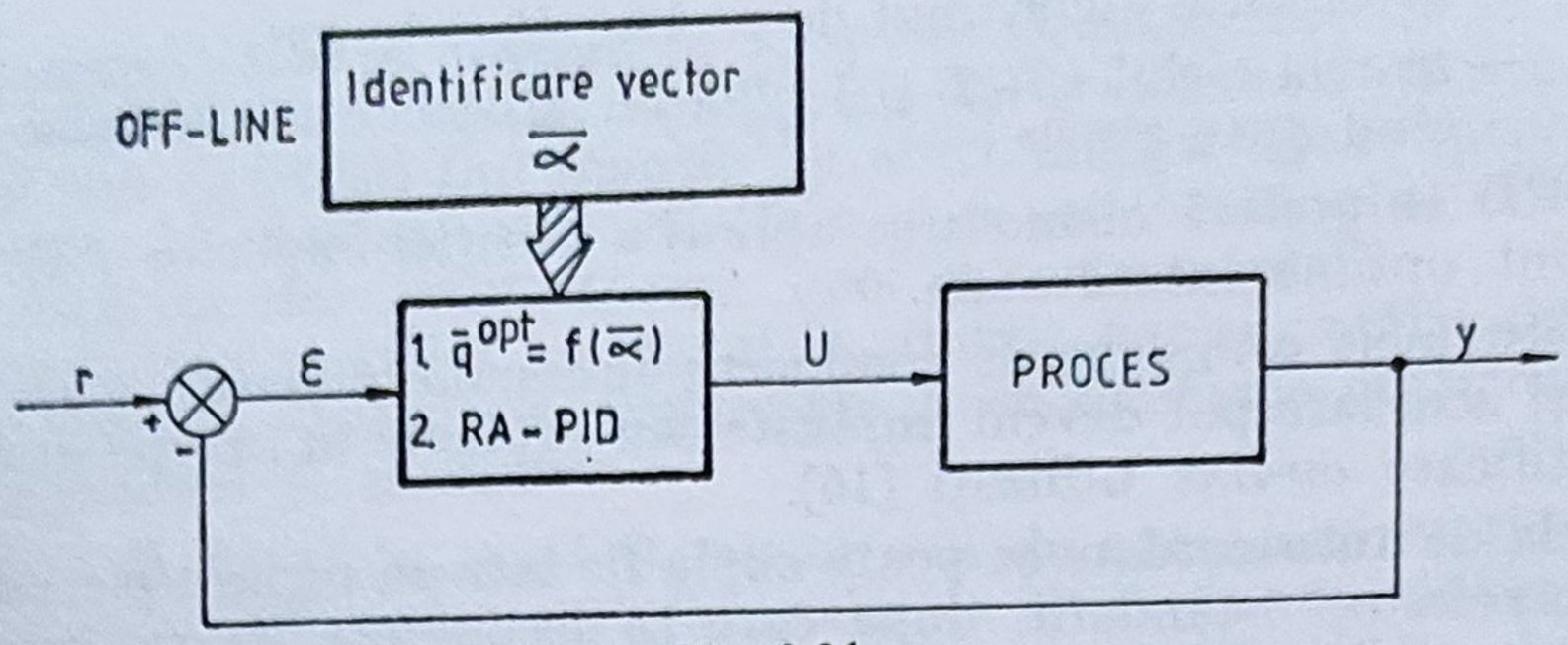


Fig. 9.21

Cazul $\mathbf{A_3}$ (fig. 9.21). Introducere $\overline{\alpha}$ în RD:

off-line: — se identifică $\overline{\alpha}$;

MANUAL: — se introduce vectorul $\overline{\alpha}$ în RD;

on-line: — se calculează $\bar{q}^{opt} = f(\overline{\alpha})$; $f(\overline{\alpha})$ — funcție memorată în RD;

(RD) — se execută algoritmul de reglare.

Diferențele existente între cazurile $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$ și $\mathbf{A_3}$ sînt următoarele:

• În cazul $\mathbf{A_1}$, algoritmul PID este necvasicontinuu (T — arbitrară), iar criteriul de acordare este J_2, J_4^{∞}, pe cînd în cazurile $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$, algoritmul de reglare PID este cvasicontinuu, ceea ce permite utilizarea relațiilor explicite $\bar{q}^{opt} = f(\overline{\alpha})$;

• În cazul $\mathbf{A_2}$, în RD se introduc parametrii de acordare K_R, T_i și T_d, iar în cazul $\mathbf{A_3}$ — parametrii procesului, $\overline{\alpha}$, funcția explicită (a acordării), $f(\overline{\alpha})$, fiind memorată în RD. Cazul $\mathbf{A_2}$ este cel mai utilizat datorită analogiei cu cazul continuu.

B. Dacă algoritmii de identificare utilizați și contextul aplicației permit, atunci se determină *on-line*, iterativ, modelul procesului. La fiecare iterație a etapei de identificare *on-line* se execută o iterație a etapei de acordare și a celei de reglare. Combinarea algoritmilor aferenți celor trei etape determină algoritmi (globali) de reglare cu autoacordare consacrați. Modelul precis al procesului se obține după un anumit număr de pași, la fel ca și acordarea finală a parametrilor. De menționat faptul că toate operațiile se desfășoară automat.

Schema-bloc de principiu este prezentată în fig. 9.22:

on-line: (regim A) — se identifică iterativ $\overline{\alpha}_i$ $\left(\text{iterații ciclice cu frecvența } \frac{1}{T}\right)$;

— se calculează $\bar{q}_i^{opt} = f(\overline{\alpha}_i)$, $f(\overline{\alpha})$ — memorată aprioric;

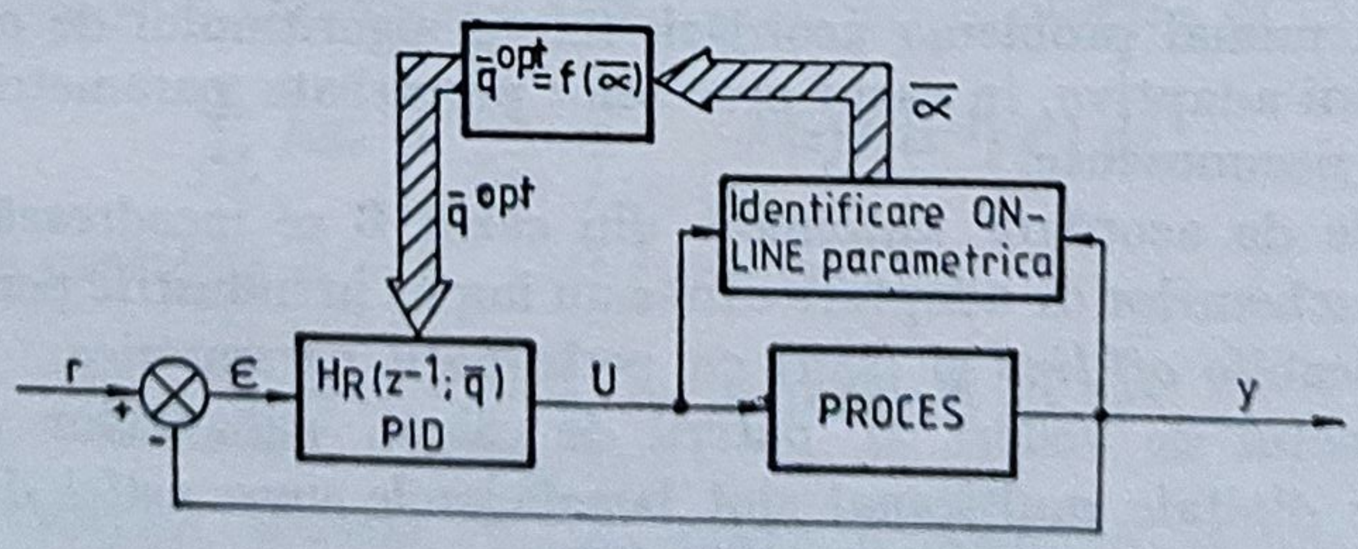


Fig. 9.22

— se execută algoritmul de reglare $H_R(z^{-1};\ \bar{q}_i^{opt})$;
— se reia ciclul $i \leftarrow i + 1$ pînă la satisfacerea criteriului de oprire, cînd $\bar{q}_i^{opt} \simeq \bar{q}^{opt\ abs}$.

În RD se preferă memorarea apriori a funcției explicite $f(\bar{\alpha})$, ale cărei valori sînt optime întotdeauna.

În sistemele complexe de conducere automată diversele etape de identificare și acordare pot deveni implicite sau explicite în funcție de algoritmii de identificare *on-line* utilizați [16].

Bucla de autoacordare se poate cupla fie într-un regim tipic, *self-tuning*, pentru o referință standard, după care se decuplează, fie cu frecvența de eșantionare a sistemului automat, în regim automat, RD devenind adaptiv.

C. Dacă algoritmul de identificare este *on-line*, dar neiterativ (într-un singur pas se identifică procesul), atunci în RD — pe baza unor relații explicite de acordare (memorate) — se determină parametrii de acordare $\bar{q}^{opt} = f(\bar{\alpha})$, alegerea funcției $f(\bar{\alpha})$ garantînd optimalitatea alegerii parametrilor $\bar{q}$:

on-line în buclă automată deschisă: — se identifică $\bar{\alpha}$,
— se calculează $\bar{q}^{opt} = f(\bar{\alpha})$.

on-line în buclă automată închisă: — se execută algoritmul de reglare.

Etapa a doua este tipică algoritmilor cvasicontinui, la care $f(\bar{\alpha})$ este cunoscută apriori din cazul continuu.

Observații și recomandări privind implementarea metodelor **A, B** *sau* **C**

CAZUL **A**. Identificarea unui model parametric printr-o metodă (unipas) *off-line* necesită un consum ridicat de memorie și rutine complexe, posibile numai în mini (micro)calculatoare de asistare a acordării (CAA — Computer *A*ided-*A*ccording). Operația de identificare *off-line* fiind costisitoare din punctul de vedere al beneficiarului, metoda se recomandă pentru procese cu modele invariante (fără perturbații parametrice) pentru a nu relua operațiunile de identificare *off-line*.

CAZUL **B.** Dacă algoritmul complet de autoacordare se lansează opțional de către operatorul RD la intervale mari de timp în scopul unor reacordări (aciclice) ale algoritmilor de reglare, atunci RD este tipic cu autoacordare, fiind de regulă multicanal, astfel încît același algoritm de autoacordare să „deservească" mai multe bucle automate monovariabile, într-un mod eficient economic.

Dacă algoritmul de autoacordare se execută ciclic cu frecvența de eșantionare a SA discret și se combină cu algoritmul de reglare, atunci RD poate soluționa nu numai problema acordării fixe a algoritmului de reglare, ci și cea a acordării adaptive, în cazul proceselor perturbate parametric nu numai cu modele necunoscute.

Schemele de acordare automată din cazul **B** se încadrează principial în contextul schemelor de adaptare care s-au impus în industrie pentru procese greu identificabile *off-line* și (sau) cu perturbații parametrice.

Din punctul de vedere al puterii de calcul, gabaritului și costului, regulatoarele digitale multicanal sînt beneficiarele unor astfel de algoritmi de reglare cu autoacordare [25], [26], [27].

De remarcat [16] că schema de adaptare cu autoacordare se reduce în bucla de adaptare la o reacție negativă cu cîștig constant, dacă parametrii procesului sînt constanți (invarianți). În acest ultim context (procese invariante) bucla de adaptare este conectată și funcționează pînă cînd performanțele obținute sînt satisfăcătoare, apoi este deconectată.

Aceste tehnici se aplică nu numai în situația implementării algoritmilor PID, ci a oricărui algoritm de reglare liniar, cu limitările de rigoare referitoare la consumul de memorie.

CAZUL **C.** Ca și în cazul **B**, algoritmul de autoacordare (identificare și acordare automată) se lansează fie aciclic, la intervale mari de timp (depinzînd de dinamica parametrilor reglați și a perturbațiilor), fie ciclic, fiind de regulă implementabil în RD multicanal (dar și în RD monocanal, datorită simplității algoritmilor de identificare și acordare în cazul cvasicontinuu).

Evaluarea unor criterii în domeniul z

Minimizarea indicilor $J_1 \dots J_4^{\infty}$ necesită evaluarea lor fie în domeniul timp, dacă $M < \infty$, fie în domeniul z, cînd $M = \infty$. Nu toți indicii enumerați admit o reprezentare în domeniul z.

Conform [28], dacă $f(t)$ și $g(t)$ sînt două mărimi (semnale) de energie finită, cu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty \tag{9.131}$$

avînd echivalentul discret $f_k \overset{\Delta}{=} f(kT)$ și $g_k \overset{\Delta}{=} g(kT)$ descris prin mulțimile numărabile de eșantionare $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ și $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, unde T este perioada de eșantionare, atunci condiția (9.131) se transcrie:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k^2 < \infty \text{ și } \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k^2 < \infty. \tag{9.132}$$

Dacă $F(z)$ și, respectiv, $G(z)$ sînt transformatele $\mathfrak{Z}$ ale semnalelor (mărimilor) f și g, atunci [28]:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k g_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} F(z)\,\overline{G(z)}\,z^{-1}\,\mathrm{d}z, \tag{9.133}$$

în care $\overline{G(z)} = G(\bar{z}) = G(z^{-1})$, cu condiția ca $G(z)$ și $F(z)$ să fie funcții raționale proprii cu coeficienți reali, iar $z = \mathrm{e}^{Ts}$, $\operatorname{Re} s = 0$.

Pentru semnale cauzale $f_{-k} = g_{-k} = 0$, $k > 0$, relația (9.133) devine:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k g_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} F(z)\,G(z^{-1})\,z^{-1}\,\mathrm{d}z. \tag{9.134}$$

Dacă se consideră $f_k = g_k$, $(\forall)\ k \geqslant 0$, rezultă:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} F(z)\,F(z^{-1})\,z^{-1}\,\mathrm{d}z. \tag{9.135}$$

OBSERVAȚIE. Relația (9.134) poate fi obținută și altfel. Conform [29] și [28], dacă $f(t)$ și $g(t)$ au eșantioanele reale $\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, respectiv $\{g_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, iar

$F(z)$ și $G(z)$ sînt transformatele lor $\mathfrak{Z}$, atunci transformata $\mathfrak{Z}$ a produsului fg este dată de relația:

$$\mathfrak{Z}\{fg\} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k g_k z^{-k} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} F(p)\, G\left(\frac{z}{p}\right) p^{-1}\, \mathrm{d}p,$$

unde Γ este un cerc concentric cu coroana în care este definită funcția $F(z)$.

În relația anterioară se consideră $z = 1$ și se pune condiția ca toți polii (discreți) ai lui $F(z)$ să se găsească în interiorul discului $|z| \leqslant 1$; atunci relația devine:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k g_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} F(p)\, G\left(\frac{1}{p}\right) p^{-1}\, \mathrm{d}p.$$

Cînd $f_k = g_k$, $(\forall)\ k \in \mathfrak{Z}$, iar $f(t)$ este cauzală ($f_{-k} = 0,\ k > 0$) se obține (cu substituția $p \leftarrow z$) expresia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} F(z)\, F(z^{-1})\, z^{-1}\, \mathrm{d}z,$$

identică cu (9.135).

Examinînd aspectul indicilor $J_1 \ldots J_4^{\infty}$ se impun două condiții pentru exprimarea lor în domeniul z: prima se referă la posibilitatea găsirii transformatelor $\mathfrak{Z}$ ale termenilor curenți ai sumelor, ca funcții raționale în variabila z, iar a doua se referă la respectarea restricției (9.132).

Dacă $F(z) = \mathfrak{Z}\{f_k\}_{k\geqslant 0}$, atunci condiția în domeniul timp din relația (9.132) este echivalentă cu condiția ca polii funcției raționale $F(z)$ să fie subunitari, în modul, în planul z.

Cu aceste observații, prima condiție este respectată pentru indicii J_2 și J_4^{∞}.

Criteriul J_2 din relația (9.126) se exprimă în domeniul z, conform relației (9.135), astfel:

$$J_2 = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} \varepsilon(z)\, \varepsilon(z^{-1})\, z^{-1}\, \mathrm{d}z, \tag{9.136}$$

unde $\varepsilon(z) = \mathfrak{Z}\{\varepsilon_k\}$.

Criteriul J_4^{∞} din relația (9.129) se exprimă în domeniul z sub forma:

$$J_4^{\infty} = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{|z|=1} \{\varepsilon(z)\, \varepsilon(z^{-1}) + \rho^2 k_f^2 (1 - z^{-1})\, (1 - z)\, U(z)\, U(z^{-1})\}\, z^{-1}\, \mathrm{d}z, \tag{9.137}$$

în care

$$U(z) = \mathfrak{Z}\{u_k\} \text{ și } \mathfrak{Z}\{u_k - u_{k-1}\} = (1 - z^{-1})\, U(z).$$

Pentru relațiile (9.136) și (9.137), condiția de viabilitate a exprimării indicilor în domeniul z este ca $\varepsilon(z)$ să aibă poli subunitari în modul sau, altfel, ca bucla închisă cu eșantionare să fie stabilă.

O aplicație a indicelui J_2 din expresia generală (9.136) este prezentată în § 6.7.3.

• *Evaluarea indicelui J_4^∞ în domeniul z pentru algoritmii PID discreți cei mai utilizați* — algoritmul PID discret din expresiile (9.20) și (9.30). Pentru domeniul z, algoritmul este descris în relația (9.20); totodată, în relația (9.30) s-a notat cu $H_R(z^{-1})$ funcția sa de transfer în z^{-1}. Deci,

$$U(z^{-1}) = H_R(z^{-1})\,\varepsilon^*(z^{-1});$$

$$Y^*(z^{-1}) = F(z^{-1})\,Y(z^{-1}); \qquad \text{conform relației (9.25)}$$

$$H_R(z^{-1}) = K_R\left(1 + \frac{K_I'}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right).$$

Se consideră partea fixată, discretă, descrisă prin funcția de transfer $H_f(z^{-1})$ și se notează:

$$H_f^*(z^{-1}) = H_f(z^{-1})\,F(z^{-1}); \tag{9.138}$$

așadar, din punctul de vedere al proiectării, filtrul $F(z^{-1})$ este inclus în partea fixată discretă (fig. 9.6). Rezultă:

$$\varepsilon(z^{-1}) = \frac{1}{1 + H_f^*(z^{-1})\,H_R(z^{-1})}\,R(z^{-1}) \tag{9.139}$$

și

$$U(z^{-1}) = \frac{H_R(z^{-1})}{1 + H_f^*(z^{-1})\,H_R(z^{-1})}\,R(z^{-1}). \tag{9.140}$$

Mărimea de referință este de tip treaptă:

$$R(z^{-1}) = \frac{r}{1-z^{-1}}, \quad r \in (0,\,1]. \tag{9.141}$$

Pentru acest tip de algoritm PID discret, condiția de viabilitate a exprimării indicelui J_4^∞ în domeniul z este ca ecuația caracteristică

$$1 + H_R(z^{-1})\,H_f^*(z^{-1}) = 0, \tag{9.142}$$

să aibă rădăcini stabile (subunitare).

Folosindu-se relațiile (9.138), (9.139) și (9.141), expresia (9.137) devine:

$$J_4^\infty = -\frac{r^2}{2\pi j}\oint_{|z|=1} \frac{1}{(z-1)^2}\left[\frac{1}{[1 + H_f^*(z^{-1})\,H_R(z^{-1}][1 + H_f^*(z)\,H_R(z)]}\right]\times$$

$$\times\left[1 - \rho^2 K_f^2\,\frac{(z-1)^2}{z}\,H_R(z^{-1})\,H_R(z)\right]dz. \tag{9.143}$$

Algoritmul PID *discret din expresiile* (9.21) *și* (9.29). În relația (9.29), algoritmul este descris sub forma:

$$u_k = H_{R_1}(z^{-1})\,\varepsilon_k^* - H_{R_2}(z^{-1})\,y_k^*,$$

unde $\varepsilon_k^* = r_k - y_k^*$ și $y_k^* = F(z^{-1})\,y_k$; configurația de reglare este ilustrată în fig. 9.5, iar $H_{R_1}(z^{-1})$, $H_{R_2}(z^{-1})$ sînt date în relația (9.29).

Din fig. 9.5 rezultă:

$$\varepsilon(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{1 + H_f^*(z^{-1})\,[H_{R_1}(z^{-1}) + H_{R_2}(z^{-1})]}, \tag{9.144}$$

iar din expresiile (9.29) și (9.30) se obține:

$$H_R(z^{-1}) = H_{R_1}(z^{-1}) + H_{R_2}(z^{-1}). \tag{9.145}$$

Dacă în relația (9.144) se înlocuiește (9.145), atunci — pentru $\varepsilon(z^{-1})$ — rezultă același aspect din (9.139).

Relația (9.145) denotă că ecuația caracteristică a buclei închise, din (9.142), este aceeași pentru ambii algoritmi PID discreți (deci, nu depinde de „locul derivării").

Comanda $U(z^{-1})$ diferă față de cazul precedent (9.140); conform fig. 9.5, ea are forma:

$$U(z^{-1}) = \frac{H_{R_1}(z^{-1})}{1 + H_f^*(z^{-1})\,H_R(z^{-1})}\,R(z^{-1}). \tag{9.146}$$

Folosindu-se relațiile (9.138), (9.141), (9.144), (9.145) și (9.146), expresia (9.137), pentru acest tip de algoritm, devine:

$$J_4^\infty = -\frac{\gamma^2}{2\pi j}\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z-1)^2}\left[\frac{1}{[1 + H_f^*(z^{-1})\,H_R(z^{-1})]\,[1 + H_f^*(z)\,H_R(z)]}\right]\times$$

$$\times\left[1 - \rho^2 K_f^2\,\frac{(z-1)^2}{z}\,H_{R_1}(z^{-1})H_{R_1}(z)\right]dz. \tag{9.147}$$

În [24], în cadrul unei aplicații referitoare la RD cu autoacordare, se utilizează indicele J_4^∞ în exprimarea în domeniul timp, respectiv J_4^∞ în exprimarea în domeniul z. Dificultățile de exprimare analitică a indicelui J_4^∞ în funcție de parametrii K_R, K_I, K_D prin metoda reziduurilor — aplicată în relația (9.143) sau (9.147) — sînt legate de gradul ridicat al ecuației caracteristice (9.142), ecuație cu coeficienți parametrizați cu K_R, K_I, K_D necunoscuți apriori și cu rădăcini complex-conjugate.

9.6.3. Algoritm de identificare [1]

Algoritmul de identificare automată propus și dezvoltat în [19] este neiterativ (parametrii părții fixate se determină într-o singură etapă), fiind viabil pentru clasa procesoarelor industriale descrise prin modele continue de forma $H_f'(s) = \frac{K_f}{1 + T_f s}\,e^{-\tau s}$. Din punct de vedere operațional, acest algoritm este lansat de către operatorul RD sau ciclic, într-un regim de funcționare tipic RD moderne: regimul de autoacordare *(self-tuning)* distinct de regimul manual, M, și de cel automat, A.

Identificarea se realizează *on-line*, în buclă automată deschisă, pe baza unor regimuri tranzitorii speciale, declanșate printr-o secvență memorată de comenzi de tip indicial.

Frecvența de eșantionare utilizată în acest regim special se poate alege oricît de mică (în limita disponibilităților RD), întrucît numărul de calcule

matematice este redus, comenzile sînt cunoscute apriori (tip treaptă) — doar durata lor se contorizează într-o buclă închisă de identificare —, iar acurateţea modelului estimat, descris prin vectorul parametric (K_f, T_f, τ), este cu atît mai bună.

După execuţia *on-line* a algoritmului, în memoria de lucru a RD este disponibil modelul continuu, caracterizat prin vectorul $(\widetilde{K}_f, b, d)$, avîndu-se în vedere relaţiile

$$H_f(z) = \frac{\widetilde{K}_f}{z-b} z^{-d},\ \widetilde{K}_f \triangleq K_f(1-b),\ b = e^{-\frac{T}{T_f}} \text{ şi } d \triangleq \left[\frac{\tau}{T}\right] \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

În expresiile prezentate, T este perioada de eşantionare finală care va fi folosită în regim automat (în buclă automată închisă). Modelul discret înglobează şi extrapolatorul de ordin zero. Perioada T este estimată valoric înaintea închiderii buclei automate (regimul A), cunoscîndu-se constanta de timp T_f a modelului continuu estimat în etapa precedentă. (Se memorează o relaţie de tip $T = \frac{T_f}{n}$; $n = 5, 10, \ldots$).

Algoritmul de identificare este implementabil în orice RD (mono sau multicanal), necesitînd un consum redus de memorie. Se utilizează alături de algoritmii de reglare şi acordare din cazul discret.

Descrierea metodei teoretice

Se avansează următoarele ipoteze preliminare:

— modelul sistemic continuu corespunzător proceselor continue identificabile prin această metodă este descris prin relaţia:

$$H'_f(s) = \frac{K_p e^{-\tau s}}{1 + T_f s}; \tag{9.148}$$

— RD se foloseşte într-un sistem unificat de reglare automată, situaţie în care considerăm schema tipică din fig. 9.23.

Factorul final de amplificare al părţii exogene RD la nivelul interfeţelor de intrare/ieşire ale RD este:

$$K_f \triangleq K_{EE} K_p K_{TR}. \tag{9.149}$$

Dinamica EE şi TR se consideră neglijabilă în raport cu cea a procesului, în caz contrar ele contribuie prin constantele lor de timp la mulţimea finită

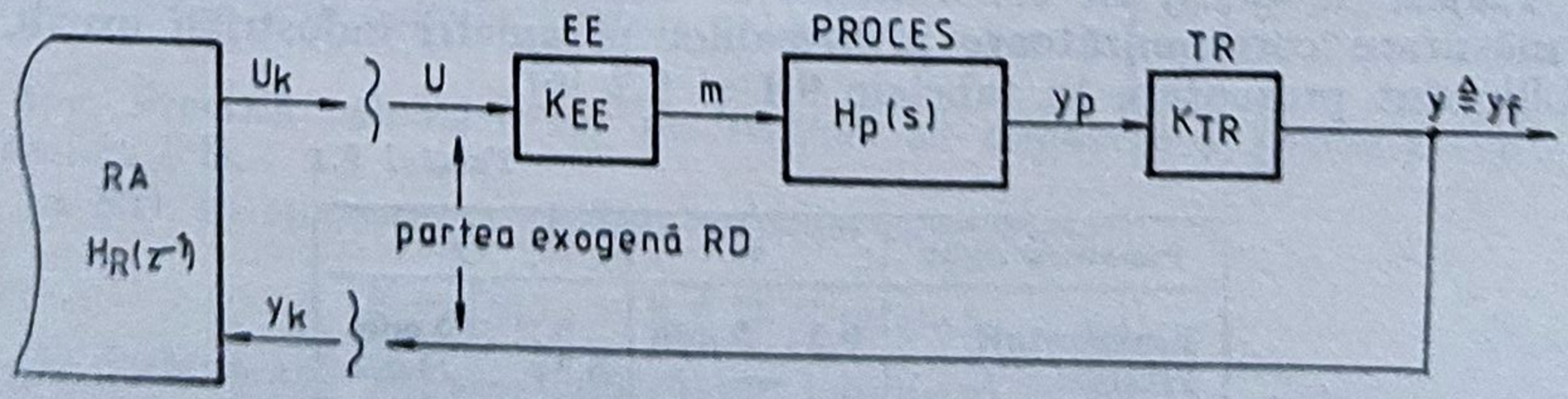


Fig. 9.23

a constantelor de timp semnificative ale părții fixate continue, situație neinclusă în această metodă.

A doua ipoteză se concretizează prin condiția:

$$K_f = 1. \tag{9.150}$$

Necesitatea îndeplinirii condiției (9.150) este motivată în §2.8.

Cu această ipoteză, modelul sistemic continuu, care trebuie identificat de RD, este:

$$H'_f(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + T_f s} \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{9.151}$$

În cazul cînd a doua ipoteză nu este valabilă, fapt posibil numai în sistemele neunificate, de reglare (unde plaja staționară maximă de valori ale măsurii y diferă de plaja staționară maximă a comenzii u) a RD atît cantitativ cît și calitativ (dimensional), este descrisă și situația $K_f \neq 1$.

Tipul comenzilor emise de RD *și alegerea perioadei de eșantionare în regimul de identificare*

Comenzile emise de RD în mod automat sînt de tip treaptă, cu aspectul:

$$u(t) = \eta(t) - \eta(t - t_x), \tag{9.152}$$

unde $\eta(.)$ este funcția lui Heaviside, iar t_x — durata impulsului dreptunghiurilor (t_x comparabil cu τ).

Valoarea lui t_x nu este cunoscută apriori *(off-line)*, ci este definită într-o buclă *on-line* de identificare, prin măsurarea în timp real a mărimii de ieșire (a răspunsului indicial declanșat în proces prin această comandă).

În regim de identificare, frecvența de eșantionare $\frac{1}{T'}$ se poate alege oricît de mică, în limita disponibilităților RD; deci,

$$t_x = k_x T', \; k_x \in \mathbb{N}. \tag{9.153}$$

Deoarece modelul (adică constanta de timp T_f) nu este cunoscut apriori, se pune problema plajei corecte de valori corespunzătoare perioadei T'. De remarcat că în regim automat frecvența de eșantionare este $\frac{1}{T}$, cu

$$T' \ll T, \; T = qT', \; q \gg 1. \tag{9.154}$$

Alegerea aproximativă a parametrului T' depinde de estimarea foarte grosieră a lui T, care la rîndul ei depinde de dinamica parametrului reglat.

Plajele de valori ale constantelor de timp și ale traductoarelor aferente de măsurare corespunzătoare principalilor parametri industriali uzuali, reglabili, sînt prezentate în tabelele 9.1 și 9.2 [6].

Tabelul 9.1

Parametrul reglat	τ	T_f
Temperaturi	0,3 . . 5 min	5 . . . 60 min
Presiuni	—	0,5s . . . 14 min
Debite	—	0,5s . . . 5 s

Tabelul 9.2

Parametrul măsurat de traductor	Constanta de timp a traductorului	Observații
O_2, CO_2, N_2 (analizoare)	5 s	Traductoare industriale
Punct de rouă	30 s	—
Conductibilitate electrică	30 s	—
Umiditate	30 s	—
pH	30 s	—
Viscozitate	1 . . .30 s	—
Debite	0,1 . . .5 s	
Temperaturi	5 s. . .5 s	—
Presiuni	1 s	
Nivel	1 s	

Valorile sînt maximale, iar tendința în fabricarea traductoarelor industriale este ca ele să scadă.

Cunoscîndu-se apriori aceste valori, se alege convenabil perioada de eșantionare a regimului de identificare T', preferabil cît mai mică.

Conform ipotezelor preliminare prezentate, se studiază următoarele două cazuri:

Cazul I .1; $K_f = 1$. Pot exista situațiile prezentate în continuare:

I. 1. $\tau \simeq 0$. Partea fixată continuă este descrisă prin modelul:

$$H_f'(s) = \frac{1}{1 + T_f s} \stackrel{\Delta}{=} \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{9.155}$$

Răspunsul indicial al modelului (9.155) la o treaptă maximală $u(t) = 1\eta(t)$ este:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_f}}. \tag{9.156}$$

Cu notațiile $x_i = \frac{t_i}{T_f}$, $t_i = n_i T'$, $T_f = \not{p} T'$;

rezultă: $$x_i = \frac{n_i}{\not{p}}, \quad n_i, \ \not{p} \in \mathbb{N}, \tag{9.157}$$

unde durata t_i este contorizată în n_i perioade T', T_f este necunoscută, deci $\not{p}$ este un număr întreg necunoscut.

Se aleg r valori crescătoare, $x_1 < x_2 < \ldots < x_r$, cu $x_i \in (0, 1)$, pentru care se cunosc prin calcule *off-line* valorile $y(x_i) = y\left(\frac{n_i}{\not{p}}\right) \stackrel{\Delta}{=} y_i = 1 - e^{-x_i}$, $i = \overline{1, r}$. Precizia calculării lor nu trebuie să depășească precizia dată de aritmetica RD.

În RD, se memorează *off-line* vectorii numerici:

$$\bar{y} = [y_1 y_2 \ldots y_r]^t \text{ și } \bar{x} = [x_1 x_2 \ldots x_r]^t. \tag{9.158}$$

Se declanșează din start un răspuns indicial în proces, prin comenzi de tip indicial, conform fig. 9.24.

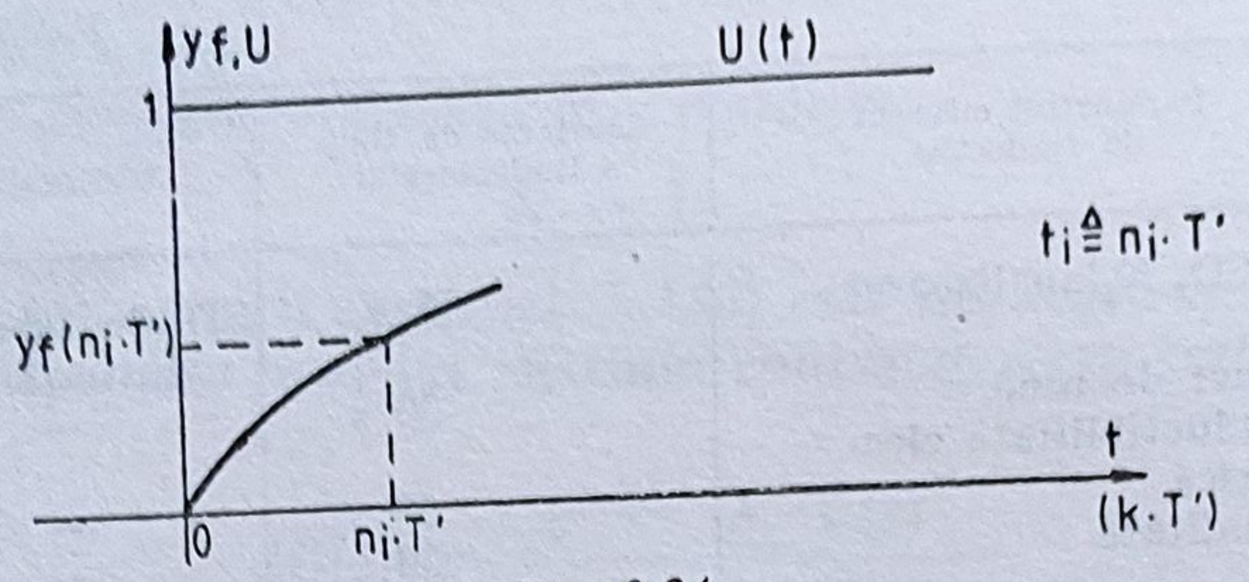


Fig. 9.24

Alegîndu-se apriori o valoare $y_i \in \bar{y}$, se contorizează timpul (în T') din momentul inițial $t_0 = 0$, pînă în momentul în care răspunsul indicial real satisface cu o eroare dată condiția:

$$|y_f(t_i) - y_i| < \text{eroare dată } (\leqslant 1\%). \tag{9.159}$$

Fie acest moment $t_i = n_i T'$. Atunci, conform relației (9.157), cunoscîndu-se $x_i \in \bar{x}$ (corespunzător lui y_i ales) și n_i contorizat în timp real, rezultă:

$$p = \left[\frac{n_i}{x_i}\right] \in \mathbb{N}, \tag{9.160}$$

unde $[\cdot]$ semnifică valoarea întreagă a funcției încadrate de paranteze drepte.

OBSERVAȚII:

• Evident, se putea alege o singură valoare x_1 și $y_1 \triangleq y(x_1)$, dar în ipoteza unei utilizări generale a RD pentru procese rapide $y(x_1)$ ar putea să fie atinsă valoric, conform (9.159), prea repede, iar pentru procese lente, prea încet; așadar, în funcție de dinamica estimată apriori (tabelele 9.1 și 9.2) se determină (oricît de grosier) plaja de valori pentru T_f și se alege adecvat x_i, pentru a termina identificarea în mod rapid și eficient.

Deoarece s-a considerat că $(\forall) x_i$, $x_i \in (0, 1)$, rezultă că, pentru $x_i = 1$, intervalul maxim contorizat din (9.157) este $t_i = T_f$, de unde și considerentele anterioare.

• Singurul calcul matematic cerut *on-line* în acest caz este împărțirea numărului natural n_i la numărul zecimal x_i, împărțire realizată în format binar, care nu necesită decît găsirea părții întregi a cîtului egal exact cu $\left[\frac{n_i}{x_i}\right]$, neinteresînd zecimalele acestuia.

Erorile apar datorită cuantificării duratelor $T_f = pT'$ și $t_i = n_i T'$ în multipli întregi ai perioadei T', utilizării părții întregi a numărului $\frac{n_i}{x_i}$ și asimilării (ca aspect grafic) răspunsului indicial real (al procesului) y_f cu răspunsul indicial al modelului din (9.156).

Eroarea datorată cuantificării lui T_f și T_i este cu atît mai mică cu cît T' are valoare mai redusă.

Testarea efectuează la momentul $t_0 = 0$ asupra existenței sau absenței timpului mort, $\tau \neq 0$ sau $\tau = 0$, se face prin condiția tipică:

$$y_f(mT') \simeq (1\% \ldots 5\%)\ y_f \max,\ y_f \max = 1. \tag{9.161}$$

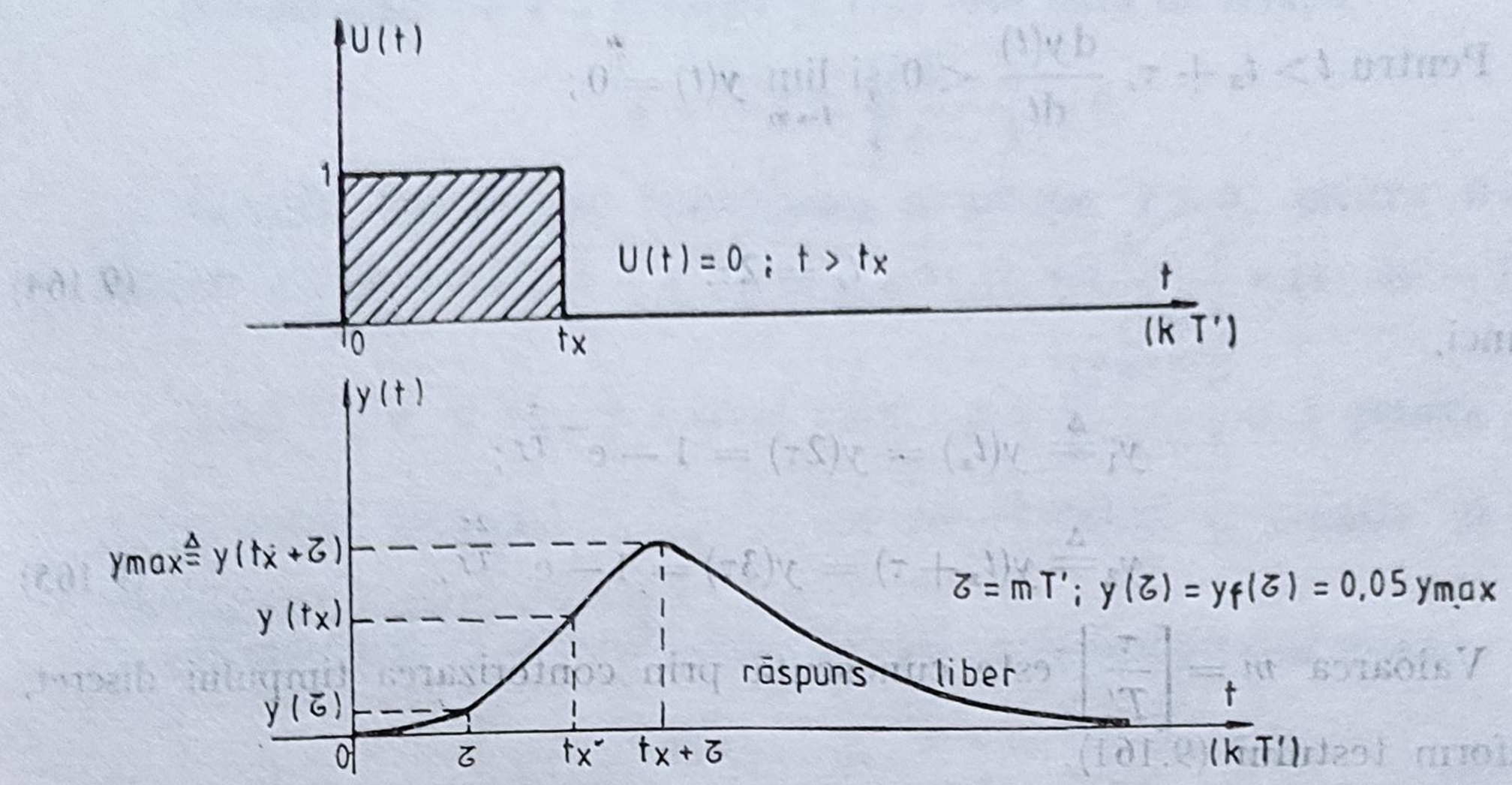


Fig. 9·25

Dacă prin contorizarea în număr de perioada T' se atinge valoarea $y_f(mT')$ din (9.161), după o durată ($\tau \triangleq mT'$) neglijabilă în raport cu plaja estimată apriori a constantei de timp T_f, atunci se consideră $\tau = 0$ și se utilizează procedura de mai sus. Cînd valoarea contorizată $\tau = mT'$ este neneglijabilă, atunci se continuă cu procedura din cazul $\tau > 0$ și nu cu cea anterioară.

• Pentru fiecare clasă de procese utilizatorul va trebui să introducă un test de comparare a valorii mT' cu plaja de valori T_f a clasei respective. Se evită astfel cazurile în care raportul $\frac{\tau}{T_f} \approx 0$, luîndu-se net $\frac{\tau}{T_f} = 0$.

I.2. $0 < \tau < T_f$. Partea fixată continuă este descrisă prin modelul:

$$H_f(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{e^{-\tau s}}{1 + T_f s}, \quad y_0 \triangleq y(0) = 0, \; u_0 \triangleq u(0) = 0. \tag{9.162}$$

Conform fig. 9.25, comanda declanșată automat de la $t_0 = 0$, cu aspectul din (9.152), generează următorul răspuns al modelului, cu condiții inițiale nule (aici).

Răspunsul modelului $y(t)$, din relația (9.162), la comanda $u(t)$, din fig. 9.25, este:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leqslant t < \tau; \\ 1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_f}} & \tau \leqslant t \leqslant t_x + \tau; \\ + e^{-\frac{t-\tau}{T_f}} + e^{-\frac{t-\tau-t_x}{T_f}}, & t > t_x + \tau. \end{cases} \tag{9.163}$$

Comanda se anulează începînd de la $t = t_x$, iar răspunsul liber al modelului atinge valoarea maximă $y_{max} \triangleq y(t_x + \tau) > y(t_x)$ datorită existenței timpului mort, $\tau > 0$. Practic nu mai interesează răspunsul $y(t)$ la $t > t_x + \tau$, deci se consideră $u = 0$ (sau alte valori conform paragrafelor următoare).

Pentru $t > t_x + \tau$, $\dfrac{dy(t)}{dt} < 0$ și $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$;

fie

$$t_x = 2\tau. \tag{9.164}$$

Atunci,

$$y_1 \stackrel{\Delta}{=} y(t_x) = y(2\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{T_f}};$$

$$y_2 \stackrel{\Delta}{=} y(t_x + \tau) = y(3\tau) = 1 - e^{-\frac{2\tau}{T_f}}. \tag{9.165}$$

Valoarea $m = \left[\dfrac{\tau}{T'}\right]$ este cunoscută prin contorizarea timpului discret, conform testului (9.161).

Dacă concordanța model-proces este bună atunci — conform primei ipoteze preliminare — din răspunsul real al procesului se măsoară valorile $y_{f_1} \stackrel{\Delta}{=} y_f(t)\big|_{t=2mT'}$ și $y_{f_2} \stackrel{\Delta}{=} y_f(t)\big|_{t=3mT'}$, considerîndu-se $y_{f_1} \simeq y_1$ și $y_{f_2} \simeq y_2$, y_1, y_2 fiind definiți în relația (9.165).

Se notează

$$x = \frac{\tau}{T_f} \in (0, 1) \tag{9.166}$$

și

$$c = \frac{y_2}{y_1} = \frac{y(t_x + \tau)}{y(t_x)} > 1. \tag{9.167}$$

Cu aceste notații, expresiile din (9.165), (9.166) și (9.167) rezultă:

$$c = \frac{1 - e^{2x}}{1 - e^{-x}} = 1 + e^{-x}. \tag{9.168}$$

Funcția e^{-x} se dezvoltă în serie Taylor trunchiată, cu $x \in (0, 1)$:

$$e^{-x} \simeq \frac{1}{1 + x + \dfrac{x^2}{2}}. \tag{9.169}$$

Aproximînd e^{-x} din (9.169) și substituind aproximarea sa în (9.168), se obține ecuația în x:

$$x^2 + 2x + 2\frac{c-2}{c+1} = 0, \tag{9.170}$$

unde numărul (zecimal) c este disponibil, după $t > t_x + \tau = 3mT'$, prin efectuarea împărțirii din (9.167). Această împărțire de numere zecimale (în format intern binar) nu are nici o restricție de timp real (pentru perioada T'), bucla automată fiind deschisă.

Soluția pozitivă $\tilde{x}$ a ecuației (9.170) este dată de relația:

$$\overline{x} = -1 + \sqrt{\frac{3-c}{c-1}} > 0. \tag{9.171}$$

Ecuația (9.170) are întotdeauna o soluție $\tilde{x} > 0$, pentru $0 < \tau \leqslant T_f$, întrucît $x \in (0, 1]$; $c = 1 + e^{-x} \in [1 + e^{-1}; 2)$, iar $\frac{3-c}{c-1} \in (1; 2e - 1] \in \mathbb{R}^+$.

Dacă $\tilde{x} > 0$, și $\tilde{x} > 1$, caz în care $-1 + \sqrt{\frac{3-c}{c-1}} > 1$ pentru $1 < c < \frac{7}{5}$, atunci ipoteza $x = \frac{\tau}{T_f} < 1$ nu este valabilă și ecuația (9.170) nu furnizează soluția $\tilde{x}$ corectă.

Practic, la $t_x = 2\tau$ se testează condiția ca răspunsul real să fie

$$y_f(2\tau) = y(2\tau) = 1 - e^{-\frac{\tau}{T_f}} > 1 - e^{-1} \simeq 0{,}6321. \tag{9.172}$$

Dacă condiția (9.172) nu este satisfăcută, atunci $\tau < T_f$ și $c > \frac{7}{5}$, soluția (9.171) fiind corectă.

Cînd condiția (9.172) este îndeplinită (cu o eroare impusă apriori) $\tau > T_f$ (deci, $1 - e^{-\frac{\tau}{T_f}} > 1 - e^{-1}$) și se utilizează procedura din cazul $\tau > T_f$.

Dacă $\tau < T_f$, atunci procedura se finalizează folosindu-se valoarea contorizată $\tau = mT'$ și valoarea $\tilde{x}$, calculată din (9.171); rezultă:

$$\frac{\tau}{T_f} = \frac{mT'}{pT'} \simeq \tilde{x};\ p \simeq \left[\frac{m}{\tilde{x}}\right] \in \mathbb{N},\ T_f \simeq pT'. \tag{9.173}$$

OBSERVAȚIE. Pentru intervalul $x \in (0; 0, 5]$, eroarea relativă de aproximare a lui e^{-x}, din (9.169), este mai mică de 1,4%.

I.3. $\tau > T_f$. Dacă la momentul $t = t_x = 2\tau$ testul (9.172) este satisfăcut, atunci $\tau > T_f$; fie $\tau = mT'$, unde τ este cunoscută la $t = t_x$, și $T_f = pT'$, în care p este un număr întreg necunoscut, cu $p < m$. Se obține:

$$\frac{\tau}{T_f} = \frac{mT'}{pT'} = \frac{m}{p} = \frac{p + (m-p)}{p} = 1 + \frac{m-p}{p},\ \frac{m-p}{p} \in (0, 1]. \tag{9.174}$$

S-a considerat $\tau_{max} = 2T_f$, deci $\frac{m}{p} \leqslant 2$.

Se notează

$$x = \frac{m-p}{p} \in (0,\ 1]; \tag{9.175}$$

rezultă

$$e^{-\frac{\tau}{T_f}} = e^{-(1+x)} = e^{-1}e^{-x}. \tag{9.176}$$

Folosindu-se aproximarea (9.169) a lui e^{-x} și pentru $x \in (0, 1)$, cu parametrul c calculat ca și în cazul $\tau < T_f$, rezultă ecuația:

$$x^2 + 2x + 2\frac{ec - e - 1}{e(c-1)} = 0, \tag{9.177}$$

Deoarece în situația studiată τ este în mod sigur mai mare decît T_f, se obține $1 < c < \frac{7}{5}$, iar soluția ecuației (9.177) este:

$$\tilde{x} = -1 + \sqrt{\frac{e(1-c)+2}{e(c-1)}} \in (0, 1), \tag{9.178}$$

în care s-a notat $\tilde{x}$ la fel ca în (9.171), întrucît în decursul identificării se calculează o singură rădăcină.

Cunoscîndu-se $\tilde{x}$ și m, din relația (9.174) rezultă:

$$\tilde{x} \cong \frac{m-p}{p}; \quad p \simeq \left[\frac{m}{1+\tilde{x}}\right] \in \mathbb{N}; \quad T_f \simeq pT'. \tag{9.179}$$

În cazurile I.2 și I.3 apar erorile de cuantificare ale mărimilor T_f și τ, eroarea introdusă de funcția parte întreagă, eroarea de aproximare a funcției e^{-s} și eroarea rezultată de calculul rădăcinilor $\tilde{x}$. Sursele acestor erori sînt controlate prin alegerea perioadei de eșantionare a regimului de identificare T', cît mai mică și prin folosirea unor rutine matematice pentru calculul cît mai precis al radicalului care apare în determinarea lui $\tilde{x}$.

De remarcat că din momentul $t > 3\tau = 3mT'$ ieșirea procesului evoluează liber (la $u = 0$) pe toată durata t_c, corespunzătoare determinării soluției $\tilde{x}$ și parametrului p:

$$t^{\text{identificare}} \simeq 3\tau + t_c = 3mT' + t_c. \tag{9.180}$$

Procesele cu $T_f \gg t_c$ evoluează liber foarte puțin timp.

O organigramă deosebit de simplă a utilizării diverselor proceduri în funcție de cazurile prezentate este ilustrată în fig. 9.26.

Cazul II. $K_f \neq 1$. În această situație este necesară în prealabil identificarea lui K_f, folosindu-se de asemenea generarea unui răspuns indicial, lăsat — conform definiției — să evolueze asimptotic ($t \to \infty$).

Comenzile emise de RD și evoluția ieșirii procesului (aproximată cu cea a modelului) au aspectul din fig. 9.27.

Se consideră (momentan) cazul condițiilor inițiale nule, $u(0) = 0$ și $y(0) = 0$.

Semnalul de comandă, în treaptă, are amplitudinea $\lambda \in (0, 1]$, programabilă.

În etapa $(0, t_1)$ se determină, inerent, în timpul mort, $\tau = mT'$. Valoarea reală y_f^∞ este aceea începînd de la care $y_f(t)$ crește foarte încet în amplitudine (zona asimptotică $t \to \infty$); deci, $t_1 \simeq t_r$ (durata regimului tranzitoriu al răspunsului indicial). Se impune un test de forma:

$$|\, y_f(kT') - y_f((k-1)\,T')\,| \leqslant \text{valoarea dată apriori}, \tag{9.181}$$

unde mărimea respectivă este dependentă și de precizia reprezentării numerelor în format intern, în RD.

Cunoscîndu-se amplitudinea comenzii, λ, și valoarea măsurată, $y_f^\infty \in (0, 1)$, rezultă:

$$y_f^\infty = \lambda K_f; \quad K_f = \frac{y_f^\infty}{\lambda}. \tag{9.182}$$

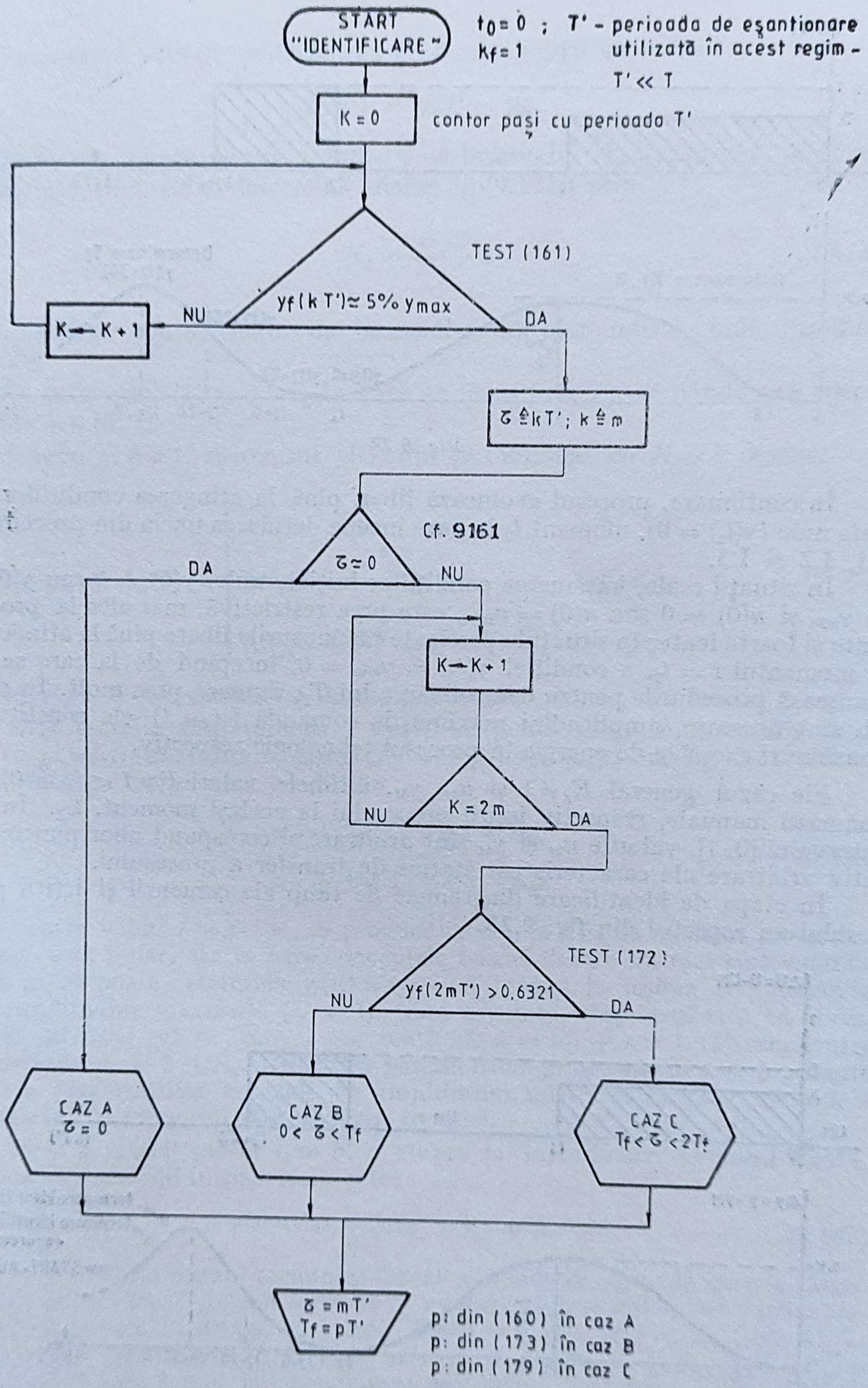

START "IDENTIFICARE"
$t_0 = 0$; $K_f = 1$
T' - perioada de eşantionare utilizată în acest regim - T' << T
K = 0
contor paşi cu perioada T'
TEST (161)
$y_f(k\,T') \simeq 5\%\, y_{max}$
NU
K ← K + 1
DA
$\tau \triangleq k\,T'$; $k \triangleq m$
Cf. 9161
$\tau \simeq 0$
DA
NU
K ← K + 1
K = 2 m
NU
DA
TEST (172)
$y_f(2mT') > 0,6321$
NU
DA
CAZ A
$\tau = 0$
CAZ B
$0 < \tau < T_f$
CAZ C
$T_f < \tau < 2T_f$
$\tau = mT'$
$T_f = pT'$
p: din (160) în caz A
p: din (173) în caz B
p: din (179) în caz C

Fig. 9.26

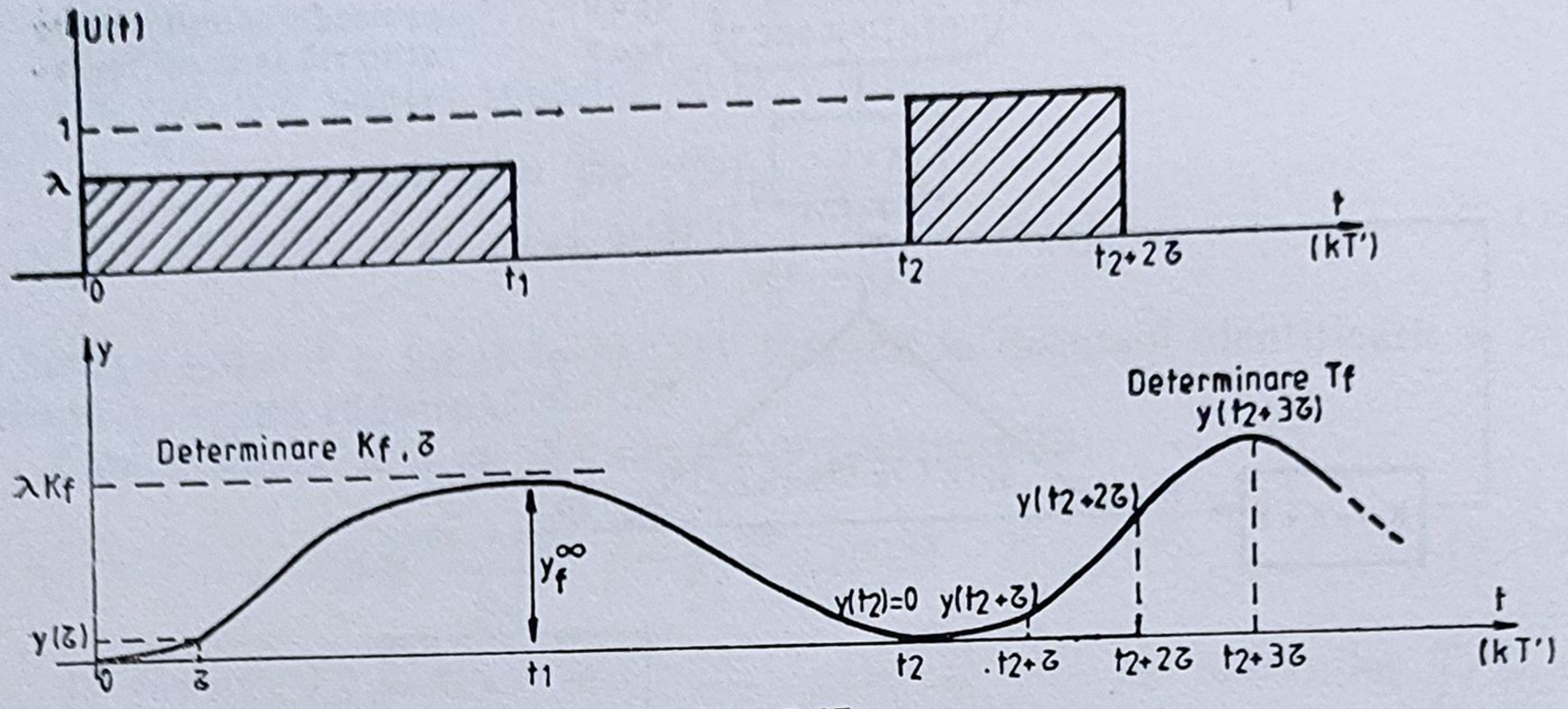


Fig. 9.27

În continuare, procesul evoluează liber, pînă la atingerea condițiilor inițiale nule ($y(t_2) = 0$), moment t_2 în care începe derularea uneia din procedurile I.1, I.2 și I.3.

În situații reale, impunerea condițiilor inițiale nule, $y(0) = 0$ sau $y(0) = y_{min}$ și $u(0) = 0$ sau $u(0) = u_{min}$, este prea restrictivă, mai ales la procese lente și foarte lente; în situațiile precizate răspunsurile libere pînă la atingerea, la momentul $t = t_2$, a condiției $y(t_2) = y_{min} = 0$, începînd de la care se declanșează procedurile pentru determinarea lui T_f, durează prea mult. În plus, nu sînt necesare, amplitudini maxime de comandă ($u = 1$) ele constituind consumuri excesive de energie în procesul tehnologic respectiv.

Fie cazul general $K_f \neq 1$ și u_M, y_M, ultimele valori (la $t < t_0 \triangleq 0$) ale comenzii manuale, respectiv ieșirii procesului la același moment, t_{-1}. În intervalul [0, 1], valorile u_M și y_M sînt arbitrare și corespund unor puncte relativ arbitrare ale caracteristicii statice de transfer a procesului.

În etapa de identificare diagramele de timp ale comenzii și ieșirii procesului au aspectul din fig. 9.28.

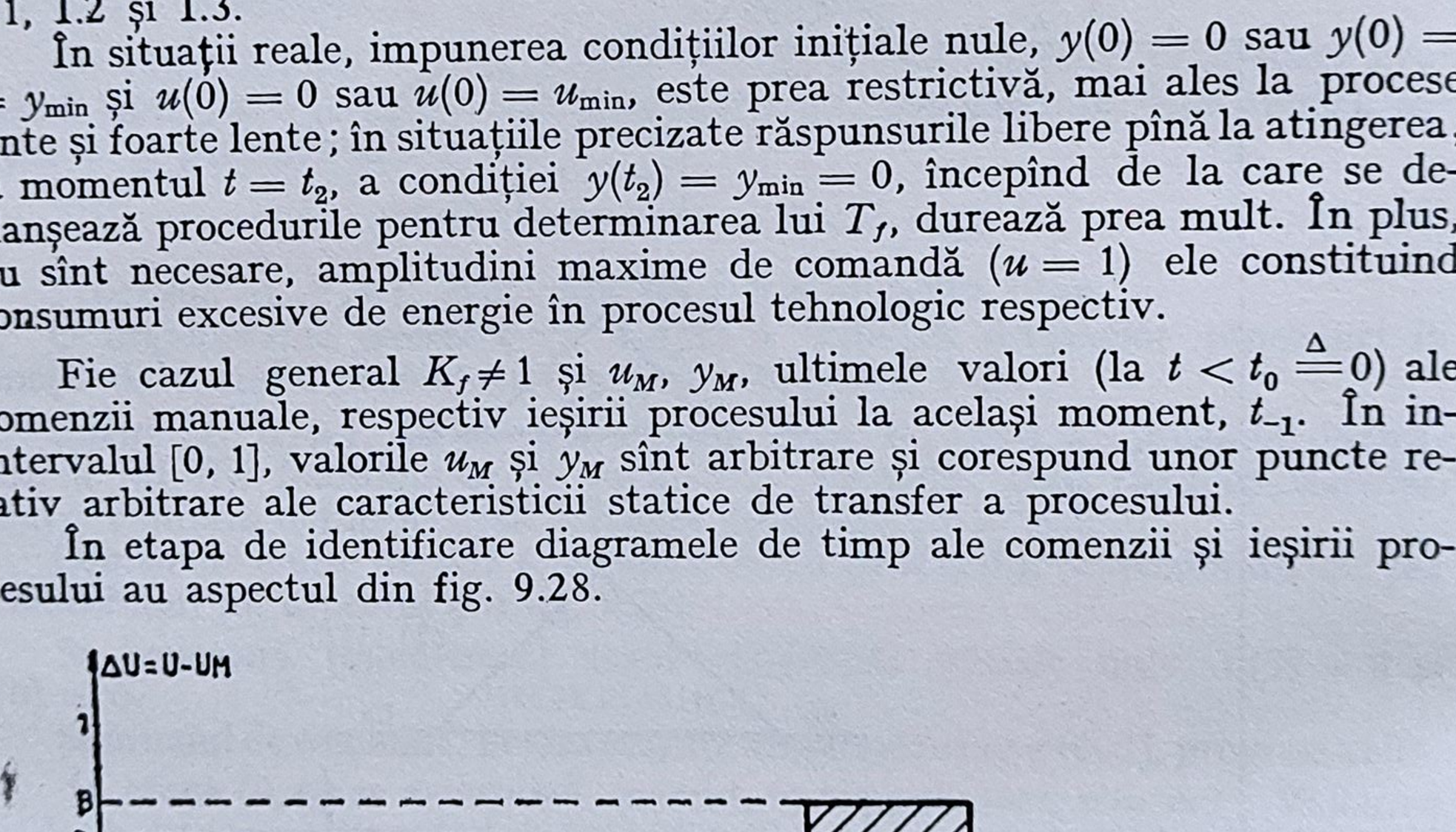


Fig. 9.28

În această situație pe ordonata graficului ieșirii va exista:

$$\Delta y_f(t) = y_f(t) - y_M. \tag{9.183}$$

Comanda are amplitudinea $\lambda \in (0, 1]$, pe intervalul (t_0, t_1), în care se identifică K_f și τ; deci, K_f se determină analog cu (9.182), prin

$$K_f = \frac{\Delta y_f^{\infty}}{\lambda}, \tag{9.184}$$

toate celelalte considerente, de la cazul condițiilor inițiale nule, rămînînd valabile.

În intervalul $[t_2, t_2 + 3\tau]$ în care se identifică T_f, comanda are amplitudinea $\beta \in (0, 1]$.

Pentru $\lambda, \beta \neq 1$, răspunsul $y(t)$, din (9.136), dar cu $K_f \neq 1$ devine:

$$y(t) - y_M = \Delta y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < \tau, \\ \beta K_f(1 - e^{-\frac{t-\tau}{T_f}}), & \tau \leqslant t \leqslant t_x + \tau, \\ \beta K_f(-e^{-\frac{t-\tau}{T_f}} + e^{-\frac{t-\tau-t_x}{T_f}}), & t > t_x + \tau, \end{cases} \tag{9.185}$$

în care $K_f = 1$ este considerat un caz particular.

Deși teoretic amplitudinea λ sau β se poate alege în intervalul $[0, 1]$ sau $(u_{\min}, u_{\max})$, în realitate, saltul $\Delta U = \lambda\eta(t)$ sau $\beta\eta(t)$ din fig. 9.28 trebuie să se facă cu respectarea condițiilor:

$$\begin{aligned} &u_M + \lambda \leqslant 1, \ \lambda \leqslant 1 - u_M, \\ &u_M + \beta \leqslant 1, \ \beta \leqslant 1 - u_M. \end{aligned} \tag{9.186}$$

Pentru valori $\lambda > 1 - u_M$ se produce saturarea EE, iar modelul procesului nu mai este liniar, caz în care conceptele teoriei liniare nu mai sînt valabile (deci nu se poate determina $y_f(t_1) \simeq y_f = \lambda K_f$); deși la ieșirea RD comanda are amplitudine maximală ($U = 1$), fiind saturată, răspunsul real va corespunde situației $y_f^{\infty} = \lambda K_f|_{u=1}$, cu toate că $u = u_M + \lambda > 1$. Parametrul c nu depinde de λ, β și K_f. Utilizarea parametrilor programabili λ și β permite crearea răspunsurilor indiciale de amplitudini mici, perturbarea minimă a procesului tehnologic și economisirea energiei.

Durata totală (de la $t_0 = 0$) a etapei la identificare, în cazul $K_f \neq 1$, cu sau fără condiții inițiale nule, este:

$$t^{\text{identificare}} = t_1 + (t_2 - t_1) + 3\tau + t_c, \tag{9.187}$$

unde t_1 reprezintă durata regimului tranzitoriu indicial $[t_0, t_1]$ în care se calculează τ și K_f; $(t_2 - t_1)$ — un interval de evoluție a procesului, sub vechea comandă u_M, pînă la atingerea valorii $\Delta y(t_2) = 0$ sau $y(t_2) = y_M$ (fig. 9.28); 3τ — durata intervalului $[t_2, t_2 + 3\tau]$ în care se preiau y_{f_1} și y_{f_2}; $y_1 \simeq y_f(t_2 + 2\tau)$; $y_2 \simeq y_f(t_2 + 3\tau)$, iar t_c — durata calculelor, cînd $t > t_2 + 3\tau$, pînă la determinarea lui T_f (t_c este practic neglijabilă în raport cu celelalte durate.

Durata etapelor de identificare și acordare este:

$$t^{\text{identificare + acordare}} = t^{\text{identificare}} + t^{\text{acordare}}, \tag{9.188}$$

unde t^{acordare} este timpul de calcul, cu începere de $t = t_2 + 3\tau + t_c$, în care se acordează algoritmul de reglare, cunoscîndu-se relațiile corespunzătoare și parametrii procesului.

Dacă, în fig. 9.28, punctul $P(t_2 + 3\tau + t_c) = P(t^{\text{identificare}})$, iar $S = S(t^{\text{identificare}} + t^{\text{acordare}})$, atunci în punctul S se poate cupla RD în regim A, fie de către operatorul RD, fie în mod automat.

În funcție de algoritmul de reglare (cvasicontinuu sau necvasicontinuu) se utilizează modelul continuu identificat sau cel discret.

Modelul discret, obținut din cel continuu $H'_f(s) = \dfrac{K_f\, e^{-\tau s}}{1 + T_f s}$ cu extrapolator de ordin zero, este (capitolul 2):

$$H_f(z) = (1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{H'_f(s)}{s}\right\} = \frac{K_f(1-b)}{z-b}\, z^{-d}, \tag{9.189}$$

unde

$$b = e^{-\frac{T}{T_f}};\quad \frac{T}{T_f} \triangleq \gamma;\ d = \left[\frac{\tau}{T}\right];\quad \widetilde{K}_f = K_f(1-b).$$

Perioada de eșantionare se alege cunoscîndu-se T_f estimat (v. capitolul 2).

Deoarece, în RD, o rutină de calcul exact al exponențialei consumă memorie, se aproximează b tot prin (9.169), adică

$$b = e^{-} \simeq \frac{1}{1 + \gamma + \dfrac{\gamma^2}{2}}.$$

Alegîndu-se $\gamma \leqslant 0{,}5$, eroarea relativă de aproximare pentru $e^{-\gamma}$ este mai mică de 1,4%. Totodată, dacă $\gamma \ll 1$, precizia aproximării crește.

Deoarece se poate alege $T = \dfrac{T_f}{2}$, ca valoare maximă, sau $\gamma = 0{,}5$, eroarea relativă maximă nu depășește 1,4% pentru orice valoare a raportului γ, micșorîndu-se mult pentru $\gamma \leqslant 0{,}2$.

Expresia $1 + \gamma + \gamma\gamma 2^{-1}$ nu necesită decît o singură multiplicare $\gamma\gamma$ în format intern binar, înmulțirea cu 2^{-1} efectuîndu-se prin simpla deplasare a virgulei spre stînga cu un rang binar (în formatul natural).

Numărul total de multiplicări necesare pentru obținerea modelului discret, $H_f(z) = \dfrac{K_f(1-b)}{z-b}$, din cel continuu, $H'_f(s) = K_f \dfrac{e^{-\tau s}}{1 + T_f s}$, este egal cu doi, $\gamma\gamma$ și $K_f(1-b)$, divizările fiind în număr de trei :

$$d = \left[\frac{\tau}{T}\right] = \left[\frac{mT'}{qT'}\right] = \left[\frac{m}{q}\right],\ \gamma = \frac{T}{T_f} = \frac{qT'}{pT'} = \frac{q}{p},\ 1/(1+\gamma+\gamma^2 2^{-1}),\ d,\ m,\ p,\ q \in \mathbb{N},$$

unde m se determină experimental, q se fixează apriori, iar p se calculează.

Perioada $T = qT'$ se alege și din considerentul $\tau - \left[\frac{\tau}{T}\right] T \leqslant \frac{1}{2}\tau$. De exemplu, pentru $T_f = 10$ s, $\tau = 0{,}6$ s, $T = 0{,}1T_f = 1$ s, rezultă $d = \left[\frac{\tau}{T}\right] = 0$ și $\tau - \left[\frac{\tau}{T}\right] T = 0,6 = \tau$; deci, acest timp mort nu este inclus în modelul discret. Prin micșorarea perioadei T la valoarea 0,5 s, se obține $d = \left[\frac{0{,}6}{0{,}5}\right] = 1 \neq 0$ și $\tau - \left[\frac{\tau}{T}\right] T = 0{,}6 - 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}1 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}6$, rezultat mult mai apropiat de realitate.

Dacă, pentru mărirea preciziei modelului discret, se ține seama și de timpul mort fracționat $\tau - \left[\frac{\tau}{T}\right] < T$, atunci o modalitate de luare în considerare a acestuia este următoarea: se consideră inclus în timpul mort global discret d, al modelului și timpul mort egal cu perioada T, introdus de extrapolatorul de ordinul zero; rezultă $\tau = (d-1)\,T + \alpha T$, cu $\alpha \in [0, 1)$ și $(d-1) \in \mathbf{N}$. În cazul $\tau = 0$ se obține $d = 1$. Timpul mort τ se mai scrie $\tau = dT - T + \alpha T = dT - \beta T$, $\beta \triangleq 1 - \alpha \in (0, 1]$. Modelul continuu este $H'_f(s) = K_f \frac{e^{-\tau s}}{1 + T_f s} = K_f \frac{e^{-dTs}\, e^{\beta Ts}}{1 + T_f s}$, iar modelul discret, cu extrapolator de ordinul zero, $H_f(z) = z^{-d}(1 - z^{-1})\, \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{\beta Ts}}{s(1 + T_f s}\right\} = z^{-d} K_f \frac{(1-a) + (a-b)\, z^{-1}}{1 - bz^{-1}}$ unde $a \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}$ și $b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}$. Pentru $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ rezultă $a = b$, regăsindu-se modelul discret inițial. Atunci cînd $\alpha \in (0, 1)$, zeroul modelului discret obținut mai sus este $z_1 = \frac{a-b}{1-a}$. Modelul este de fază. minimă dacă $|z_1| < 1$ sau $1 + e^{-\frac{T}{T_f}} < 2e^{-\beta \frac{T}{T_f}}$. În cazul numeric uzual, $T = 0{,}1\, T_f$, rezultă $|z_1| < 1$ pentru $\alpha < 0{,}513$. În general, utilizarea acestui model este condiționată de inegalitatea $|z_1| < 1$, ceea ce conduce la alte restricții în alegerea perioadei de eșantionare, T.

9.7. CORECȚII ÎN PSEUDOFRECVENȚE CU ALGORITMI PID DISCREȚI

9.7.1. Corecții și compensare prin anulare în pseudofrecvențe relative cu algoritmi PID discreți cu interinfluență nulă

Fie următoarele ipoteze preliminare:

— se consideră procese descrise prin modele de ordinul II, deci cu două constante de timp dominante, T_{f_1} și T_{f_2}. Este vorba de modelul — apreciat astfel — la joasă frecvență al părții fixate continue, fără extrapolatorul de ordin zero;

— conform relației (4.51), perioada de eșantionare, T, se alege mare, cu restricția:

$$T \leqslant \frac{1}{2} \min\{T_{f_1}, T_{f_2}\}; \tag{9.190}$$

— dacă perioada T separă net scalele de timp ale procesului, atunci, prin alegerea perioadei T, ca și în (9.190), modelul discret, în pseudofrecvențe relative, cu extrapolator de ordinul zero, înglobat, are aspectul:

$$H_f(w) = (1 - w)\ H'_f(s)\Big|_{s = \frac{2}{T} w}. \tag{9.191a}$$

Algoritmul PID *discret*

Prin analogie cu algoritmul continuu (9.42), dar cu filtrarea erorii, se consideră:

$$H_{\text{PID-F}}(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) F'(s). \tag{9.191b}$$

Conform [19], algoritmul PID discret este descris în pseudofrecvențe relative, w, prin intermediul relației:

$$H_{\text{PID-F}}(w) = K_R\left(1 + \frac{K_\text{I}}{w} + K_\text{D} w\right) F(w), \tag{9.192}$$

unde

$$K_\text{I} \triangleq \frac{T}{2T_i} \text{ și } K_\text{D} \triangleq \frac{2T_d}{T}.$$

Atît în expresia (9.191b), cît și în (9.192) filtrele de ordinul 1, $F'(s)$, respectiv $F(w)$, au un efect dinamic neglijabil, dar sînt necesare pentru îndeplinirea condiției de realizabilitate fizică a algoritmilor de reglare. Făcînd abstracție de aceste filtre, similitudinea celor două modele din expresiile (9.191b) și (9.192) este mult mai profundă, în sensul că ele se implementează în RD sub același aspect discret. Într-adevăr, considerînd doar $H_{\text{PID}}(w)$ din (9.192) definit prin:

$$H_{\text{PID}}(w) = K_R\left(1 + \frac{K_\text{I}}{w} + K_\text{D} w\right) \tag{9.193}$$

și efectuînd transformarea $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$, se obține:

$$H_{\text{PID}}(z^{-1}) = K_R\left(1 + K_\text{I} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} + K_\text{D} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right). \tag{9.194}$$

Se consideră algoritmul continuu $H_{\text{PID}}(s) = K_R\left(1 + \dfrac{1}{T_i s}\ T_j s\right)$ care — modularizat și discretizat prin *metoda trapezelor* — conduce la relația:

$$u_k = K_R(u_k^\text{P} + u_k^\text{I} + u_k^\text{D}),$$

unde:

$$u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k,$$

$$u_k^{\mathrm{I}} = u_{k-1}^{\mathrm{I}} + \frac{T}{2T_i}(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) \text{ sau } u_k^{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \varepsilon_k, \tag{9.195}$$

$$u_k^{\mathrm{D}} = -u_{k-1}^{\mathrm{D}} + \frac{2T_d}{T}(\varepsilon_k - \varepsilon_{k-1}) \text{ sau } u_k^{\mathrm{D}} = K_{\mathrm{D}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \varepsilon_k,$$

deci, $u_k = K_R\left(1 + K_{\mathrm{I}} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + K_{\mathrm{D}} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) \varepsilon_k$, rezultînd aceeaşi funcţie de transfer discretă, $H_{\mathrm{PID}}(z^{-1})$, din (9.194).

Descrierea metodei de compensare prin anulare

Pentru a putea utiliza metoda completării prin anulare, algoritmul din (9.193) se scrie sub forma:

$$H_{\mathrm{PID}}(w) = K_R K_{\mathrm{I}} \frac{\frac{K_{\mathrm{D}}}{K_{\mathrm{I}}} w^2 + \frac{1}{K_{\mathrm{I}}} w + 1}{w}. \tag{9.196}$$

Se folosesc notaţiile:

$$T_x = \sqrt{\frac{K_{\mathrm{D}}}{K_{\mathrm{I}}}} \text{ şi } \xi_x = \frac{1}{2\sqrt{K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{D}}}}. \tag{9.197}$$

Ecuaţia zerourilor lui $H_{\mathrm{PID}}(w)$ din (9.196) este:

$$T_x^2 w^2 + 2\xi_x T_x w + 1 = 0, \tag{9.198}$$

cu zerourile:

$$w_{1,2} = \frac{-\xi_x \pm \sqrt{\xi_x^2 - 1}}{T_x}. \tag{9.199}$$

Metoda compensării prin anulare se poate utiliza dacă $w_{1,2} \in \mathbb{R}$ sau

$$\xi_x > 1. \tag{9.200}$$

Ţinîndu-se seama de relaţii (9.197) şi (9.200), rezultă condiţia:

$$K_{\mathrm{I}} K_{\mathrm{D}} < \frac{1}{4}. \tag{9.201}$$

Dacă $w_{1,2}$ sînt zerourile din (9.199), notîndu-se:

$$T_{w_1} = \frac{1}{|w_1|} \text{ şi } T_{w_2} = \frac{1}{|w_2|}, \tag{9.202}$$

unde $w_1 < 0$ şi $w_2 < 0$, algoritmul din (9.196) se poate scrie sub forma:

$$H_{\mathrm{PID}}(w) = K_R K_{\mathrm{I}} \frac{(T_{w_2} w + 1)(T_{w_1} w + 1)}{w}, \tag{9.203}$$

condiţia (9.201) fiind îndeplinită.

Dacă partea fixată discretă $H_f(w)$ are constantele (în domeniul w) $T_{w_{f_2}}$ și $T_{w_{f_3}}$, cu $T_{w_{f_1}} < T_{w_{f_2}}$, atunci condiția de anulare este:

$$T_{w_1} = T_{w_{f_1}} \text{ și } T_{w_2} = T_{w_{f_2}}. \tag{9.204}$$

Pentru determinarea parametrilor K_I și K_D se notează:

$$\lambda = \frac{T_{w_{f_2}}}{T_{w_{f_1}}} > 1, \tag{9.205}$$

atunci, conform relațiilor (9.199) și (9.202), cu condiția (9.204), rezultă:

$$\xi_x = \frac{1+\lambda}{2\sqrt{\lambda}} \text{ și } T_x = \sqrt{T_{w_{f_1}} T_{w_{f_2}}} \tag{9.206}$$

Din (9.197) se obțin:

$$K_I = \frac{1}{2T_x\xi_x} \text{ și } K_D = \frac{T_x}{2\xi_x}. \tag{9.207}$$

Descrierea metodei de corecție în pseudofrecvențe

Din punct de vedere procedural metoda este identică cu cea din cazul continuu.

Corecția cu algoritmi PID continui, factorizați, folosindu-se diagramele Bode, constă în utilizarea mai multor procedee, care se aplică similar și în cazul caracteristicilor de pseudofrecvență [8]:

— coborîrea caracteristicii $|H_f(j\omega_w)|^{[dB]}$, $\omega_w = \text{Im}\, w$, și prin aceasta deplasarea spre stînga a pulsației de tăiere, ω_w^t, ducînd la creșterea marginii de fază;

— ridicarea caracteristicii de fază, $\arg H_f(j\omega_w)$, intenționîndu-se mărirea marginii de fază cu menținerea aproximativă a pulsației, inițiale de tăiere;

— combinarea iterativă a primelor două proceduri.

Parametrul K_R se determină din condițiile impuse marginii de fază, respectiv de amplitudine a sistemului deschis, care trebuie să fie cuprinse în limitele de valori $m\varphi = 20° \div 60°$, respectiv $m_A = 10 \div 20$ dB [8].

OBSERVAȚIE. Analogia procedurală directă cu cazul continuu nu provine din ipoteza de cvasicontinuitate a algoritmului de reglare din (9.192), (9.194), perioada de eșantionare T putînd fi aleasă mult mai mare decît cea din [10], [11], fapt ce conferă un aspect tipic discret algoritmului (9.194).

Utilizarea compensatoarelor în domeniul w poate să nu aibă nici o legătură semnificativă directă cu avansul, întîrzierea, marginea de fază sau de amplitudine din domeniul s[30].

Scopul analogiei procedurale cu cazul continuu constă în utilizarea cunoștințelor asupra compensării și corecției în frecvență, în ceea ce privește locul de transfer al părții fixate.

Exemplu. Se consideră modelul la JF al părții fixate continue:

$$H_f'(s) = \frac{1}{(2s + 1)\,(3s + 1)}. \tag{9.208}$$

Modelul discret în pseudofrecvențe relative, cu extrapolator de ordin zero înglobat, al părții fixate este:

$$H_f(w) \simeq (1 - w)\, H_f'(s)\,|_{s=2w}. \tag{9.209}$$

Dacă $T_{f_1} = 2$ s și $T_{f_2} = 3$ s, atunci — conform (9.190) — se alege $T = 1$ s $= \frac{1}{2}$ min $\{2, 3\}$ s, rezultînd:

$$H_f(w) = \frac{1 - w}{(4w + 1)\,(6w + 1)}, \tag{9.210}$$

unde $T_{w_{f_1}} = 4$, $T_{w_{f_2}} = 6$ și $\lambda = \frac{6}{4} = 1{,}5$.

Conform relației (9.206) se obțin:

$$\xi_x = 1{,}02062 \text{ și } T_x = 4{,}89898.$$

Din (9.207) rezultă parametrii:

$$K_I = 0{,}1 \text{ și } K_D = 2{,}4. \tag{9.211}$$

Deoarece $K_I K_D = 0{,}24 < \frac{1}{4}$, din (9.201) rezultă posibilitatea compensării constantelor $T_{w_{f_1}}$ și $T_{w_{f_2}}$ cu constantele RA, T_{w_1} și T_{w_2}, din relațiile (9.204) și (9.202).

Sistemul compensat $H(w) = H_{PID}(w)\, H_f(w)$ este:

$$H(w) = K_R K_I \frac{1 - w}{w}, \quad K_R K_I \triangleq K. \tag{9.212}$$

Datorită simplității modelului $H(w)$ din relația precedentă, nu se recurge la trasarea caracteristicilor de frecvență ($\omega_w = \text{Im } w$).

Cu notația din (9.212), pseudofrecvența de tăiere se obține din $|H(j\omega_w)| = 1$ sau

$$\omega_w^t = \frac{K}{\sqrt{1 - K^2}}, \quad 0 < K < 1. \tag{9.213}$$

Faza sistemului compensat este:

$$\arg H(j\omega_w) \triangleq \varphi(j\omega_w) = -90° - \text{arc tg } \omega_w. \tag{9.214}$$

Dacă m_φ este marginea de fază impusă apriori, atunci fie cazurile $m_\varphi = +60°$ și $m_\varphi = +40°$.

În primul caz, din condiția:

$$\varphi(\omega_w^t) = -(180° - m_\varphi) \tag{9.215}$$

sau $\varphi(\omega_w^t) = -120°$, cu ω_w^t din (2.213), rezultă:

$$-90° - \text{arc tg}\frac{K}{\sqrt{1-K^2}} = -120°, \tag{9.216}$$

de unde se obține:

$$K = 0{,}5. \tag{9.217}$$

În al doilea caz, din condiția $\varphi(\omega_w^t) = -140°$ rezultă:

$$K = 0{,}76604. \tag{9.218}$$

Din relațiile (9.212) și (9.217) se obține:

$$K_R^A = \frac{K}{K_I} = 5 \text{ (cazul } m_\varphi = 60°), \tag{9.219}$$

iar din (9.212) și (9.218),

$$K_R^B = 7{,}66043 \text{ (cazul } m_\varphi = 40°). \tag{9.220}$$

Bucla închisă discretă s-a simulat cu algoritmul de reglare avînd aspectul modularizat din relația (9.194), în care mărimea ε_k se substituie prin ε_k^*, definită prin expresia:

$$\varepsilon_k^* = F(z^{-1})\,\varepsilon_k, \tag{9.221}$$

unde $F(z^{-1}) = \dfrac{c_f}{1-(1-c_f)\,z^{-1}}$ și $1 > c_f \geqslant 0{,}95$.

S-au considerat condiții inițiale nule, mărimea de referință fiind de tip treaptă unitate, $R(z^{-1}) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$.

Dacă $m_\varphi = +60°$ evoluția răspunsului indicial este ilustrată în fig. 9.29, iar dacă $m_\varphi = +40°$, în fig. 9.30.

La simulare, atît RA, descris în (9.192) prin $H_{\text{PID-F}}(w)$, cît și $H_f(w)$ din (9.210) necesită transformarea $w = \dfrac{z-1}{z+1}$.

Rezultă:

$$H_f(z^{-1}) = \frac{0{,}05714(z^{-1}+z^{-2})}{1-1{,}31429z^{-1}+0{,}42857z^{-2}} \tag{9.222}$$

și

$$H_R(z^{-1}) \triangleq H_{\text{PID-F}}(z^{-1}) = K_R\left(1+K_I\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}+K_D\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\frac{c_f}{1-(1-c_f)\,z^{-1}}.$$

Pentru $c_f = 0{,}95$, $K_I = 0{,}1$, $K_D = 2{,}4$ și $K_R = 7{,}6604$ (cînd $m_\varphi = +40°$), din expresia (9.220) rezultă:

$$H_R^B(z^{-1}) = \frac{25{,}4709 - 33{,}4761z^{-1} + 10{,}9161z^{-2}}{1-0{,}05z^{-1}-z^{-2}+0{,}05z^{-3}}. \tag{9.223}$$

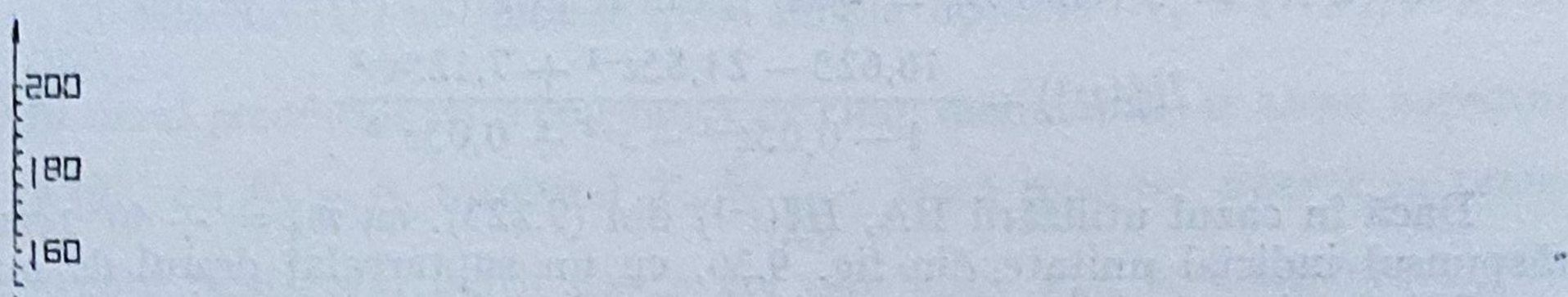


Fig. 9.29

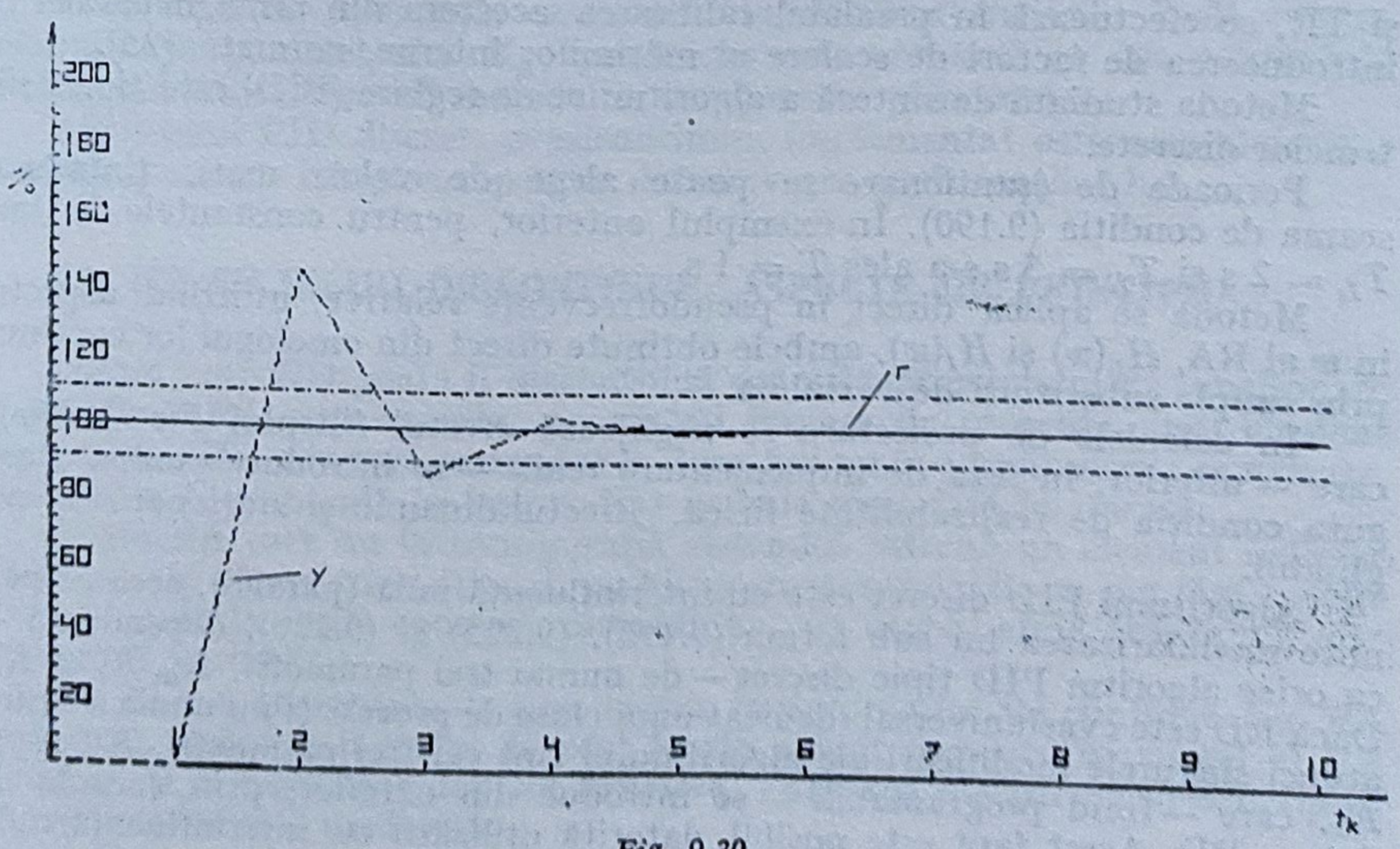


Fig. 9.30

Pentru $K_R = 5$ (cînd $m_\varphi = +60°$), din relația (9,219) se obține:

$$H_R^A(z^{-1}) = \frac{16{,}625 - 21{,}85z^{-1} + 7{,}125z^{-2}}{1 - 0{,}05z^{-1} - z^{-2} + 0{,}05z^{-3}}. \tag{9.224}$$

Dacă în cazul utilizării RA, $H_R^B(z^{-1})$ din (9.223), cu $m_\varphi = +40°$ rezultă răspunsul indicial unitate din fig. 9.30, cu un suprareglaj destul de mare. $\sigma \simeq 42\%$, în situația folosirii RA, $H_R^A(z^{-1})$ din (9.224), se obține un suprareglaj foarte mic, $\sigma < 5\%$ (fig. 9.29).

În figurile 9.29 și 9.30, bucla automată se închide la $k = 1$ din motive de simulare. Referința are saltul în treaptă unitate la $k = 1$, conform notației de pe axa absciselor (timp discret = k).

Implementarea finală. Deși pentru simulare s-a folosit $H_R(z^{-1})$ din relația (9.223) sau (9.224), în cazul real algoritmul PID se implementează cu aspectul modularizat din (9.195). Pentru $m_\varphi = +60°$, acesta devine:

$$\text{RA:} \begin{cases} u_k = 5(u_k^{\mathrm{P}} + u_k^{\mathrm{I}} + u_k^{\mathrm{D}}); \\ u_k^{\mathrm{P}} = \varepsilon_k^*; \\ u_k^{\mathrm{I}} = u_{k-1}^{\mathrm{I}} + 0{,}1(\varepsilon_k^* + \varepsilon_{k-1}^*); \\ u_k^{\mathrm{D}} = -u_{k-1}^{\mathrm{D}} + 2{,}4(\varepsilon_k^* - \varepsilon_{k-1}). \end{cases} \tag{9.225}$$

Filtrul

$$\varepsilon_k^* = 0{,}05\,\varepsilon_{k-1}^* + 0{,}95\,\varepsilon_k. \tag{9.226}$$

Aspectul modularizat din relațiile (9.225) și (9.226) permite luarea în considerare a condițiilor inițiale nenule, $y_0 \neq 0$ și $u_0 \neq 0$, care există întotdeauna la trecerea din regim manual în regim automat.

Inițializarea algoritmilor (9.225) și (9.226) este prezentată în § 9.3.

Pentru evitarea saturării interne a mărimilor u și y (în RD), cît și a EE și TR, se efectuează în prealabil calibrarea acestora din urmă, în paralel cu introducerea de factori de scalare ai mărimilor interne, normate. [25].

Metoda studiată de sinteză a algoritmilor de reglare (PID) este tipică sistemelor discrete.

Perioada de eșantionare se poate alege de valori mari, ținîndu-se seama de condiția (9.190). În exemplul anterior, pentru constantele de timp $T_{f_1} = 2$ s și $T_{f_2} = 3$ s s-a ales $T = 1$ s.

Metoda se aplică direct în pseudofrecvențe relative, utilizînd aspectul în w al RA, $H_R(w)$ și $H_f(w)$, ambele obținute direct din omologul lor continuu prin simple substituiri de variabilă.

În calculele de proiectare se neglijează efectul filtrului $F(z^{-1}), F(w))$, care — ulterior, în faza de implementare reală — se introduce pentru a asigura condiția de realizabilitate fizică. Efectul dinamic și staționar este neglijabil.

Algoritmul PID discret este cu interinfluență nulă (paralel), ceea ce permite modularizarea lui sub forma (9.195), (9.225) și (9.226), dependentă — ca orice algoritm PID tipic discret — de numai trei parametri, K_R, K_I și K_D. Dacă RD este cvasiuniversal (dedicat unor clase de procese și nu unuia singur), atunci singurele modificări ale algoritmului sînt cei trei parametri, K_R, K_I și K_D, care — fiind programabili — se introduc din exterior, prin consola de date a RD. Acest fapt este posibil datorită utilizării cu interinfluență nulă

a tipului studiat de algoritm PID discret, caz în care diversele module (programabil selecționate) se folosesc prin simpla opțiune $K_D = 0$ (PI); $K_I = 0$ (PD).

În cazul proceselor cu o constantă de timp dominantă, se alege aspectul din (9.192) cu $K_D = 0$, rezultînd $T_w \triangleq \frac{1}{K_I}$. Dacă modelul discret în pseudofrecvențe relative al părții fixate are constanta T_{wf}, se consideră $T_w = T_{wf}$ sau $K_I \triangleq \frac{1}{T_{wf}}$, iar K_R se determină ca în exemplul numeric anterior. Practic, procedura de determinare a lui K_R nu depinde de tipul configurației P–I–D).

9.7.2. Corecția și compensarea în frecvență cu algoritmi PID discreți, cvasicontinui, cu interinfluență nenulă

Algoritmul PID continuu cu interinfluență nenulă este de forma:

$$H_{PID-F}(s) = K_R \frac{(1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s(1 + \alpha T_d s)}, \quad \alpha = 0{,}1 \ldots 0{,}2.$$

Impunînd ipoteza de cvasicontinuitate din (9.36), algoritmul PID discret cvasicontinuu obținut prin discretizarea algoritmului continuu (9.58) este descris în (9.59).

Acordarea algoritmului PID discret din relația (9.59) se face folosindu-se exclusiv aspectul algoritmului continuu din (9.58). Metodologia de acordare include următoarele două etape:

– compensarea constantelor principale ale părții fixate, similar cu (9.204):

$$T_i = T_{f_2},\ T_d = T_{f_1} < T_{f_2};$$

– corecția în frecvență, ω, utilizîndu-se caracteristicile Bode pentru determinarea parametrului K_R; procedura este similară cu cea prezentată atunci cînd a fost descrisă metoda de compensare prin anulare.

Algoritmul PID discret, cvasicontinuu, implementat este nemodularizat și necesită calcule laborioase pentru definitivarea coeficienților lui.

9.8. RD CU IEȘIRI DISCONTINUE. ASPECTE DE PRINCIPIU

Ieșirea unui RD poate fi discontinuă datorită principiului de funcționare (neliniar) al RA și, respectiv, necesității impuse de prezența unui element de execuție, EE, care este comandat în durată și nu în amplitudine; ca urmare, informația de comandă la ieșirea RD trebuie modulată în durată.

Toate RA care au în configurația sistemică internă un element neliniar static de tip bi sau tripozițional, cu histerezis controlabil, cu sau fără reacție internă, emit la ieșiri comenzi discontinue, de amplitudine constantă, dar de durată variabilă.

RA bi sau tripoziționale s-au impus în automatizările continue (cu RA analogice), datorită prețului de cost foarte scăzut comparativ cu cel al RA continuu și a simplității lor constructive. Calitatea reglării cu aceste tipuri de regulatoare este mediocră.

Din însuși principiul de funcționare, parametrul reglat cu aceste RA are permanent oscilații în jurul valorii nominale, într-o bandă admisă; regimul staționar propriu-zis nu este atins nici în absența completă a perturbațiilor externe, nici în absența celor parametrice [6].

În plus, dacă se aplică reacții interne de corecție de tip FTJ (elemente de întîrziere cu una sau două constante de timp), funcția de transfer a RA nu este completă din punct de vedere sistemic, ea completîndu-se prin prezența, de regulă, a unui EE de tip integrator (motor) cu constante de timp bine precizate apriori prin datele de catalog. Există deci o dependență restrictivă a utilizării acestui tip de RA, numai cu un anumit tip de element de execuție, fără ca orice altă modificare a EE să valideze parametrii de acordare prescriși de proiectant. În cazul RA bi sau tripoziționale, cu reacții dinamice interne, numărul parametrilor de acordare crește, din care motiv acordarea devine dificilă comparativ cu cea a RA-PID cu ieșire continuă. (Există mărimile K_R, T_i și T_d, la care se adaugă parametrii caracteristicii cu histerezis bi sau tripozițională).

Eroarea staționară nulă nu se poate realiza (la $t \to \infty$) decît completîndu-se funcția de transfer a RA (de regulă PD sau PD^2) cu un EE de tip integrator.

Dezavantajele menționate nu recomandă acest tip de algoritm la implementarea în RD monocanal. Avantajul prețului de cost și al simplității din cazul analogic nu se mai menține și în cazul digital, unde structura *hardware* și *software* a RD este aproximativ invariantă pentru clasa algoritmilor bi sau tripoziționali și PID. Cu alte cuvinte, în prezent, prețul de cost al unui RD monocanal este suficient de ridicat pentru a nu îl dedica reglării cu cei mai elementari și puțin performanți algoritmi de reglare existenți.

Dacă însă, în anumite aplicații industriale cu RD multicanal, unul sau mai mulți parametri reglați nu sînt pretențioși din punctul de vedere al calității reglării lor, atunci se pot implementa unele bucle automate (discrete) cu algoritmi bi sau tripoziționali (cu sau fără reacții dinamice interne).

În ceea ce privește elementele de execuție, menționăm faptul că în numeroase aplicații industriale se folosesc EE care necesită a fi comandate prin mărimi discontinue.

9.8.1. **Elemente de execuție**

Elementul de execuție este constituit din două module distincte (fig. 9.31). În figura menționată u reprezintă comanda furnizată de RD, de regulă semnal, unificat, m — mărimea de execuție (acționare) propriu-zisă, iar x — mărimea intermediară.

Modulul E_1 constituie partea motoare sau de acționare a EE, furnizînd mărimea intermediară x, de natură mecanică. EE poate fi realizat pe cale electrică, pneumatică sau hidraulică.

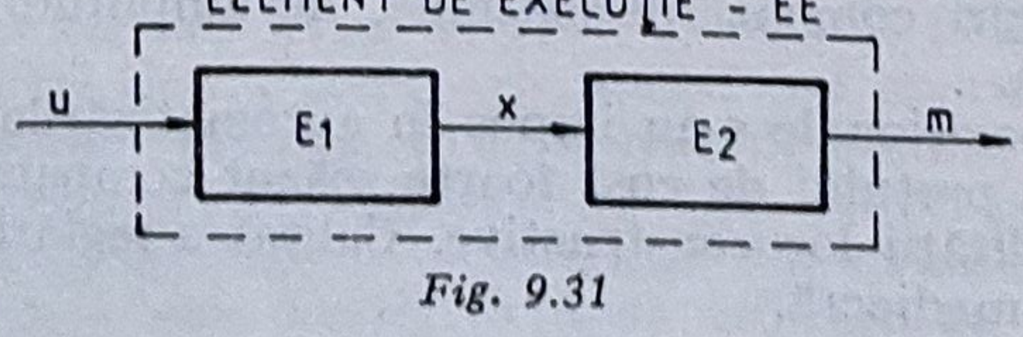


Fig. 9.31

Există EE statice, la care nu se poate evidenția mărimea intermediară, x; asemenea elemente de execuție nu mai necesită conversii de tip energetic, ci doar o adaptare de putere (cum sînt rezistențele electrice și bobinele de inducție).

În cazul cînd RA este de tip electronic, iar EE de tip pneumatic sau hidraulic, între RA și EE se intercalează convertoare electropneumatice sau electrohidraulice. Din punct de vedere sistemic, convertoarele amintite sînt considerate elemente liniare statice (cu dinamică neglijabilă în raport cu dinamica buclei automate).

Modulele E_1 realizate pe bază electrică sînt de regulă motoare de c.c. sau c.a., relee electromagnetice, relee statice etc. Cele elaborate pe bază hidraulică utilizează energia hidraulică a fluidului de lucru (ulei sub presiune).

În funcție de tipul modulului E_1, electric sau hidraulic, există acționări hidraulice și, respectiv, electrice.

Acționările hidraulice au următoarele avantaje [6]: conversie directă a energiei hidraulice în energie mecanică, constante de timp foarte mici la puteri de acționare mari, posibilități de întrebuințare în medii explozive ș.a. Cînd RD comandă astfel de EE, se folosesc convertoare electrohidraulice.

Dezavantajele acționării hidraulice sînt în principal legate de prezența conductelor hidraulice și necesitatea pompelor pentru acționarea continuă, sub înaltă presiune, a fluidului de lucru, cît și de precizia mică de lucru.

Acționările electrice se realizează uzual prin:

- relee statice sau electromagnetice și electroventile; asemenea dispozitive nu au decît două poziții, EE fiind de tip „pornit/oprit". Din punct de vedere dinamic, timpii de anclanșare sînt neglijabili. Informația de comandă destinată reglării este conținută în durata stărilor „închis" sau „deschis";
- motoare de c.a. bifazate, utilizate pentru comenzi discontinue, de putere redusă. Se caracterizează prin puteri maximale mai mici sau egale cu 1 kW și un randament destul de scăzut. Motoarele bifazate utilizate în automatizări au caracteristici constructive speciale, care le conferă timpi de răspuns foarte mici. Avantajele acestor motoare sînt legate de simplitatea schemelor de comandă și de robustețea lor;
- motoare de c.a., folosite intens în automatizări, prin utilizarea variatoarelor și chopperelor. Aceste motoare fac obiectul acționărilor electrice reglabile;
- motoare „pas cu pas", folosite în special datorită preciziei obținute, cît și simplității interfeței de ieșiri numerice a RD.

Modulul E_2 este realizat de regulă în automatizările industriale uzuale, prin robinetele de reglare, dar și prin alte tipuri, în funcție de cerințele automatizării procesului.

9.8.2. **RD-PID cu ieșiri discontinue**

Aspecte hardware. În funcție de caracteristica statică a EE, bi sau tripozițională, RD poate avea o ieșire de comandă (cu comenzi de tip STOP/GO modulate în durată) sau două asemenea ieșiri (DREAPTA-STOP-STÎNGA).

Pentru astfel de comenzi interfața de ieșire este mult simplificată [12]. În primul rînd nu se mai utilizează convertorul N/A și nici extrapolatorul de ordinul zero.

Ieşirile directe sînt de putere mică. La ieşire, puterea se măreşte cu ajutorul unor relee intermediare, care însă prezintă handicapul gabaritului, sau cu relee statice (cu tiristoare, triace etc.).

Aspecte sistemice. Cele mai uzuale RD cu ieşiri discontinue au implementaţi algoritmi de reglare de tip PID-*time proportioning*.

Algoritmii PID discreţi sînt oricare din cei descrişi în §9.2. Diferenţa apare din momentul limitării *software* a comenzii u_k, în format binar, la terminarea calculelor algoritmului de reglare. La RD cu ieşiri continue comanda u_k în UC era limitată la intervalul $u_k^{UC} \in [0, 1]$, astfel încît după denormarea ei vectorul binar trebuia să nu depăşească valoarea CNA egală cu $(2^{n_{CNA}} - 1)$. În acest caz limitarea ei se face în intervalul $[-1, 1]$. După terminarea calculelor algoritmului PID, valorii u_k^{UC} i se asociază $|u_k^{UC}| \in [0, 1]$ şi sign u_k^{UC}. Semnul lui u_k^{UC} validează (activează) canalul de ieşire STÎNGA sau DREAPTA. Mărimea $|u_k^{UC}|$ constituie intrarea într-un convertor (implementat *software*) de tip amplitudine/durata.

Dacă T este perioada de eşantionare, atunci se stabileşte prin proiectare subperioada $T' = \dfrac{T}{n_M}$, unde n_M, este un număr întreg. La comanda maximală $|u_k^{UC}| = 1$, rezultă o „umplere" completă a intervalului $[kT, (k+1)T]$ cu comandă activă. Pentru o valoare arbitrară ,$|u_k^{UC}| \in [0, 1]$, rezultă un impuls de durată:

$$t_U^k = n_k T', \quad n_k = [|u_k^{UC}| n_M] \in \{0, 1, 2, \ldots n_M\}, \tag{9.227}$$

unde $[\cdot]$ este funcţia parte întreagă.

Exemplu. Se presupune că din calculele specifice aplicării algoritmului de reglare s-a obţinut $u_k^{UC} = 0{,}2531$; totodată, s-a ales $n_M = \dfrac{T}{T'} = 100$. Rezultă $n_k = [25, 31] = 25$. Factorul de umplere este exact $\dfrac{n_k}{100} = 25\%$.

Teoretic, pentru precizie maximă, convertorul amplitudine/durată converteşte $|u_k^{UC}|$ într-un factor de umplere $\lambda_k = |u_k^{UC}|$ (asociat comenzii u_k^{UC}), $\lambda_k \in [0, 1]$.

Din motive practice, durata $t_u^k = n_k T'$ este întotdeauna un multiplu de T'; deci, se cuantifică cu pasul $T' = \dfrac{T}{n_M}$ (fig. 9.32). Aşadar,

$$\lambda_k = \frac{n_k}{n_M} = \frac{t_u^k}{T}. \tag{9.228}$$

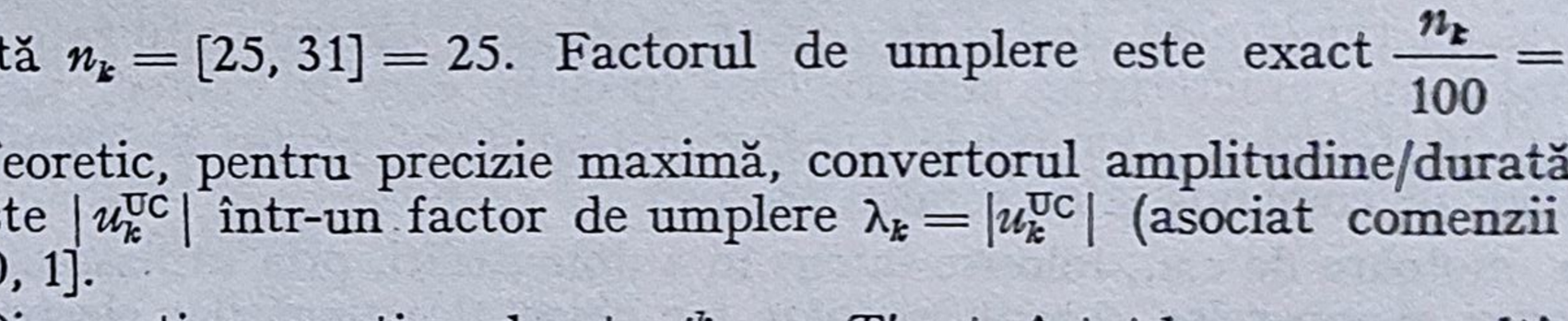


Fig. 9.32 a, b

Convertorul introduce un factor de transfer de la $u_k^{UC} \rightarrow \lambda_k$ (sau n_k). Numărul întreg n_k este limitat la $n_k \in [n_{min}, n_{max}] \subseteq [0, n_M]$, parametrii n_{min} și n_{max} asigurînd valorile λ_{min} și λ_{max} ale factorului de umplere.

Dacă RD dispune de frecvență de eșantionare programabilă (depinzînd de dinamica aplicației), atunci — păstrînd n_M fix — rezultă T variabil; ca urmare, perioada $T' = \frac{T}{n_M}$ este la rîndul ei variabilă.

În cazul RD cu frecvență de eșantionare fixă (și foarte mică) perioada de modulație este $T_c \neq T$; $T_c = \mathcal{R}(T)$, programabilă. Avantajul RD cu frecvență de eșantionare variabilă (dependentă de proces) constă în aceea că pentru același factor de umplere, λ_k, durata t_u^k se adaptează la dinamica procesului [1].

BIBLIOGRAFIE

1. Sângeorzan D. C., *Regulatoare digitale multifuncționale*, Studiu I.P.A., 1987-1988.
2. Ionescu, T., *Sisteme și echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
3. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
4. Călin, S., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, Bucurști, 1976.
5. Davidoviciu, A.; Diatcu, E.; Freidzon, I. R.; Filippov, L. G., *Minicalculatoarele și microcalculatoarele în conducerea proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1983.
6. Papadache, I., *Automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1978.
7. Babuția, I.; Dragomir, T. L.; Mureșan, I.; Proștean, O., *Conducerea automată a proceselor*, Editura Facla, Timișoara, 1985.
8. Voicu, M., *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1986.
9. Koutchoukali, M.; Laguerie, C.; Najin, K., *Adaptive control of fluidized bed reactor*, IFAC' 9th, 01.3.Fl., 1984.
10. Latzel, W., *Regelung mit Prozessrechner*, Zürich, 1977.
11. Munteanu, F.; Dumitriu, S.; *Metodă de acordare a ritaglomilor de reglare numerică cu ajutorul caracteristicilor de frecvență*, 4th Intern. Conf. on Contr. Systems—SAII 4, 1, București 1981, p. 314-319.
12. Călin, S.; Dumitrache, I.; Nițu, C.; Munteanu, F.; Iorga, V.; Dumitriu, S., *Reglarea numerică a proceselor tehnologice*, Editura Tehnică, București, 1984.
13. Rădoi, C.; Nelepcu, G.; Constantin, P.; Murgan, A. T.; Drăgulănescu, N.; Radu, O.; Lăzărescu, V., *Circuite și echipamente electronice industriale*, Editura Tehnică, București, 1986.
14. Salvadori, M. G.; Baron, M. L., *Metode numerice în tehnică*, Editura Tehnică, București, 1972.
15. Nițu, C.; Curcă, V., *Algoritmi neliniari de reglare numerică cu microprocesoare*, Primul Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1980, p. 337-340.
16. Astron, K. J., *Theory and Applications of Adaptive Control*, IFAC'8th, P-6, Kyoto, 1981.
17. Rynaski, E. G., *Adaptive control application to aircraft*, Proc. of the workshop on Appl. of Adaptive Contr., Yale, University, 1979.
18. Călin, S.; Tertișco, M.; Dumitrache, I.; Popeea, C.; Popescu, D., *Optimizări în automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1979.
19. Krasovskii, A. A., Pospelov. G.S., *Osnovî avtomatiki i tehniceskoi kibernetki*, G.E.I. Moskva, 1962.
20. Sângeorzan, D. C., *Ipoteza lui Latzel, o conjectură?*, Al II-lea simpozion. Structuri, algoritmi și echipamente de conducere a proceselor. Iași, 1989.
21. Papadache, I., *Alegerea și acordarea regulatoarelor*, Editura Tehnică, București, 1975.
22. Mihu, I., *Acordarea regulatoarelor numerice pentru procese lente, pe baza funcțiilor de sensibilitate*, Al 3-lea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1984, p. 359-362.
23. Călin, S.; Bărbulea, S., *Algoritm PID în structură cu predicție*, Al 3-lea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1984, p. 356-358.

24. Radke, F.; Iserman, R., *A parameter-adaptive PID-controller with stepwise parameter optimisation*, IFAC'9th, 01.3.F5, 1984.
25. Wittenmark, B., *Self-tuning PID-controllers based on pole placement*, Report Coden D2, Lund Inst. of Technology, Lund, Sweden, 1979.
26. Bengtsson, G.; Egardt, B., *Experiences with self-tuning control in the process industry*, Prepr. IFAC'9th, CS7, 1984.
27. Clarke, D. W.; Gawthrop, P. J., *Self-tuning controller*, Proc. IEE, 122, *9*, 1975.
28. Stanomir, D.; Stănășilă, O., *Metode matematice în teoria semnalelor*, Editura Tehnică, București, 1980.
29. Steiglitz, K., *The equivalence of digital and analog signal processing*, Inform. Contr., *8*, 1965, p. 455-467.
30. Kuo, B. C., *Sisteme automate cu eșantionare*, Editura Tehnică, București, 1967.

Capitolul 10

ALGORITMI DE REGLARE MULTIVARIABILĂ. SINTEZĂ DISCRETĂ NON-INTERACTIVĂ

10.1. DEZIDERATE IMPUSE PROIECTĂRII ALGORITMILOR DE REGLARE MULTIVARIABILĂ IMPLEMENTAȚI ÎN RD

Deși resursele *hardware* și *software* ale unui RD sînt mai limitate decît cele ale unui calculator de proces, într-o serie de aplicații a fost abordată reglarea multivariabilă.

Distincția din punctul de vedere al funcționalității sistemice dintre un RD multivariabil și un calculator de proces se referă la cîteva aspecte importante. În acest sens, deosebiri apreciabile apar în facilitățile *software* mult mai evoluate la calculatoarele de proces, care beneficiază de programare în limbaje înalte utilizînd asambloare, compilatoare ș.a., rezidente în memoria acestuia și în ceea ce privește disponibilitățile *hardware* implementate prin periferice foarte evoluate, de dialog interactiv, vizualizare, înregistrare *on-line* sau *in-line* etc. Asemenea aspecte, ca și altele neamintite aici, se resimt în prețurile de cost mult diferite. În cazul RD, programele de aplicație în limbaj mașină sînt înscrise în memorii fixe și ocupă un volum redus, cu un preț de cost mic, ceea ce favorizează fabricarea regulatoarelor digitale de serii mari. În această idee structura RD este cvasigenerală, adică oferă posibilitatea reglării unor clase de procese. Algoritmii de reglare sînt fie tipizați, de exemplu PID, fie netipizați și înscriși în memorii fixe (consum foarte redus).

Teoretic, un RD este dedicat pentru o anumită aplicație doar prin modificarea memoriilor fixe, restul structurii rămînînd neschimbat.

Principalele deziderate impuse proiectantului se referă la algoritmii eficienți, robuști și simpli, în condițiile unui consum de memorie internă redus și unei puteri de calcul de valoare medie (microprocesoarele de uz general sînt și cele mai ieftine, fapt ce se resimte substanțial în prețul de cost al RD). Aceste deziderate practice au condus la elaborarea unor metode de sinteză discretă, în care matricea de transfer a regulatorului este pe cît posibil simplă (diagonală).

10.2. ASPECTE PRACTICE, TIPICE REGLĂRII MULTIVARIABILE DISCRETE

Se consideră procese descrise prin matrice de transfer pătratice, $\mathbf{T}_f(z) \triangleq$ $\triangleq [H_{f_{ij}}(z)]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, în care vectorul de intrare, $\mathbf{U}(z) \triangleq [U_1(z)\ U_2(z) \ldots U_m(z)]^t$

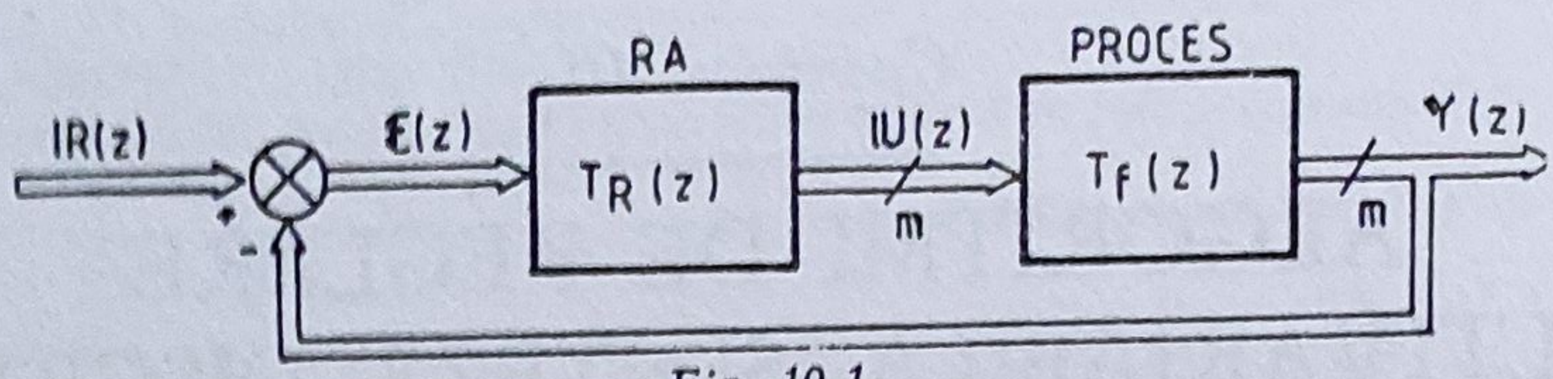


Fig. 10.1

și vectorul ieșirilor, $\mathbf{Y}(z) \triangleq [Y_1(z)\ Y_2(z) \dots Y_m(z)]^t$, au aceeași dimensiune, m. Se dorește ca parametrul y_i să fie comandat (reglat) prin comanda u_i.

Interacțiunile între diversele comenzi u_i și parametrii reglați y_j, $j \neq i$, sînt descrise prin funcțiile scalare de transfer discrete, $H_{ij}(z)$, $i \neq j$.

Se consideră schema tipică de SA din fig. 10.1.

Vectorul mărimilor de referință este $\mathbf{R}(z) \triangleq [R_1(z)\ R_2(z) \dots R_m(z)]^t$, iar parametrul y_i trebuie să urmărească referința corespunzătoare, r_i.

Dacă se proiectează un regulator descris prin matricea de transfer, $\mathbf{T}_R(z)$, cu aspect diagonal în situația cînd matricea $\mathbf{T}_f(z)$ este nediagonală, atunci $\mathbf{T}(z) \triangleq \mathbf{T}_f(z)\mathbf{T}_R(z)$ este tot nediagonală și toate mărimile de referință, r_j, $j \neq i$, vor influența în regim dinamic și (sau) staționar ieșirea y_i, perturbînd clar influența dorită apriori (sistemic și tehnologic) din proiectare $r_i \to y_i$, $i = \overline{1, m}$, în măsura în care alterarea indicilor de calitate ai regimurilor dinamice și staționare devine complet dezagreabilă. Este necesar atunci un regulator descris printr-o matrice de transfer nediagonală care are maxim m^2 funcții de transfer scalare discrete, deci $\mathbf{T}_R(z) = [H_{R_{ij}}(z)]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, cu $H_{R_{ij}}(z) \neq 0$, pentru $i \neq j$. Dacă $\boldsymbol{\varepsilon}(z)$ este vectorul mărimilor de eroare ale buclei multivariabile (fig. 10.1), adică $\boldsymbol{\varepsilon}(z) \triangleq [\varepsilon_1(z)\ \varepsilon_2(z) \dots \varepsilon_m(z)]^t$, atunci algoritmul de calcul al comenzii $U_i(z)$ este multivariabil la intrare; așadar, din $\mathbf{U}(z) = \mathbf{T}_R(z)\boldsymbol{\varepsilon}(z)$ rezultă:

$$U_i(z) = \sum_{j=1}^{m} H_{R_{ij}}(z)\varepsilon_j(z),\ i = \overline{1, m}. \tag{10.1}$$

Funcțiile $H_{R_{ij}}(z)$, $j = \overline{1, m}$, $j \neq i$, se proiectează în ideea eliminării complete sau diminuării considerabile a influențelor nedorite de la $r_i \to y_i$, $i \neq j$, iar algoritmul $H_{R_{ii}}(z)$ generează comanda dorită de reglare.

Dacă se implementează (software) o matrice de reglare nediagonală, $\mathbf{T}_R(z) = H_{R_{ij}}(z)]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, atunci apar în principal cinci aspecte importante care decid performanțele și simplitatea proiectării RD.

- Primul aspect este legat de volumul de memorie necesar pentru memorarea a m^2 algoritmi scalari de reglare, $H_{R_{ij}}(z)$, $i, j = \overline{1, m}$, atît în spațiul memoriei fixe (ROM) pentru coeficienții lor, cît și în spațiul memoriei de lucru (RAM) pentru calculele artimetice care implică cele m valori y_i măsurate în timp real și cele m valori calculate, ε_i.
- Al doilea aspect se referă la timpii de calcul consumați pentru obținerea fiecărei comenzi u_i la momentul curent $t_k \triangleq kT$, conform relației (10.1), comenzi generate de m algoritmi variabili la intrare, $u_i = u_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m)$, în care $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ depind direct de variabilele măsurate $y_1, y_2, \dots, y_m$ (fig. 10.1).
- Al treilea aspect vizează (cvasi)simultaneitatea cerută din punct de vedere sistemic pentru emiterea celor m comenzi calculate la ieșirea RD,

conform algoritmilor din relația (10.1), într-o singură perioadă de eșantionare (practic într-un interval de durată t_c, inclus în $[kT, (k+1)\,T)$, cu $t_c \ll T$), fără introducerea de întîrzieri (timpi morți fracționari), datorate calculelor interne care pot afecta stabilitatea buclei închise discrete (prin micșorarea marginii de fază).

Faptul că toate funcțiile scalare de transfer discrete, $H_{ij}(z)$ și $H_{Rij}(z)$, $i, j = \overline{1, m}$, sînt funcții raționale de o singură variabilă complexă, z, denotă în mod practic utilizarea unei singure frecvențe de eșantionare a sistemului multivariabil $\mathbf{R} \to \mathbf{Y}$, întrucît $z \stackrel{\Delta}{=} e^{Ts}$, iar $f = \dfrac{1}{T}$ este frecvența de eșantionare unică pentru toate buclele monovariabile de reglare. Deoarece perioada T se alege în funcție de dinamica procesului și nu de puterea de calcul a RD, care introduce doar restricția $T \geqslant T_{min}$, rezultă că cvasisimultaneitatea cerută în emiterea comenzilor la ieșirea RD nu este realizată de regulă în sistemele de calcul uzuale (cu microprocesoare de nivel mediu) pentru procese rapide sau relativ rapide, putîndu-se induce efecte negative sistemice, cu alterarea indicilor de calitate ai SA. Substituirea vechii unități centrale, depășită prin prisma acestei cerințe, cu un microprocesor mai puternic duce inevitabil la creșterea prețului de cost al RD.

• Al patrulea aspect constă în faptul că cele m subsisteme (m — numărul variabilelor la intrare și monovariabilelor la ieșire ale părții fixate), $y_i = y_i(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $i = \overline{1, m}$, pot avea scale de timp real diferite. Există deci parametri reglați, y_j, cu dinamică rapidă și parametri reglați, y_j, cu dinamică lentă. Dacă dinamica parametrilor rapizi nu poate fi neglijată în calculele de proiectare (prin asimilarea modelelor exclusiv staționare) în raport cu dinamica parametrilor lenți, atunci RD multivariabil va trebui să utilizeze m frecvențe de eșantionare diferite.

Folosirea unei frecvențe unice de eșantionare (maximală) pentru toate buclele poate duce fie la neefectuarea în timp util a tuturor calculelor comenzilor, cu $t_c \ll T$ pentru toate buclele simultan, fie la asimilarea unor modele discrete ale părții fixate, cu poli apropiați de $z = +1$, care — în condițiile aritmeticii finite utilizate în RD — devin poli cvasiunitari, adică modele la limită de stabilitate sau instabile în unele situații.

Folosirea unei perioade de eșantionare T mare pentru rezolvarea aspectelor conflictuale specifice situațiilor enunțate (excluzînd-o pe prima) poate duce, în cazul buclelor rapide, la erori de cuantificare în timp și amplitudine prea mari, uneori cu apariția posibilă a oscilațiilor ascunse [16].

• Al cincilea aspect privește proiectantul de sisteme, care — în cazul algoritmilor de reglare multivariabilă pentru procese nedecuplate — este obligat să proiecteze matricea de transfer nediagonală a RA, $\mathbf{T}_R(z)$, prin metode specifice exclusiv teoriei sistemelor multivariabile încă insuficient dezvoltată din punct de vedere operațional, în cadrul informațional discret.

Toate aspectele menționate au impus metode de proiectare prin care interacțiunile dintre bucle să fie diminuate în așa măsură încît cei m parametri reglați, y_i, să fie decuplați, iar buclele monovariabile, $r_i \xrightarrow{i} y_i$, să nu interacționeze semnificativ; cu alte cuvinte, într-o exprimare succintă, matricea de transfer a sistemului închis, $\mathbf{T}_0(z)$ și matricea de transfer a RA, $\mathbf{T}_R(z)$, să fie diagonale.

Preferințele proiectării de RA cu cerințele de decuplare enunțate (matrice de transfer diagonale) este justificată prin următoarele aspecte favorabile:

— dacă $\mathbf{T}_R(z) = [\text{diag}\, H_{R_{ii}}(z)]_{1 \leqslant i \leqslant m}$, atunci în memoria internă a RD sînt înmagazinați parametrii corespunzători a m funcții scalare de transfer, iar calculele afectează un volum mult mai redus de memorie de lucru;

— algoritmii de calcul pentru comenzi devin monovariabili și la intrare, deci $u_i = u_i(\varepsilon_i)$, $i = \overline{1, m}$, reducîndu-se mult numărul calculelor;

— cvasisimultaneitatea emiterii la ieșire a celor m comenzi u_i, la $t_k = kT$, calculate din algoritmii monovariabili $U_i(z) = H_{R_{ii}}(z)\, \varepsilon_i(z)$ este mult mai posibilă decît în cazul anterior, ceea ce permite utilizarea unei frecvențe de eșantionare (mici) unice pentru toți parametrii reglați și a unor microprocesoare de nivel mediu de uz general (ieftine).

Din punctul de vedere al ultimului aspect, preferințele de proiectare, în marea majoritate a aplicațiilor de reglare multivariabilă, sînt în mod net favorabile contextului verificat și pus la punct al teoriei sistemelor monovariabile (SISO) [7].

În ideea ilustrării în linii mari a dificultăților legate de sinteza non-interactivă discretă, preluată direct prin analogie în cazul sintezei continue, este utilă o prezentare foarte sintetică și succintă a metodelor consacrate din cazul teoriei sistemelor multivariabile, continue, non-interactive.

OBSERVAȚIE. Toate aspectele abordate în paragraful anterior se referă la cazul proceselor complexe cu interacțiuni tehnologice, la care separarea în subprocese $y_i = y_i(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ a dus inevitabil la apariția interacțiunilor și la necesitatea luării lor în considerare pentru obținerea performanțelor dorite întregului proces (complex). Există însă numeroase aplicații cu RD multicanal în care procesele monovariabile i/e sînt independente între ele din punct de vedere tehnologic și dimensional (fizic), înglobînd în aceeași structură funcțiunile a m RA monovariabile i/e.

10.3. ASPECTE TEORETICE ALE METODELOR DE SINTEZĂ NON-INTERACTIVĂ A SISTEMELOR CONTINUE

Sinteza non-interactivă a sistemelor multivariabile include metode specifice ce depind de modelul părții fixate: model structural (de stare) sau model informațional (matrice de transfer). Ambele abordări permit rezolvarea simultană a celor două cerințe: decuplarea buclelor și, respectiv, reglarea automată a procesului complex cu interacțiuni.

Într-un cadru exhaustiv de clasificare există metode de decuplare exactă sau aproximativă, de decuplare completă sau incompletă, în funcție de contextul particular. Dacă matricea de transfer a procesului nu este pătrată, atunci nu va fi posibilă decuplarea completă, ci pe „pachete" de intrări/ieșiri multivariabile.

Deși presupune eliminarea completă a interacțiunilor, decuplarea exactă nu constituie totuși o soluție practică, deoarece conduce la sinteza unor regulatoare nedecuplate, instabile sau de fază neminimă [16], [11], [18].

În cazul real, chiar dacă matricea RA nu este diagonală, se preferă diminuarea interacțiunilor dintre bucle pentru satisfacerea optimă a cerințelor de reglare, fără apariția efectelor negative care pot să apară la RA complet decuplate.

10.3.1. **Decuplarea în abordarea structurală**

Formularea detaliată și profundă a ambelor cerințe (decuplare, respectiv reglare) în acest context este prezentată în [1], [7].

Se consideră sistemul dinamic (procesul) prin relațiile:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},\ \mathbf{x}, \in \mathbb{R}^n\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \tag{10.2}$$

Se cere să se proiecteze o lege de comandă și reacție cu aspectul:

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{v},\ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \tag{10.3}$$

unde $\mathbf{v}$ este noul vector de comandă (referință), astfel încît, în sistemul închis (cu această reacție),

$$\begin{aligned} &\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\,\mathbf{x} + \mathbf{BGv},\ \ \mathbf{v} \triangleq [v_1, v_2, \ldots, v_m]^t; \\ &Y = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \tag{10.4}$$

fiecare comandă v_i să influențeze exclusiv y_i, deci perechile (v_i, y_i), $i = \overline{1, m}$, să fie complet decuplate în această configurație sistemică.

În [8] s-a introdus o condiție necesară și suficientă ca toate cele m perechi (v_i, y_i) să fie decuplate. Fie matricea

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1\mathbf{A}^{l_1}\mathbf{B} \\ \tilde{c}_2\mathbf{A}^{l_2}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \tilde{c}_m\mathbf{A}^{l_m}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \tag{10.5}$$

unde $\tilde{c}_i$, $i = \overline{1, m}$, sînt liniile matricei $\mathbf{C}$ din (10.2), iar l_i — cel mai mic număr întreg pozitiv pentru care vectorul-linie $D_i \triangleq \tilde{c}_i A^{l_i}\mathbf{B}$ este vectorul nenul (dacă $\tilde{c}_i\mathbf{A}^j\mathbf{B} = 0$, $(\forall) j = \overline{1, n-1}$, atunci $l_i = n - 1$).

Condiția necesară și suficientă pentru ca toate cele m perechi (v_i, y_i) să fie decuplabile este ca matricea $\mathbf{D}$ să fie inversabilă. În caz afirmativ, există matricele $\mathbf{F}$ și $\mathbf{G}$ din (10.3) și se indică modul lor de construcție [1], [7].

Se remarcă faptul că abordările (10.3), (10.4) și (10.5) sînt posibile dacă sistemul (10.2) este complet observabil, adică toate stările sînt estimabile. În caz contrar, legea din (10.3) se modifică, devenind o lege de comandă și reacție după ieșire, iar expresiile (10.4) și (10.5) se modifică adecvat conform [9], [7].

Transpunerea în cazul discret a acestor metode întîmpină o serie de dificultăți practice, dintre care menționăm:

- modelul discret $\Sigma_d \triangleq (\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d)$ se obține de regulă indirect din cel continuu $\Sigma \triangleq (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$, operațiile prin care rezultă acest model introducînd erori numerice inevitabile;

• diversele condiționări numerice ale matricei $\mathbf{D}_d$, construită similar cu **D** din relația (10.5), după un șir de operații de trunchiere și rotunjire, pot conduce la neîndeplinirea condiției de decuplare (adică matricea $\mathbf{D}_d^{-1}$ nu există), situație posibilă, neconformă cu realitatea;

• în general, în RD de serie, datorită sistemului de calcul de nivel mediu (ieftin și accesibil) și volumului de memorie redus, nu se implementează modele de stare (cu stări estimate), ci modele informaționale (cu consum de memorie și timp de calcul inferioare).

10.3.2. **Decuplarea în abordarea informațională**

• *Abordarea prin matrice de transfer*. În acest context, procesul este descris printr-o matrice de transfer rațională strict proprie:

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{T}_f(s)\,\mathbf{u}(s), \quad \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{C}^m, \tag{10.6}$$

în care s este variabila complexă a transformării Laplace.

Legea de comandă propusă este [10]:

$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{H}\mathbf{y}(s) + \mathbf{G}\mathbf{v}(s), \tag{10.7}$$

unde $\det \mathbf{G} \neq 0$.

Sistemul închis de la **v** la **y**, conform relațiilor (10.6) și (10.7), are matricea de transefr:

$$\mathbf{T}_0(s) \triangleq [\mathbf{I}_m - \mathbf{T}_f(s)\mathbf{H}]^{-1}\mathbf{T}_f(s)\,\mathbf{G} = [\mathbf{T}_f^{-1}(s) - \mathbf{H}]^{-1}\,\mathbf{G}, \tag{10.8}$$

cu condiția ca $\mathbf{T}_f(s)$ să fie inversabilă $(\forall)s$, iar $\mathbf{T}_0(s)$ — strict proprie.

Condiția de decuplare constă în existența matricelor **H** și **G**, astfel încît $\mathbf{T}_0(s)$ să fie o matrice diagonală, caz care semnifică decuplarea buclelor monovariabile (scalare). După [2], condiția necesară și suficientă ca un sistem cu matricea de transfer strict proprie, $\mathbf{T}_f(s)$, să fie decuplat cu ajutorul legii (10.7) este ca matricea de decuplare din (10.5) să fie nesingulară, iar elementele nediagonale ale matricei $\mathbf{D}\mathbf{T}_f^{-1}(s)$ să fie mărimi scalare independente de s, (10.9).

În [7] și [1] se indică atît modul de construcție al matricelor **H** și **G**, cît și unele aspecte referitoare la cerințele de reglare propriu-zise. Practic, condiția necesară și suficientă pentru decuplare se referă la faptul că matricea $\mathbf{T}_f(s)$ trebuie să fie inversabilă la dreapta.

În cazul matricelor $\mathbf{T}_f(s)$ nepătratice ($\dim \mathbf{y} \neq \dim \mathbf{u}$), în [1] se prezintă condiții necesare și suficiente de decuplare pe pachete de intrări/ieșiri, deci o decuplare incompletă.

• *Abordarea în frecvență. Metoda Locurilor Nyquist Inverse.*

După cum s-a menționat, decuplarea exactă poate duce uneori la matrice de faza neminimă instabile sau improprii, situație inadmisibilă practic [18], [16], [11]. Se preferă atunci decuplarea dinamică aproximativă, în care interacțiunile dintre bucle să fie diminuate în așa măsură încît să producă efecte neglijabile.

Matricea RA se simplifică ca aspect, iar proiectarea ei se face în contextul teoriei sistemelor monovariabile (SISO), cu toate avantajele ce decurg de aici

Cel mai consacrat procedeu în acest sens este metoda *L*ocurilor *N*yquist *I*nverse (LNI). Ideea de bază a acesteia consta în reducerea interacțiunilor pînă la un nivel la care reglarea poate fi efectuată cu algoritmi monovariabili (scalari) pentru fiecare mărime reglată, y_i.

Principiul folosirii metodei în proiectare este schițat în continuare.

Dacă $\mathbf{T}(s)$ este matricea de transfer a buclei deschise, iar $\mathbf{T}_0(s)$ a buclei închise (cu reacție automată rigidă) și dacă cele două matrice sînt inversabile $(\forall)s$ (restricție tare), atunci

$$\mathbf{T}_0(s) \triangleq [\mathbf{I}_m + \mathbf{T}(s)]^{-1}\mathbf{T}_s, \text{ dim } \mathbf{T} = \text{dim } \mathbf{T}_0 = m \times m. \tag{10.10}$$

Prin inversare rezultă:

$$\mathbf{T}_0^{-1}(s) = \mathbf{T}^{-1}(s) + \mathbf{I}_m. \tag{10.11}$$

Matricele inverse se notează:

$$\hat{\mathbf{T}}_0(s) \triangleq \mathbf{T}_0^{-1}(s), \quad \hat{\mathbf{T}}(s) \triangleq \mathbf{T}^{-1}(s), \tag{10.12}$$

cu elementele $\hat{\mathbf{T}}_0(s) \triangleq [\hat{H}_{0ij}(s)]_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m}$ și $\hat{\mathbf{T}}(s) \triangleq [\hat{H}_{ij}(s)]_{1 \leqslant i,\, j \leqslant m}$.

Între aceste elemente există relațiile:

$$\begin{aligned} &\hat{H}_{0ij}(s) = \hat{H}_{ij}(s), \; i \neq j; \\ &\hat{H}_{0ij}(s) = \hat{H}_{ij}(s) + 1, \; i = j. \end{aligned} \tag{10.13}$$

Conform expresiei (10.13), se constată identitatea elementelor nediagonale ale matricelor $\hat{\mathbf{T}}_0(s)$ și $\hat{\mathbf{T}}(s)$ și diferența minoră pentru cele diagonale, fapt care permite utilizarea ulterioară în etapele de proiectare exclusiv a matricei $\hat{\mathbf{T}}(s)$.

Condiția de decuplare dinamică aproximativă impusă matricei $\hat{\mathbf{T}}_0(s)$ sau $\mathbf{T}_0(s)$, este echivalentă cu condiția de *D*iagonal-*D*ominantă (DD) a acesteia. În sensul respectiv, matricea $\hat{\mathbf{T}}_0(s)$ este diagonal-dominantă (pe linii, similar verificîndu-se și pe coloane) dacă $(\forall)s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, există relația:

$$|\hat{H}_{0ii}(s)| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\hat{H}_{0ij}(s)|, \; i = \overline{1, m}, \; \text{Re } s = 0. \tag{10.14}$$

Deoarece $\hat{H}_{0ij}(s)$ și $\hat{H}_{ij}(s)$ se găsesc în expresia (10.13) — aspect ce avantajează inversarea — se operează exclusiv cu diagramele matricei $\hat{\mathbf{T}}(s)$, Re $s =$ $= 0$, originea acestora aflîndu-se însă în punctul $(-1, j0)$ [15].

Practic, pentru fiecare element al diagonalei matricei $\hat{\mathbf{T}}(s)$ se trasează locul Nyquist, ce constă dintr-o familie de cercuri cu centrele în punctele de afixe, $\hat{H}_{ii}(s)$, Re $s = 0$, și de raze $\tilde{r}_i(s) \triangleq \sum_{j=1}^{m} |\hat{H}_{ij}(s)|, j \neq i$, Re $s = 0$ [19].

Înfășurătoarea acestor cercuri dă o imagine de detaliu a efectelor interacțiunilor asupra buclei $r_i \xrightarrow{i} y_i$ și, totodată, precizează indicii de calitate ai buclei (margine de amplitudine, margine de fază ș.a. [4], [5], [6]). Din punct de vedere procedural, aceasta este ultima etapă a fiecărei iterații a metodei adică trasarea LNI).

Matricea RA se proiectează folosindu-se matricele inverse. Fie aspectul matricei RA [5]:

$$\mathbf{T}_R(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{K}_a\mathbf{K}_b(s)\mathbf{K}_c(s), \tag{10.15}$$

cu inversa :

$$\mathbf{T}_R^{-1}(s) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\mathbf{T}}_R(s) = \hat{\mathbf{K}}_c(s)\hat{\mathbf{K}}_b(s)\hat{\mathbf{K}}_a, \tag{10.16}$$

procesul fiind descris prin $\mathbf{T}_f(s)$, unde $\hat{\mathbf{T}}_f(s) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{T}_f^{-1}(s)$.

Atunci, $\mathbf{T}(s) = \mathbf{T}_f(s)\mathbf{T}_R(s) = \mathbf{T}_f(s)\mathbf{K}_a\mathbf{K}_b(s)\mathbf{K}_c(s)$,

deci

$$\hat{\mathbf{T}}(s) = \hat{\mathbf{K}}_c(s)\hat{\mathbf{K}}_b(s)\hat{\mathbf{K}}_a\hat{\mathbf{T}}_f(s), \tag{10.17}$$

unde $\hat{\mathbf{K}}_a$ este o matrice de permutare, prin care comanda $u_i \to y_i$, adică $\hat{\mathbf{K}}_a\hat{\mathbf{T}}_f(s)$, este „ordonată" prin $\hat{\mathbf{K}}_a$.

Matricea $\hat{\mathbf{K}}_b(s)$ se proiectează astfel încît matricea $\hat{\mathbf{K}}_b(s)\hat{\mathbf{K}}_a\hat{\mathbf{T}}_f(s)$ să fie diagonal-dominantă. Se notează:

$$\hat{\mathbf{T}}_a(s) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\mathbf{K}}_b(s)\hat{\mathbf{K}}_a\hat{\mathbf{T}}_f(s) \stackrel{\Delta}{=} [\hat{H}_{d_{ij}}(s)]_{1\leqslant i,j\leqslant m}. \tag{10.18}$$

Matricea $\hat{\mathbf{T}}_a(s)$ se consideră practic diagonală $(\forall)s$, $\operatorname{Re} s = 0$; în consecință, matricea $\hat{\mathbf{K}}_c(s)$ poate fi aleasă diagonală. Deci, se aproximează $\hat{\mathbf{T}}_a(s)$ prin $\hat{\mathbf{T}}_a(s) \approx [\operatorname{diag} \hat{H}_{d_{ii}}(s)]_{1\leqslant i\leqslant m}$, iar $\hat{\mathbf{K}}_c(s)$ prin

$$\hat{\mathbf{K}}_c(s) \stackrel{\Delta}{=} [\operatorname{diag} \hat{k}_{c_{ii}}(s)]_{1\leqslant i\leqslant m}. \tag{10.19}$$

Funcțiile de transfer $\hat{k}_{c_{ii}}(s)$ se proiectează independent pentru fiecare buclă scalară (monovariabilă), în care partea fixată este $\hat{H}_{d_{ii}}(s)$ din (10.18), conform fig. 10.2, unde, evident, $\tilde{U}_i(s) \neq U_i(s)$, $\tilde{U}_i$ fiind comanda modificată.

Cunoscîndu-se $\hat{\mathbf{K}}_a$, $\hat{\mathbf{K}}_b(s)$ și $\hat{\mathbf{K}}_c(s)$, rezultă $\hat{\mathbf{T}}_R(s)$, deci $\mathbf{T}_R(s)$.

În unele situații în care interacțiunile din regimul dinamic se neglijează, interesînd doar cele din regimul staționar, $s \to 0$, se poate alege [4], [2]:

$$\hat{\mathbf{T}}_R(s) = \hat{\mathbf{T}}_f^{-1}(0), \quad \mathbf{T}_R(s) = \mathbf{T}_f^{-1}(0). \tag{10.20}$$

În acest caz, $\hat{\mathbf{T}}(s) = \hat{\mathbf{T}}_R(s)\,\hat{\mathbf{T}}_f(s) = \hat{\mathbf{T}}_f^{-1}(0)\,\hat{\mathbf{T}}_f(s)$ și

$$\lim_{s\to 0} \hat{\mathbf{T}}(s) = \hat{\mathbf{T}}(0) = \hat{\mathbf{T}}_f^{-1}(0)\,\hat{\mathbf{T}}_f(0) = \mathbf{I}_m. \tag{10.21}$$

Dacă $\hat{\mathbf{T}}(0)$ este diagonală, atunci și $\hat{\mathbf{T}}_0(0)$ este diagonală; ca urmare, sistemul închis este decuplat la $s \to 0$ (în regim staționar).

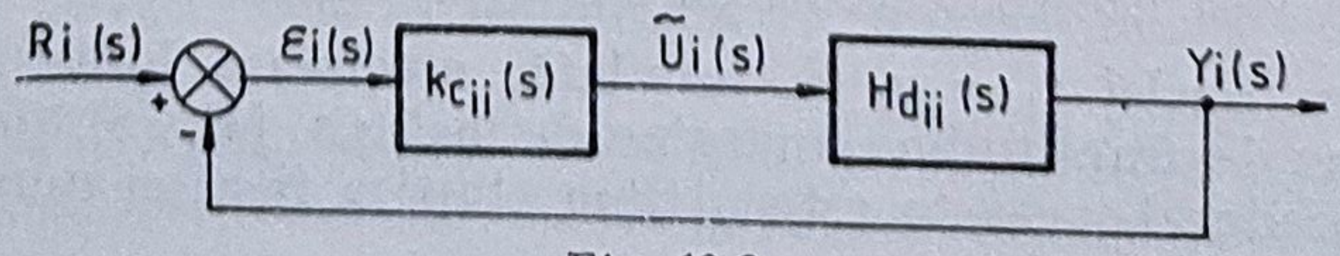


Fig. 10.2

Revenind la metoda anterioară, etapele de construcție a matricelor $\hat{\mathbf{K}}_b(s)$ și $\hat{\mathbf{K}}_c(s)$ se reiau în cadrul unei proceduri iterative, în care se calculează la fiecare iterație $\hat{\mathbf{T}}(s)$ și se trasează LNI, apreciindu-se calitatea regimurilor dinamice și staționare. Metoda de proiectare — asistată de calculator — se aplică *off-line*.

În [14], [15] se indică existența unor programe de aplicație evoluate, care permit trasarea automată a locurilor inverse. Absența în proiectarea prin această metodă a unor astfel de programe și a controlului vizual interactiv determină ca procedeul să fie aplicat cu dificultăți în procesele de dimensiuni mari ($m \geqslant 4$).

Din descrierea de principiu a metodei LNI se constată dificultatea „translatării procedurale" în cazul discret. Pentru facilitarea aplicării metodei se impune să se țină seama de următoarele aspecte:

— necesitatea unor programe în limbaje evoluate de vizualizare a locurilor Nyquist și de conversație interactivă;

— inversarea unor matrice literale $\mathbf{T}(s)$, de dimensiuni mari ($m \geqslant 4$), exclusiv prin procedee manuale, în ipoteza că ele sînt inversabile;

— efectuarea mai multor etape iterative;

— exprimarea în pseudofrecvențe absolute, s, sau relative, cu anumite dificultăți referitoare la dimensiunile mari ale matricei $\mathbf{T}(z)$.

Într-adevăr, în contextul discret, hodografele Nyquist ale funcțiilor discrete $H(z)$ pe cercul unitar $|z| = 1$ (echivalentul axei $\operatorname{Re} s = 0$ din cazul continuu) sînt funcții $H(z = e^{j\varphi})$, $j \triangleq \sqrt{-1}$, mult mai dificil de calculat și vizualizat, deoarece dacă în cazul continuu $|H(j\omega)|^2$ sînt fracții raționale, în $\omega = \operatorname{Im} s$, $|H(e^{j\varphi})|^2$ nu mai sînt fracții raționale în φ (raport de polinoame în φ), ca urmare calculul devenind extrem de dificil ($\varphi \in [-\pi, \pi]$);

— deși în final interacțiunile sînt diminuate, matricea de transfer a RA, $\mathbf{T}_R(z)$, nu este diagonală — nici $\mathbf{T}_R(s)$ nu este diagonală, datorită matricelor $\mathbf{K}_b(s)$ și $\mathbf{K}_a$ —, situație în care apar aspectele descrise în § 10.2. În plus, o abordare directă, adică obținerea nemijlocită a matricei $\mathbf{T}_f(s)$ sau $\mathbf{T}_f(w)$ din $\mathbf{T}_f^{JF}(s)$, ridică problema perioadei de eșantionare foarte mici impuse de precizia cerută;

— în proiectarea sistemelor discrete multivariabile se preferă metoda poli-zerouri sau sinteza structurală cu perioada de eșantionare T relativ mare sau procedee tipice neiterative și fără necesitatea utilizării locurilor Nyquist.

10.4. METODĂ DE SINTEZĂ NON-INTERACTIVĂ PENTRU O CLASĂ DE SISTEME MULTIVARIABILE CU EȘANTIONARE

În [20], [21], [22], [23] s-a introdus un procedeu de decuplare dinamică aproximativă pentru sisteme multivariabile discrete cu interacțiuni, prin care se ating simultan două deziderate majore: diminuarea interacțiunilor dintre bucle și, respectiv, sinteza unui regulator discret caracterizat printr-o matrice de transfer diagonală (RA — decuplat). În acest mod se elimină și dezavantajele esențiale ale metodei LNI — de a trasa, vizualiza și corecta iterativ un mare număr de hodografe —, cu atît mai dificil de aplicat în cazul discret, numărul iterațiilor fiind nedefinit apriori.

Metoda propusă, ce presupune efectuarea de calcule *off-line* simple, nu utilizează hodografele funcțiilor $H(z = e^{j\varphi}), \varphi \in [-\pi, \pi]$, și necesită o singură etapă de proiectare. Obiectivul final constă în diminuarea interacțiunilor dintre buclele de reglare, simultan cu sinteza unui regulator multivariabil decuplat. Toate dezideratele sînt finalizate în sisteme automate multivariabile care funcționează cu o frecvență de eșantionare unică pentru toți parametrii reglați, y_i, $i = \overline{1, m}$.

Practica industrială a RD dotate cu microprocesoare de uz general de nivel mediu a impus în multe cazuri folosirea de frecvențe de eșantionare diferite, alese adecvat dinamicii proprii fiecărei bucle (deci, reglarea unor procese multivariabile cu interacțiuni, cu mai multe scale de timp distincte). În această situație metoda din [20], [21], a fost extinsă în [22] la sisteme cu interacțiuni cu mai multe scale de timp, necesitînd mai multe frecvențe de eșantionare.

10.4.1. Metodă de decuplare dinamică pentru o clasă de sisteme multivariabile cu interacțiuni, cu frecvență de eșantionare unică

Această metodă, introdusă în [20] [21], necesită o prezentare în mai multe etape:

I. *Definirea clasei de sisteme decuplabile*

• *Ipoteze preliminare:* se consideră matricele de transfer discrete raționale proprii, $\mathbf{T}(z) = [H_{pq}(z)]_{1 \leqslant p, q \leqslant m}$, unde funcțiile de transfer discrete $H_{pq}(z)$ sînt factorizate prin

$$\mathbf{H}_{pq}(z) = \frac{\prod_{j=1}^{m'} (z - z_j)}{\prod_{i=1}^{n'} (z - p_i)}, \quad m' < n', \tag{10.22}$$

în care $p_i, z_j \in [0, 1]$ sau $p_i \in [0, 1]$, $z_j \in [-1, 1]$.

Pentru $p_i \in [0, 1]$, sistemele $H_{pq}(z)$ au răspunsuri indiciale aperiodice, iar $z_j \in [-1, 1]$ ilustrează faza minimă a acestora. Deoarece se utilizează extrapolatorul de ordin zero modelul discret al părții fixate (înglobînd extrapolatorul de tipul precizat) poate avea și zerouri stabile negative.

Fie I și J două mulțimi ordonate de indici, cu $|I| = n'$ și $|J| = m'$, $n' < m'$.

Definiția I. 1 [20]. O funcție $H_{pq}(z)$, îndeplinînd ipotezele inițiale, este de clasă $\mathcal{C}_1$ dacă $(\forall)\, j \in J$, $(\exists)\, i \in I$, astfel încît $z_j < p_i$ și de clasă $\mathcal{C}_2$ dacă $(\forall)\, j \in J$, $(\exists)\, i \in I$, astfel încît $z_j > p_i$.

OBSERVAȚIE: O funcție $H_{pq}(z)$ trebuie să aparțină exclusiv clasei $\mathcal{C}_1$ sau clasei $\mathcal{C}_2$. Acestea includ funcții de transfer avînd proprietăți specifice ale modulului $|H_{pq}(z)|$ pe cercul unitate din planul z, $|z| = 1$; $z = e^{j\varphi}$, $j \triangleq \sqrt{-1}$. Deoarece modulul variază identic pe intervalele $(-\pi, 0]$ și $[0, \pi]$, se va studia doar pe intervalul $\varphi \in [0, \pi]$.

Definiția I.2. [20]. O matrice de transfer $\mathbf{T}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dacă $(\forall) p, q = \overline{1, m}$ sau $H_{pq}(z) \in \mathcal{C}_1$ ori $H_{pq}(z) \in \mathcal{C}_2$.

II. *Caracteristici tipice ale clasei de sisteme decuplabile*

Proprietățile tipice amintite în observația precedentă se referă la stricta monotonie a modulelor funcțiilor din $\mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$ pe intervalul $\varphi \in [0, \pi]$, proprietăți rezultînd din studiul semnelor derivatelor acestor module pe intervalul amintit și depinzînd de configurația poli-zerouri a fiecărei funcții.

- *Cazuri elementare:*

$$a_1)\ H_{a_1}(z) = \frac{1}{z - a},\quad a \in [0, 1];$$

$$|H_{a_1}(e^{j\varphi})| \triangleq H_{a_1}(\varphi) > 0,\ \frac{dH_{a_1}(\varphi)}{d\varphi} < 0 (\forall)\varphi \in [0, \pi],\ \text{deci}\ H_{a_1}(z) \in \mathcal{C}_1;$$

$$\max_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_1}(\varphi) = H_{a_1}(0);$$

$$\min_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_1}(\varphi) = H_{a_1}(\pi).$$

Pentru $a = 1$, $\lim_{z \to 1} |H_{a_1}(z)| = \infty$.

$$a_2)\ H_{a_2}(z) = \frac{z - b}{z - a},\quad a,\ b \in [0, 1];$$

$$\operatorname*{sign}_{\varphi \in [0, \pi]} \frac{dH_{a_2}(\varphi)}{d\varphi} = \text{sign}\,(b - a),\ |H_{a_2}(e^{j\varphi})| \triangleq H_{a_2}(\varphi).$$

Dacă $b < a$, atunci $\max_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_2}(\varphi) = H_{a_2}(0)$, $\min_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_2}(\varphi) = H_{a_2}(\pi)$; deci, $H_{a_2}(z) \in \mathcal{C}_1$.
Dacă $b > a$, atunci $\max_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_2}(\varphi) = H_{a_2}(\pi)$, $\min_{\varphi \in [0, \pi]} H_{a_2}(\varphi) = H_{a_2}(0)$; deci, $H_{a_2}(z) \in \mathcal{C}_2$.

$$b)\ H_b(z) = \frac{z + b}{z - a},\ a,\ b \in [0, 1],\ |H_b(e^{j\varphi})| \triangleq H_b(\varphi),$$

$$\operatorname*{sig\,n}_{\varphi \in [0, \pi]} \frac{dH_b(\varphi)}{d\varphi} = -1,\ (\forall)\ a, b,\ \text{deci}\ \max_{\varphi \in [0, \pi]} H_b(\varphi) = H_b(0),$$

$$\min_{\varphi \in [0, \pi]} H_b(\varphi) = H_b(\pi),\ H_b(z) \in \mathcal{C}_1.$$

În concluzie, studiindu-se monotonia modulelor acestor funcții elementare în cazurile a_1, a_2 și b, se constată atingerea marginilor (min/max) în punctele $\varphi = 0$ (echivalent $z_1 = e^{j0} = +1$) și $\varphi = \pi$ (echivalent $z_2 = e^{j\pi} = -1$). În punctele $z_{1,2} = \pm 1$ funcția complexă de transfer $H(z_{1,2})$ are $\text{Im}\, H(z_{1,2}) = 0$, deci nu necesită calculul modulului. Motivul constă în aceea că $H(\pm 1) \in \mathbf{R}$, fapt care constituie un mare avantaj.

În cazul general al unei funcții $H_{pq}(z)$, factorizate ca și în (10.22), se admite o descompunere multiplicativă în funcții elementare de tipul $H_{a_1}(z)$, $H_{a_2}(z)$ sau $H_b(z)$. Notîndu-se o astfel de descompunere

$$H_{pq}(z) = \Pi H_{a_1}(z)\ \Pi H_{a_2}(z)\ \Pi H_b(z), \tag{10.23}$$

unde $H_{a_1}(z), H_{a_2}(z), H_b(z) \in \mathcal{C}_1$ sau (exclusiv) $H_{a_1}(z), H_{a_2}(z), H_b(z) \in \mathcal{C}_2$, cînd se trece la module de argument φ, adică $| H_{pq}(z = e^{j\varphi}) | \triangleq H_{pq}(\varphi)$, se derivează, $\dfrac{dH_{pq}(\varphi)}{d\varphi}$, după regula derivării unui produs de funcții, și rezultă:

$$\underset{\varphi \in [0,\pi]}{\text{sign}} \frac{dH_{pq}(\varphi)}{d\varphi} = \underset{\varphi \in [0,\pi]}{\text{sign}} \frac{dH_{a_1(a_2,\ b)}(\varphi)}{d\varphi}; \tag{10.24}$$

așadar, $H_{pq}(z)$ aparține aceleiași clase ca și funcțiile componente ale formei factorizate (10.23).

Dacă toate funcțiile elementare din (10.23) aparțin aceleiași clase ($\mathcal{C}_1$ sau $\mathcal{C}_2$), atunci $H_{pq}(z)$ aparține tot aceleiași clase, proprietate care se remarcă imediat din (10.24) studiindu-se semnele factorilor.

În astfel de situații $\underset{\varphi \in [0,\pi]}{\text{sign}} \dfrac{dH_{pq}(\varphi)}{d\varphi} = \text{const.}$, astfel că $H_{pq}(\varphi)$, respectiv $|H_{pq}(z)|$, își atinge marginile în $\varphi = 0$ sau $\varphi = \pi$, adică $z_{1,2} = \pm 1$, corespunzător clasei căreia îi aparține.

Pentru funcții $H_{pq}(z) \in \mathcal{C}_1$, există relațiile:

$$\begin{aligned} &\min_{|z|=1} | H_{pq}(z) | = | H_{pq}(-1) | ; \\ &\max_{|z|=1} | H_{pq}(z) | = H_{pq}(+1). \end{aligned} \tag{10.25}$$

Dacă $H_{pq}(z) \in \mathcal{C}_2$, egalitățile din (10.25) sînt invers amplasate.

În ambele cazuri $H_{pq}(\pm 1) \in \mathbb{R}$, dar întotdeauna $H_{pq}(1) > 0$, iar $H_{pq}(-1) = (-1)^{n'+m'} | H_{pq}(-1) |$, cu $n' < m'$, din 10.22.

• *Procese continue uzuale descrise prin modele discrete din* $\mathcal{C}_1$ *sau* $\mathcal{C}_2$

— Toate procesele continue descrise prin modele de forma $H_f(s) = \dfrac{K_f e^{-\tau s}}{1 + T_f s}$, deci cu o constantă de timp, aparțin (după operația de discretizare cu înglobarea extrapolatorului de ordinul zero) clasei $\mathcal{C}_1$.

— Procesele continue de forma $H_f(s) = \dfrac{K_f e^{-\tau s}}{(1 + T_{f_1} s)(1 + T_{f_2} s)}$, care (după înglobarea extrapolatorului de ordin zero) au modelul discret cu doi poli reali stabili și un zero stabil, dar negativ, aparțin clasei $\mathcal{C}_1$.

— Procesele continue care, după operația de discretizare, devin modele $H_{pq}(z)$ ce pot fi descompuse multiplicativ, ca în (10.23), în funcții elementare aparțin aceleiași clase $\mathcal{C}_1$ (sau $\mathcal{C}_2$).

— De regulă, procesele al căror model discret (funcție de transfer) are proprietăți de strictă monotonie a modulului funcției de transfer discrete pe cercul unitate $| z | = 1$ (nu posedă „frecvențe de rezonanță").

III. *Rezultate teoretice. Enunțuri și demonstrații*

Lema III.1 [20]. Fie $H(z)$ și $H_1(z), H_2(z), \ldots, H_{m-1}(z) \in \mathcal{C}_1$ (sau $\mathcal{C}_2$) și modulele lor, pe cercul $|z| = 1$, notate cu $H(\varphi)$, respectiv $H_1(\varphi), H_2(\varphi), \ldots, H_{m-1}(\varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$.

Se definește parametrul ξ astfel:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} \max_{\varphi} H_i(\varphi)}{\min_{\varphi} H(\varphi)}. \tag{10.26}$$

Dacă $\xi < 1$, atunci $(\forall) z$ cu $|z| = 1$:

$$|H(z)| > \sum_{i=1}^{m-1} |H_i(z)|. \tag{10.27}$$

Demonstrație. Deoarece $H(z), H_1(z), H_2(z), \ldots, H_{m-1}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ (reuniune exclusivă), rezultă că modulele lor își ating extremele în $z = \pm 1$.

Dacă $\xi < 1$, atunci

$$\min_{\varphi} H(\varphi) > \max_{\varphi} H_1(\varphi) + \max_{\varphi} H_2(\varphi) + \ldots + \max_{\varphi} H_{m-1}(\varphi),$$

dar $H(\varphi) \geqslant \min_{\varphi} H(\varphi)$, deci

$$H(\varphi) > \max_{\varphi} H_1(\varphi) + \max_{\varphi} H_2(\varphi) + \ldots + \max_{\varphi} H_{m-1}(\varphi) > H_1(\varphi) + H_2(\varphi) + \ldots + H_{m-1}(\varphi).$$

Cazuri particulare:

- $H(z), H_1(z), H_2(z), \ldots, H_{m-1}(z) \in \mathcal{C}_1$; rezultă:

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} H_i(1)}{|H(-1)|}. \tag{10.28}$$

- $H(z), H_1(z), H_2(z), \ldots, H_{m-1}(z) \in \mathcal{C}_2$; atunci

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{m-1} |H_i(-1)|}{H(1)}. \tag{10.29}$$

Se definește *Indicele de Dominanță Certă* (IDC) prin relația:

$$\text{IDC} = \min_{\varphi} H(\varphi) - \max_{\varphi} H_1(\varphi) - \max_{\varphi} H_2(\varphi) - \ldots - \max_{\varphi} H_{m-1}(\varphi). \tag{10.30}$$

Dacă $\xi < 1$, atunci ICD > 0.

TEOREMA III.1 [20] (de decuplabilitate). Fie $\mathbf{T}(z) = [H_{ij}(z)]_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \in \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Se introduce matricea asociată, $\mathbf{T}^*$, calculată din $\mathbf{T}(z)$ în punctele $z_{1,2} = \pm 1$:

$$\mathbf{T}^* = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}, \tag{10.31}$$

cu

$$a_{ii} = \min_{|z|=1} |H_{ii}(z)|, \; a_{ij} = \max_{|z|=1} |H_{ij}(z)|, \; i \neq j.$$

Pentru funcții $H_{ij}(z) \in \mathcal{C}_1$, minimul modulului se atinge în $z_2 = -1$ și maximul în $z_1 = +1$, iar pentru funcții din $\mathcal{C}_2$ este invers.

Dacă matricea $\mathbf{T}^*$ este Diagonal-Dominantă, atunci, $(\forall)z$, $|z| = 1$, $\mathbf{T}(z)$ este de același tip. (10.32)

Demonstrație. Se remarcă suficiența dar nu și necesitatea teoremei.

Fie linia i din $\mathbf{T}(z)$, fixată. Conform enunțului, $\mathbf{T}^*$ este DD; deci, pentru linia i,

$$\min_{\varphi} H_{ij}(\varphi) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \max H_{ij}(\varphi). \tag{10.33}$$

Ca urmare,

$$\begin{matrix} H_{ii}(\varphi) > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} H_{ij}(\varphi). \\ \vdots \end{matrix} \tag{10.34}$$

Dacă $i = \overline{1, m}$, atunci cele m inegalități din (10.34) reflectă exact diagonal-dominanța matricei $\mathbf{T}(z)$ (cu convenția de notații din etapele anterioare).

Practic, $\mathbf{T}^*$ de tip DD implică $\xi_i < 1$ $(\forall)$ $i = \overline{1, m}$.

OBSERVAȚIE. Dacă $H_{ij}(z)$, unde $i \neq j$, are un pol pe cercul unitate $z_p = +1$, atunci, conform etapei a II-a, cazul a_1, $\max_{\varphi} H_{ij}(\varphi) = +\infty$; deci, $\mathbf{T}(z)$ nu va putea fi diagonala-dominantă. În consecință, numai funcțiile de pe diagonală, $H_{ii}(z)$, pot avea polul $z_p = +1$.

IV. *Introducerea noțiunii de matrice de decuplare*

Dacă $\mathbf{T}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, dar $\mathbf{T}^*$ nu este DD, atunci se caută o matrice diagonală, $\mathbf{C}$, astfel încît $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ să fie DD. Această matrice trebuie să fie diagonală pentru că numai atunci $\mathbf{T}(z)\mathbf{C} \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$; $H_p(z)$, $H_q(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ nu implică și

$$[\alpha H_p(z) + \beta H_q(z)] \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \; (\forall) \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Caracterul diagonal al matricei $\mathbf{C}$ va menține aceeași caracteristică și în ceea ce privește matricea de transfer a RA.

Fie matricea $\mathbf{T}^* = [a_{ij}]$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, calculată conform relației (10.31), admițîndu-se că nu este de tip DD, și $\mathbf{C} \triangleq [\text{diag } c_i]_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $c_i > 0$, matricea

care permite realizarea condiției conform căreia $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ să fie DD ($\mathbf{C}$ nu este unică), adică $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ are aspectul:

$$\mathbf{T}^*\mathbf{C} = [(c_j a_{ij})]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}. \tag{10.35}$$

Se introduce matricea $\mathbf{A} = [(-1)^{1+\delta_i^j} a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, unde

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases} \tag{10.36}$$

este simbolul Kronecker, și vectorul (matricea-coloană):

$$\mathbf{c} = [\operatorname{col} c_i]_{1 \leqslant i \leqslant m},\ c_i \text{ din } \mathbf{C}. \tag{10.37}$$

Cu aceste notații, condiția ca $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ să fie DD se exprimă astfel:

$$c_i a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} c_j a_{ij},\ i = \overline{1, m}. \tag{10.38}$$

Relațiile (10.38) pot fi exprimate sintetic prin condiția de pozitivitate:

$$\mathbf{Ac} > 0,\ \mathbf{c} > 0. \tag{10.39}$$

OBSERVAȚIE. Un vector $\mathbf{v} = [v_i]_{1 \leqslant i \leqslant m} \in \mathbb{R}^m$ este pozitiv, $\mathbf{v} > 0$, dacă $(\forall)\ v_i,\ v_i > 0$. În mod similar, o matrice $\mathbf{Q} = [q_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ este pozitivă, $\mathbf{Q} > 0$, dacă $q_{ij} > 0$.

V. *Matrice de decuplare. Existență și construcție*

În [20] sînt indicate mai multe căi de determinare a matricei $\mathbf{C}$, folosindu-se diverse proprietăți spectrale ale matricei $\mathbf{A}$ sau $\mathbf{A}^{-1}$ (dacă există).

Din (10.36) se observă că matricea $\mathbf{A}$ nu este pozitivă; totodată, dacă există $\mathbf{A}^{-1}$ este posibilă condiția $\mathbf{A}^{-1} > 0$.

Cînd $\mathbf{A}^{-1} > 0$, fie vectorul $\mathbf{d}(\mathbf{d} > 0)$ ales arbitrar și $\mathbf{c} \triangleq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}$. Din condițiile $\mathbf{A}^{-1} > 0$ și $\mathbf{d} > 0$ rezultă $\mathbf{c} > 0$, iar $\mathbf{d} = \mathbf{Ac} > 0$ corespunde exact cerinței (10.39); în continuare, din $\mathbf{c}$ se găsește imediat $\mathbf{C}$.

Teorema Perron-Probenius garantează întotdeauna existența unui vector strict pozitiv, $\mathbf{d} > 0$, dacă $\mathbf{A}^{-1} > 0$ (folosindu-se proprietăți spectrale ale inversei $\mathbf{A}^{-1}$) [17].

Metoda sistematică de definire, existență și construcție a matricelor de decuplare este prezentată în [21].

Se notează

$$\mathcal{C}_T = \{\mathbf{C} / \mathbf{C} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}^+),\ \mathbf{T}^*\mathbf{C} \text{ este DD}\}, \tag{10.40}$$

unde $\mathbf{T}^*$ este matricea numerică definită în enunțul teoremei III.1 (conform aceleiași teoreme, dacă $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ este DD, atunci și $\mathbf{T}(z)\mathbf{C}$ este DD, iar $\mathbf{T}(z)\mathbf{C} \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ dacă $\mathbf{C}$ este diagonală și $\mathbf{T}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$).

Definiția V.1 [21]. O matrice $\mathbf{C} = [\text{diag } c_i]_{1 \leqslant i \leqslant m} > 0$ se numește matrice de decuplare dinamică aproximativă pentru matricea $\mathbf{T}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ dacă $\mathbf{C} \in \mathcal{C}_r$.

Condiția ca $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ să fie DD poate fi pusă sub forma (10.39). Condiția existenței unui vector $\mathbf{c} > 0$, astfel încît $\mathbf{Ac} > 0$, este ca $\mathbf{A}$ să fie o **M**-matrice [13], [11]. Aspectul unei **M**-matrice este identic cu cel al matricei $\mathbf{A}(a_{ij} < 0,\ a_{ii} > 0)$; totodată, proprietățile definitorii sînt echivalente cu:

- $(\exists)\ \mathbf{v} > 0$, astfel încît $\mathbf{Av} > 0$;
- $(\exists)\ \mathbf{A}^{-1}$ și $\mathbf{A}^{-1} > 0$;
- toți minorii principali ai matricei $\mathbf{A}$ sînt pozitivi.

Mulțimea **M**-matricelor/$\mathbb{IR}$ se notează cu $\mathfrak{M}_{\mathbf{M}}$.

Pentru fiecare linie i a matricei $\mathbf{D} \triangleq \mathbf{T}^*\mathbf{C} \triangleq [d_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$ se introduce indicele de dominanță (pe linii):

$$\lambda_i \triangleq \frac{d_{ii}}{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} d_{ij}},\quad i = \overline{1, m}. \tag{10.41}$$

Se intenționează construirea unei matrice $\mathbf{C} > 0$, astfel încît $\lambda_i > 1$ în condițiile $\mathbf{Ac} > 0$.

Pentru simplitate se aleg $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m \triangleq \lambda$.

Matricei $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ i se impun condițiile de dominanță ale diagonalei (pe linii):

$$a_{ii}c_i > \lambda\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} a_{ij}c_j\right),\ i = \overline{1, m}, \tag{10.42}$$

care se pot transcrie matriceal:

$$(\mathbf{A} - (\lambda - 1)\,\mathbf{B})\,\mathbf{c} > 0,\ \mathbf{c} > 0, \tag{10.43}$$

unde

$$\mathbf{B} \triangleq [b_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant m},\ b_{ii} = 0,\ b_{ij} = +a_{ij}.$$

Se notează:

$$\mathbf{L}(\lambda) \triangleq \mathbf{A} - (\lambda - 1)\,\mathbf{B} \in \mathfrak{M}_{\mathbf{M}},\ \text{(ca aspect)} \tag{10.44}$$

și cu Λ — mulțimea de numere reale:

$$\Lambda = \{\lambda / \lambda \in \mathbb{IR};\ \lambda \geqslant 1;\ \mathbf{L}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{M}}\} \tag{10.45}$$

TEOREMA V.1 [21] (de existență a matricelor de decuplare, **C**):

$$\{C_r \neq \Phi\} \leftrightarrows \{\Lambda \neq \Phi\} \tag{10.46}$$

Demonstrație. Suficiența $\Lambda \neq \Phi$ implică $(\exists)\, \lambda \geqslant 1$ și $(\exists)\, \mathbf{c} > 0$, astfel încît $\mathbf{L}(\lambda)\, \mathbf{c} > 0$ sau $\mathbf{Ac} > -(1-\lambda)\, \mathbf{Bc} > 0$; deci, $\mathcal{C}_T \neq \Phi$. Necesitatea $\mathcal{C}_T \neq \Phi$ implică $(\exists)\, \mathbf{C} > 0$, deci $\mathbf{c} > 0$, astfel încît $\mathbf{Ac} > 0$ ($\mathbf{C}$ și $\mathbf{c}$ se construiesc cu aceleași numere, $c_i > 0$).

Dar $\mathbf{A}c = \mathbf{L}(1)\mathbf{c} > 0$ și, ca urmare, $(\exists)\, \lambda = 1 \in \Lambda \neq \Phi$.

Dacă teorema este satisfăcută se alege

$$\lambda \leqslant \lambda^* = \max_{\lambda} \Lambda, \tag{10.47}$$

iar $\mathbf{L}(\lambda) \triangleq \mathbf{L}$ are inversă $\mathbf{L}^{-1} > 0$ ($\mathbf{L} \in \mathfrak{M}_M$).

Se alege arbitrar un vector $\mathbf{d} > 0$, $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^m$ și atunci $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{d} > 0$, deci,

$$\mathbf{c} \triangleq \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d} = [\text{col}\, c_i]_{1 \leqslant i \leqslant m}. \tag{10.48}$$

În final,

$$\mathbf{C} = [\text{diag}\, c_i]_{1 \leqslant i \leqslant m},\ c_i \text{ din } \mathbf{c}. \tag{10.49}$$

OBSERVAȚIE. Vectorul $\mathbf{c} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}$ este monoton crescător pe componente în raport cu $\mathbf{d}$. Valoarea λ^* din (10.47) este independentă de alegerea lui $\mathbf{d} > 0$, depinzînd exclusiv de matricea $\mathbf{A}$ (deci de $\mathbf{T}^*$). Acest aspect permite alegerea vectorului $\mathbf{d}$ de forma:

$$\mathbf{d} = \beta \mathbf{d}_0, \tag{10.50}$$

unde $\beta > 0$ și $\mathbf{d}_0 > 0$ ($\mathbf{d}_0$ este un vector constant minimal în normă, fixat). Atunci, $\mathbf{c} = \beta \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}_0 = \beta \mathbf{c}_0$, iar $\mathbf{C} = \beta \mathbf{C}_0 = \beta\, [\text{diag}\, c_{0i}]_{1 \leqslant i \leqslant m}$. În final, $\mathbf{T}(z)\mathbf{C} = \beta \mathbf{T}(z)\, \mathbf{C}_0 \triangleq \mathbf{T}_f(z)$.

Pentru orice parametru $\beta > 0$, matricea $\mathbf{T}_f(z)$ este DD cu indicele minimal de dominanță λ^*, din (10.47), independent de alegerea lui β și poate fi aproximată prin:

$$\mathbf{T}_f(z) \approx \mathbf{T}_f^D(z) \triangleq \beta\, [\text{diag}\, c_{0i} H_{ii}(z)]_{1 \leqslant i \leqslant m}. \tag{10.51}$$

Indicele $\lambda \leqslant \lambda^*$, ales conform relației (10.47) este minimal. Indicele dinamic $\lambda^D(\varphi)$, definit similar ca în (10.41), pentru $\varphi \in [0, \pi]$ și pentru matricea $\mathbf{T}_f(z) \triangleq \mathbf{T}(z)\, \mathbf{C}$, $z = e^{j\varphi}$, se află în relația $\lambda^D(\varphi) > \lambda^*$ $(\forall)\, \varphi \in [0, \pi]$.

Parametrul β se alege în etapa de sinteză a matricei (diagonale) de transfer a RA din diverse considerente sistemice (margine de amplitudine, eroare de poziție, eroare de viteză etc.).

Exemple

1. Se va studia, conform definiției I.2, decuplabilitatea unei matrice de transfer discrete, prin apartenența ei la clasele definite $\mathcal{C}_1$ sau $\mathcal{C}_2$. Fie matricea $\mathbf{T}(z)$ de ordinul $m = 4$:

$$\mathbf{T}(z)=\begin{bmatrix} \dfrac{15\,(z-0{,}8)}{(z-01)\,(z-0{,}93)} & \dfrac{z-0{,}72}{(z-0,\,55)\,(z-0{,}85)} & \dfrac{2(z-0{,}25)}{(z-0{,}1)\,(z-0{,}3)} & \dfrac{z-0{,}31}{(z-0{,}7)\,(z-0{,}4)} \\ \dfrac{z-0{,}4}{(z-0{,}33)\,(z-0{,}5)} & \dfrac{20\,(z-0{,}6)}{(z-0{,}28)\,(z-0{,}65)} & \dfrac{1{,}6\,(z-0{,}73)}{(z-0{,}56)\,(z-0{,}75)} & \dfrac{z+0{,}35}{(z-0{,}47)\,(z-0{,}58)} \\ \dfrac{z+0{,}5}{(z-0{,}3)\,(z-0{,}4)} & \dfrac{z-0{,}65}{(z-0{,}83)\,(z-0{,}44)} & \dfrac{15\,(z-0{,}83)}{(z-0{,}1)\,(z-0{,}4)\,(z-0{,}9)} & \dfrac{2\,(z-0{,}63)}{(z-0{,}68)\,(z-0{,}3)} \\ \dfrac{(z-0{,}1)\,(z-0{,}65)}{(z-0{,}27)\,(z-0{,}75)\,(z-0{,}85)} & \dfrac{z-0{,}81}{(z-0{,}33)\,(z-0{,}87)} & \dfrac{1}{(z-0{,}71)} & \dfrac{25\,(z-0{,}47)}{(z-0{,}5)\,(z-0{,}6)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}(z)=[H_{pq}(z)]_{1\leqslant p,\,q\leqslant 4}.$$

Examinînd direct fiecare funcție $H_{pq}(z)$, se constată imediat că $H_{pq}(z)\in\mathcal{C}_1$, $(\forall)\ p, q=\overline{1,4}$; deci, $\mathbf{T}(z)\in\mathcal{C}_1$ (cazul cel mai întîlnit).

2. Se consideră matricea $\mathbf{T}(z)$ din primul exemplu. Se intenționează construirea unei matrice diagonale pozitive, $\mathbf{C}=[\operatorname{diag} c_i]_{1\leqslant i\leqslant 4}$ prin verificarea directă a condiției $\mathbf{A}^{-1}>0$, evitînd metoda sistematică din [21].

Conform relațiilor (10.31) și (10.36), se obțin matricele $\mathbf{T}^*$ și $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 12,7 & 4,15 & 2,38 & 3,83 \\ 1,79 & 15,15 & 3,92 & 6,06 \\ 3,57 & 3,67 & 9,38 & 3,3 \\ 11,5 & 2,18 & 3,44 & 15,31 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12,7 & -4,15 & -2,38 & -3,83 \\ -1,79 & 15,15 & -3,92 & -6,06 \\ -3,57 & -3,67 & 9,38 & -3,3 \\ -11,5 & -2,18 & -3,44 & 15,31 \end{bmatrix}$$

Se constată că $\mathbf{A} \not\geqslant 0$ și $\det \mathbf{A} \simeq 3448,037 > 0$. Matricea inversă $\mathbf{A}^{-1}$ este:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,450 & 0,239 & 0,315 & 0,275 \\ 0,385 & 0,289 & 0,321 & 0,280 \\ 0,500 & 0,306 & 0,490 & 0,352 \\ 0,505 & 0,290 & 0,393 & 0,391 \end{bmatrix} > 0.$$

Se alege arbitrar vectorul $\mathbf{d} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^t > 0$ și, evident, $\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} > 0$, de unde $\mathbf{Ab} = \mathbf{d} > 0$, $\mathbf{b} > 0$; deci, $\mathbf{c} \overset{\Delta}{=} \mathbf{b}$ verifică relația (10.39). Cunoscîndu-se $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$, s-a determinat matricea diagonală $\mathbf{C} = [\text{diag } c_i]_{1 \leqslant i \leqslant 4}$, $c_i = pr_i \mathbf{c}$

Rezultă:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1,279 & & & \\ & 1,275 & & \\ & & 1,648 & \\ & & & 1,579 \end{bmatrix}$$

Pentru $\mathbf{C}$ astfel construită, $\mathbf{T}^*\mathbf{C}$ este o matrice de tip DD și, conform teoremei III.1, matricea $\mathbf{T}(z)\mathbf{C}$ va fi de același tip.

3. Pentru o matrice $\mathbf{T}(z)$ dată se construiește o matrice de decuplare $\mathbf{C}$ [21]:

$$\mathbf{T}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{15\,(z-0,8)}{(z-0,1)\,(z-0,93)} & \dfrac{4\,(z-0,72)}{(z-0,55)\,(z-0,85)} & \dfrac{z-0,25}{(z-0,1)\,(z-0,3)} \\ \dfrac{0,1\,(z-0,4)}{(z-0,33)\,(z-0,5)} & \dfrac{40\,(z-0,6)}{(z-0,28)\,(z-0,65)} & \dfrac{z-0,73}{(z-0,56)\,(z-0,75)} \\ \dfrac{z+0,5}{(z-0,3)\,(z-0,4)} & \dfrac{z-0,65}{(z-0,83)\,(z-0,44)} & \dfrac{30\,(z-0,83)}{(z-0,1)\,(z-0,4)\,(z-0,9)} \end{bmatrix}$$

Se verifică imediat apartenența $\mathbf{T}(z) \in \mathcal{C}_1$.

Matricele asociate $\mathbf{T}^*$ și $\mathbf{A}$ sînt:

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 12,7 & 16,6 & 1,19 \\ 0,179 & 30,3 & 2,45 \\ 3,57 & 3,67 & 18,76 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12,7 & -16,6 & -1,19 \\ -0,179 & 30,3 & -2,45 \\ -3,57 & -3,67 & 18,76 \end{bmatrix}$$

Se constată că matricea $\mathbf{T}^*$ nu este de tip DD pe linia a-1-a. Conform relației (10.44), matricea parametrizată $\mathbf{L}(\lambda)$ este:

$$\mathbf{L}(\lambda) = \begin{bmatrix} 21{,}7 & -16{,}6\,\lambda & -\ 1{,}19\,\lambda \\ -\ 0{,}179\lambda & 30{,}3 & -\ 2{,}45\,\lambda \\ -3{,}57\,\lambda & -\ 3{,}67\,\lambda & 18{,}76 \end{bmatrix}$$

Matricea $\mathbf{L}(\lambda) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{M}}$, este o **M**-matricee, dacă toți minorii principali (diagonali) sînt strict pozitivi:

$$\Delta_1 = 12{,}7 > 0;$$

$$\Delta_2 = 192{,}405 - 2{,}971\,\lambda^2 > 0 \text{ pentru } \lambda \in (0\,;\ 11{,}376);$$

$$\Delta_3 = \det \mathbf{L}(\lambda) = -\ 145{,}974\,\lambda^3 - 298{,}658\,\lambda^2 + 7219{,}036.$$

Pentru $\lambda = 3{,}5$, $\Delta_3 < 0$, iar pentru $\lambda = 3$, $\Delta_3 \simeq 589{,}816 > 0$.

Se alege $\lambda = 3 \in (0\,;\ 11{,}376)$, valoare pentru care $\Delta_3 > 0$, deci $\mathbf{L}(3) \in \mathfrak{M}_{\mathbf{M}}$.

Inversa matricii $\mathbf{L}(3)$ este:

$$\mathbf{L}^{-1}(3) = \begin{bmatrix} 0{,}826 & 1{,}651 & 0{,}804 \\ 0{,}150 & 0{,}339 & 0{,}161 \\ 0{,}560 & 1{,}141 & 0{,}607 \end{bmatrix} > 0.$$

Dacă se alege arbitrar vectorul $d = \beta\,[0{,}1\ \ 0{,}1\ \ 0{,}1]^t$, $\beta > 0$, matricea-coloană $\mathbf{c} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{d}$. Deci, $\mathbf{c} = \beta\,[0{,}328\ \ 0{,}065\ \ 0{,}231]^t$. Rezultă matricea de decuplare $\mathbf{C} = \beta\mathbf{C}_0$:

$$\mathbf{C} = \beta \begin{bmatrix} 0{,}328 & & \\ & 0{,}065 & \\ & & 0{,}231 \end{bmatrix}.$$

În definitiv, matricea părții fixate discrete modificate, $\mathbf{T}_f(z) = \mathbf{T}(z)\,\mathbf{C}$, poate fi asimilată în etapa de sinteză cu matricea diagonală:

$$\mathbf{T}_f^D(z) = \beta \begin{bmatrix} \dfrac{4{,}92\,(z-0{,}8)}{(z-0{,}1)\ (z-0{,}93)} & & \\ & \dfrac{2{,}6\,(z-0{,}6)}{(z-0{,}28)\ (z-0{,}65)} & \\ & & \dfrac{6{,}92\,(z-0{,}83)}{(z-0{,}1)\,(z-0{,}4)\,(z-0{,}9)} \end{bmatrix}.$$

Parametrul real $\beta > 0$ se alege conform ultimei observații din §10.4.1, iar indicele de dominantă dinamică $\lambda^D(\varphi)$ al matricei $\mathbf{T}_f(z)$ este $\lambda^D(\varphi) > 3$, $(\forall)\ \varphi \in [0, \pi]$, fiind independent de parametrul β.

10.4.2. Metodă de decuplare dinamică pentru o clasă de sisteme multivariabile discrete cu interacțiuni, cu mai multe frecvențe de eșantionare

Avantajul cel mai important al metodei precedente constă în atingerea simultană a două obiective de proiectare: diminuarea interacțiunilor dintre bucle și, respectiv, posibilitatea sintezei unui RA decuplat.

În cazul anterior (§10.4.1) sistemul automat funcționa pe o frecvență de eșantionare $\frac{1}{T}$ unică; deci — la ieșirea RD — se calculau și emiteau, în intervalul $t \in [kT, (k+1)\,T]$, m comenzi din algoritmi (decuplați) de forma $U_i(z) = H_{R_{ii}}(z)\,\varepsilon_i(z)$. Așadar, $\mathbf{T}_R(z) = [\text{diag}\, H_{R_{ii}}(z)]_{1 \leqslant i \leqslant m}$, $z \stackrel{\Delta}{=} e^{Ts}$.

În cazul în care trebuie luate în considerare toate scalele de timp real ale procesului multivariabil sau (și) timpul de calcul, t_c, necesar pentru determinarea celor m comenzi nu îndeplinește relația $t_c \ll T$, $t_c \leqslant \frac{T}{5 \ldots 10}$, conform diagramei de timp corespunzător algoritmilor cauzali (la limită) (fig. 10.3), atunci, dacă $t_c \neq T$, dar comparabil ca ordin de mărime cu perioada T, RA introduce un „timp mort" fracționar ce duce la înrăutățirea marginii de fază a SA, precum și la alte efecte negative.

De remarcat că perioada T se alege independent de RD, care introduce fizic doar restricția $T \geqslant T_{\min}$, dar dependent de dinamica procesului. Există situații reale cînd și un regulator decuplat (care are doar m și nu m^2 algoritmi scalari de reglare) introduce, datorită performanțelor medii pe care le are, timpul de calcul $t_c \simeq T$. Din acest considerent și din cele care derivă din erorile de cuantificare, în multe aplicații industriale sistemul automat funcționează cu mai multe frecvențe de eșantionare, adecvat alese, funcție de dinamica fiecărui subproces $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \xrightarrow{i} y_i$, $i = \overline{1, m}$.

Toate aceste aspecte impun utilizarea frecvențelor de eșantionare distincte în strînsă corelație cu dinamica proprie a subsistemelor $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \xrightarrow{i} \xrightarrow{i} y_i$, $i = \overline{1, m}$.

În [22] se conformă valabilitatea metodei de decuplare din § 10.4.1 și pentru astfel de sisteme.

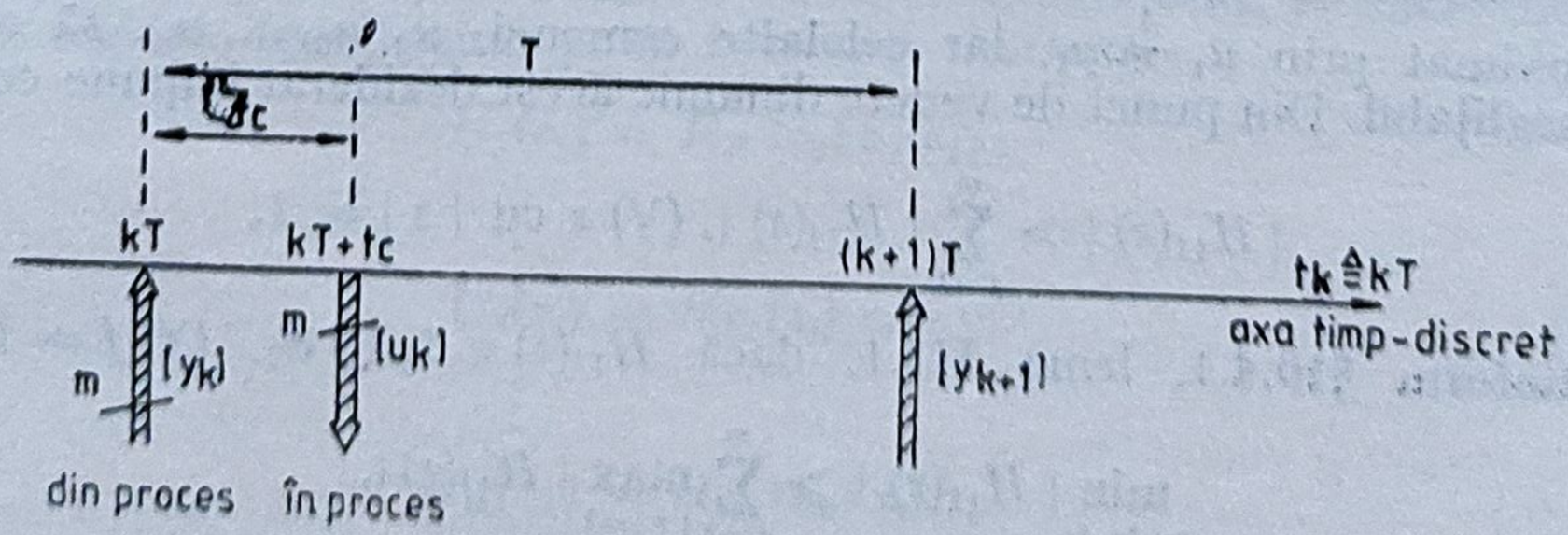


Fig. 10.3

Se atașează fiecărui subsistem $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \xrightarrow{1} y_i$ o frecvență de eșantionare, $f_i \triangleq \frac{1}{T_i}$ (în caz maximal pot fi m frecvențe distincte):

$$\begin{aligned} Y_1(z_1) &= \sum_{j=1}^{m} H_{1j}(z_1)\, U_j(z_1), \\ &\vdots \\ Y_i(z_i) &= \sum_{j=1}^{m} H_{ij}(z_i) U_j(z_i), \qquad (10.52) \\ &\vdots \\ Y_m(z_m) &= \sum_{j=1}^{m} H_{mj}(z_m) U_j(z_m), \end{aligned}$$

unde variabilele z_i ale transformării discrete $\mathfrak{S}$ sînt definite prin $z_i \triangleq e^{T_i s}$, $i = \overline{1, m}$.

Deoarece $z_i \neq z_j$, dacă $T_i \neq T_j$, atunci rezultă că și transformatele $\mathfrak{S}$ ale aceleiași ieșiri de reglare a RD, $U_p(z)$ (p — arbitrar) sînt diferite, adică $U_p(z_i) \neq U_p(z_j)$; ca urmare, $\mathfrak{S}^{-1}\{U_p(z_i)\} \neq \mathfrak{S}^{-1}\{U_p(z_j)\}$, $i \neq j$. Cu alte cuvinte, același canal fizic de ieșire al RD, notat cu U_p, furnizează m valori, dar la m momente diferite de timp, conform alegerii parametrilor $T_1, T_2, \ldots, T_m$. În acest context, relația (10.52) nu mai poate fi scrisă sintetic sub forma matriceală consacrată

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{T}(z)\, \mathbf{U}(z), \qquad (10.53)$$

ca și în [20], [21] sau §10.3.2.

Se pune totuși problema decuplării dinamice aproximative pentru sisteme discrete multivariabile cu aspectul din (10.52). Considerînd doar prima relație (10.52), în care pentru simplitate se omite indicele 1, se scrie:

$$Y_1(z) = \sum_{j=1}^{m} H_{1j}(z) U_j(z), \quad z \triangleq e^{T_1 s}, \qquad (10.54)$$

Se dorește ca modelul cu interacțiuni $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \xrightarrow{1} y_1$ să poată fi aproximat prin $u_1 \xrightarrow{1} y_1$, iar celelalte comenzi, $u_2, u_3, \ldots, u_m$, să aibă un efect neglijabil. Din punct de vedere dinamic acest deziderat impune condiția:

$$|H_{11}(z)| > \sum_{j=1}^{m} |H_{1j}(z)|, \ (\forall)\ z \text{ cu } |z| = 1. \qquad (10.55)$$

Conform §10.4.1, lema III.1, dacă $H_{1j}(z) \in \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$, $(\forall)\ j = \overline{1, m}$ și

$$\min_{|z|=1} |H_{11}(z)| > \sum_{j=2}^{m} \max_{|z|=1} |H_{1j}(z)|, \qquad (10.56)$$

atunci este îndeplinită și relația (10.55).

Dacă $H_{1j}(z) \in \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$, $j = \overline{1, m}$, dar relația (10.56) nu este îndeplinită atunci se caută un m numere pozitive $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, astfel încît

$$c_1 \min_{|z|=1} |H_{11}(z)| > \sum_{j=2}^{m} c_j \max_{|z|=1} |H_{1j}(z)|. \tag{10.57}$$

Se notează:

$$a_{11} = \min_{|z|=1} |H_{11}(z)| = |H_{11}(\pm 1)|,$$

$$a_{1j} = \max_{|z|=1} |H_{1j}(z)| = |H_{1j}(\pm 1)|, \; j = \overline{2, m};$$

atunci, relația (10.57) se mai scrie:

$$c_1 a_{11} > \sum_{j=2}^{m} c_j a_{1j}. \tag{10.58}$$

Dacă întreaga operație corespunzătoare liniei $i = 1$, se repetă pentru fiecare din liniile $i = \overline{2, m}$, se pot găsi în final m^2 numere pozitive, c_{ij}, cîte m pentru fiecare linie, deci $\{c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{im}\}$, $i = \overline{1, m}$.

Se dorește însă un singur m-uplu de numere $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ valabil la toate frecvențele de eșantionare (adică pentru toate liniile $i = \overline{1, m}$). Numai în acest caz matricea RA este diagonală, avantaj care trebuie menținut și prin această metodă.

Restricția (10.58), extinsă în caz general pentru toate liniile, devine:

$$c_{ii} a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} c_{ij} a_{ij}, \; i = \overline{1, m}, \tag{10.59}$$

care, în condițiile utilizării a numai m numere $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, devine:

$$c_i a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} c_j a_{ij}, \; i = \overline{1, m}. \tag{10.60}$$

Relațiile (10.60) se transcriu prin $\mathbf{T^*C} - \mathrm{DD}$, sau, echivalent, $\mathbf{Ac} > \mathbf{0}$, $\mathbf{c} > 0$.

În final, RA nu va mai fi descris printr-o matrice de transfer diagonală, ci prin m funcții (scalare) de transfer, corespunzătoare celor m bucle independente de reglare, funcționînd pe m frecvențe distincte:

$$\begin{aligned}
U_1(z_1) &= H_{R_1}(z_1)\, \varepsilon_1(z_1); \\
&\vdots \\
U_i(z_i) &= H_{R_i}(z_i)\, \varepsilon_i(z_i); \\
&\vdots \\
U_m(z_m) &= H_{R_m}(z_m)\, \varepsilon_m(z_m).
\end{aligned} \tag{10.61}$$

Structura RA din (10.61) este simplificată la maxim. La fiecare tact de eșantionare, T_i, în UC al RD este rezident doar algoritmul de reglare mo-

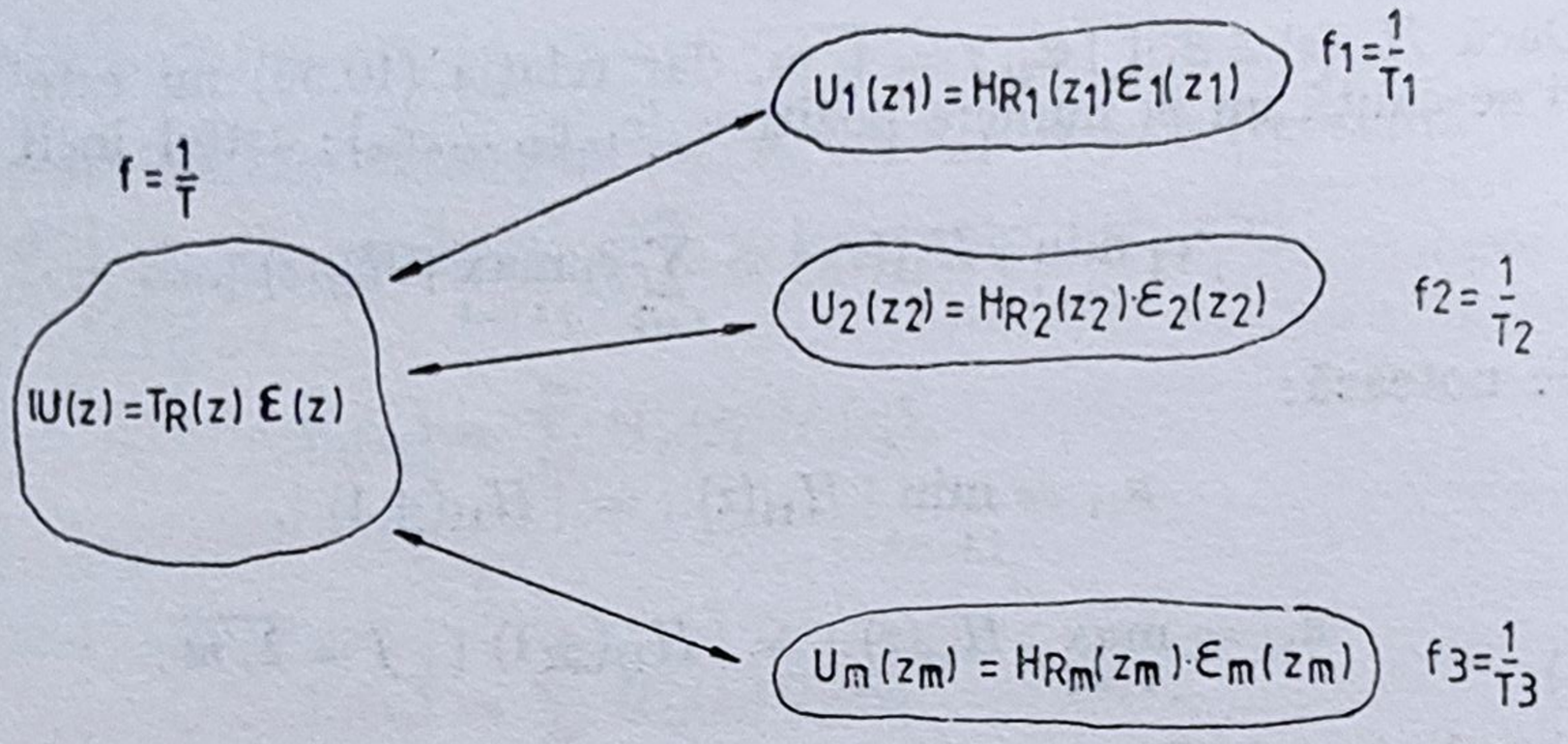


Fig. 10.4

novariabil i/e aferent buclei i (parametrului reglat y_i), și nu m algoritmi ca și în cazul precedent (§ 10.4.1), situație ilustrată în fig. 10.4. Se obțin astfel importante reduceri ale timpului de calcul, t_{ci}, care poate satisface acum condiția $t_{ci} \ll T_i$ și permite efectuarea pe întreaga perioadă $t \in [kT_i + t_c, (k+1)\,T_i]$ și a altor *task*-uri de timp real.

Creat astfel, timpul real disponibil se poate utiliza pentru mărirea complexității algoritmilor monovariabili de reglare (algoritmi adaptivi, cu structură variabilă, neliniari etc.). În plus, prin alegerea adecvată a perioadelor de eșantionare rezultă modele discrete și algoritmi de reglare „echilibrați din punct de vedere numeric" (bine condiționați numeric în condițiile aritmeticii finite a RD).

Exemplu. Fie matricea de transfer de ordinul 3, $\mathbf{T}_p(s)$, care descrie partea fixată $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{T}_p(s)\,\mathbf{U}(s)$:

$$\mathbf{T}_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{20}{0{,}2s+1} & \frac{2}{0{,}5s+1} & \frac{1}{0{,}3s+1} \\ \frac{1{,}5}{10s+1} & \frac{20}{30s+1} & \frac{2}{40s+1} \\ \frac{1}{500s+1} & \frac{1}{750s+1} & \frac{100}{1000s+1} \end{bmatrix}; \mathbf{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix}; \mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}.$$

Folosindu-se extrapolatorul de ordinul zero pentru modelul general $\frac{K_f}{1+T_f s}$, se obține modelul discret:

$$H_f(z) \triangleq (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left\{\frac{K_f}{s(1+T_f s)}\right\} = \frac{K_f(1-b)}{z-b}, \quad b \triangleq e^{-\frac{T}{T_f}}.$$

Prin examinarea liniilor matricei $\mathbf{T}_p(s)$, se evidențiază trei scale de timp $\{0{,}2\text{ s} \ldots 0{,}5\text{ s}\}$, $\{10\text{ s} \ldots 40\text{ s}\}$ și $\{500\text{ s} \ldots 1\,000\text{ s}\}$, corespunzătoare celor trei subsisteme ale părții fixate $\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{1} y_1$, $\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{2} y_2$ $\{u_1, u_2, u_3\} \xrightarrow{3} y_3$.

Dacă pentru aceste subsisteme se utilizează — acoperitor — o perioadă de eșantionare unică foarte mică, de exemplu $T = 0{,}1$ s, atunci, după apli-

carea transformării discrete $\mathfrak{S}$, modelele discrete ale liniei a 3-a a matricei, conform relației generale de mai sus, ar avea poli foarte apropiați de $z = +1$. De exemplu, $e^{-\frac{0.1}{750}} \simeq 0{,}99987$, iar $e^{-\frac{0{,}1}{1000}} \simeq 0{,}9999 \simeq 1$ în condițiile aritmeticii finite a RD. Deoarece se folosesc modelele explicite ale părții fixate discrete, algoritmii de reglare au zerouri cvasiunitare. Pe lîngă înrăutățirea marginii de fază a sistemului închis se poate introduce eroare de poziție nenulă ($H_R(1) \neq \infty$, polul $z_R = +1$ de la numitorul lui $H(z)$ se simplifică cu polul cvasiunitar introdus de modelul discret al părții fixate, $H_R(z) = \frac{z-b}{K_f(1-b)} \frac{H_0(z)}{1-H_0(z)}$ și $1 - H_0(1) = 0$; deci, $H_R(z) = \frac{H_0(z)}{\widetilde{H}_0(z)}$, $H_R(1) \neq \infty$.

Dacă s-ar utiliza o perioadă de eșantionare unică, $T \geqslant 0{,}1$ s, erorile de cuantificare în amplitudine pentru modelele cu dinamică rapidă ale liniei întîi ar fi inadmisibil de mari.

În consecință, se aleg perioade de eșantionare diferite, corespunzătoare dinamicii fiecărui subsistem, $T_1 = 0{,}1$ s, $T_2 = 5$ s, $T_3 = 100$ s, valori în plaja $\frac{\min T_{fij}}{2 \ldots 10}$ pentru fiecare linie $i = \overline{1,3}$ a matricei $\mathbf{T}_p(s)$.

Aplicîndu-se transformata $\mathfrak{S}$, se obține matricea discretă. :

$$\mathbf{T}_f(z_1, z_2, z_3) = \begin{bmatrix} \frac{7{,}88}{z_1 - 0{,}606} & \frac{0{,}364}{z_1 - 0{,}819} & \frac{0{,}284}{z_1 - 0{,}716} \\ \frac{0{,}589}{z_2 - 0{,}606} & \frac{3{,}06}{z_2 - 0{,}846} & \frac{0{,}234}{z_2 - 0{,}882} \\ \frac{0{,}181}{z_3 - 0{,}818} & \frac{0{,}124}{z_3 - 0{,}875} & \frac{9{,}5}{z_3 - 0{,}904} \end{bmatrix} \in \mathcal{C}_1,$$

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} 4{,}907 & 2{,}011 & 0{,}999 \\ 1{,}496 & 1{,}658 & 1{,}983 \\ 0{,}994 & 0{,}992 & 4{,}989 \end{bmatrix},$$

scrisă simbolic pentru $z_1 \triangleq e^{0{,}1s}$, $z_2 \triangleq e^{5s}$, $z_3 \triangleq e^{100s}$, deoarece, la T_1, T_2 și T_3, fiecare din comenzile discrete $U_1^*(s)$, $U_2^*(s)$, $U_3^*(s)$ va avea trei aspecte diferite, respectiv $U_1(z_1)$, $U_1(z_2)$, $U_1(z_3)$; $U_2(z_1)$, $U_2(z_2)$, $U_2(z_3)$; $U_3(z_1)$, $U_3(z_2)$, $U_3(z_3)$.

Pentru matricea asociată, $\mathbf{T}^*$, se aplică procedura descrisă în §10.4.1, etapa IV [21], sau în exemplul 3 (§ 10.4.1), obținîndu-se matricea de decuplare neunică, $\mathbf{C} = \beta \mathbf{C}_0$, unde $\beta > 0$ este ales arbitrar,

$$\mathbf{C} = \beta \begin{bmatrix} 28{,}408 & & \bigcirc \\ & 53{,}69 & \\ \bigcirc & & 18{,}262 \end{bmatrix} \triangleq \beta \begin{bmatrix} c_1 & & \bigcirc \\ & c_2 & \\ \bigcirc & & c_3 \end{bmatrix}.$$

Cu matricea **C** construită se realizează condiția ca **T*C** să fie de tip DD pe linii; ca urmare, $T_f(z_1, z_2, z_3)$ **C** este de tipul menționat.

Proprietatea de diagonal-dominanță pe linii a matricei $T_f(z_1, z_2, z_3)$ **C** permite, în etapa de sinteză a algoritmilor de reglare, omiterea elementelor nediagonale în calculele de proiectare. Matricea modificată a părții fixate, cu $\beta = 10^{-2}$, este o matrice diagonală:

$$\mathbf{T}_f^D(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} \dfrac{2{,}238}{z_1 - 0{,}606} & & \\ & \dfrac{1{,}643}{z_2 - 0{,}846} & \\ & & \dfrac{1{,}735}{z_3 - 0{,}904} \end{vmatrix} \triangleq [\text{diag } H_{fi}^D(z_i)]_{1 \leqslant i \leqslant 3},$$

$$\mathbf{T}_f^D(z_1, z_2, z_3) \simeq \mathbf{T}_f(z_1, z_2, z_3)\ \mathbf{C}.$$

Prin determinarea matricei $\mathbf{T}_f^D(z_1, z_2, z_3)$, prima etapă — cea de diminuare a interacțiunilor — este încheiată.

Matricea de transfer discretă a regulatorului este o matrice diagonală, regulatorul multivariabil decuplat fiind încadrat în schema-bloc din figura 10.5.

Din punctul de vedere al regulatorului decuplat, descris prin matricea diagonală $\mathbf{T}_R^D(z)$, partea fixată modificată, $\mathbf{T}_f^D(z)$, este considerată tot o matrice diagonală.

Funcțiile scalare discrete de transfer, $H_{R_1}(z_1)$, $H_{R_2}(z_2)$ și $H_{R_3}(z_3)$, se proiectează în contextul consacrat al teoriei sistemelor monovariabile, conform schemei-bloc tipice a unui SA (fig. 10.6). Funcțiile $H_{fi}^D(z_i)$, $i = \overline{1, 3}$ sînt elementele diagonale ale matricei $T_f^D(z_1, z_2, z_3)$.

Proiectarea algoritmilor de reglare $H_{Ri}(z_i)$

Funcțiile $H_{Ri}(z_i)$ se proiectează prin metoda poli-zerouri, utilizîndu-se rutina de proiectare algoritmizată PZ și nomogramele $\sigma = \sigma_\xi$[24].

Pentru simplificarea exemplificării, tuturor celor trei bucle de reglare li se impun specificații identice.

Deoarece partea fixată discretă, $H_{fi}^D(z_i)$, nu are zerouri, zeroul funcțiilor $H_0(z_i)$ se alege liber. Se impun condițiile $\sigma \leqslant 8\%$ și $t_{ri} = 6T_i$, $i = \overline{1, 3}$.

Durata regimurilor tranzitorii indiciale diferă:

$$t_{r_1} = 6\,T_1 = 0{,}6 \text{ s};\ t_{r_2} = 6\,T_2 = 30 \text{ s};\ t_{r_3} = 6\,T_3 = 600 \text{ s}.$$

Folosindu-se rutina amintită, se obțin zeroul $\tilde{x} = -0{,}6151$ și polii $\hat{p}_{1,2} = 0{,}5134 \cdot e^{\pm j.47{,}085°}$, pentru $\xi = 0{,}63$ și $\alpha = -48°$.

Din condiția de eroare de poziție nulă, rezultă $K_0 = 0{,}3495$. Deci, toate buclele automate monovariabile au funcția de transfer a sistemului închis, $H_0(z)$, descrisă prin:

$$H_0(z) = \frac{0{,}3495\,(z + 0{,}6151)}{z^2 - 0{,}6991z + 0{,}2636},\quad z = z_1, z_2, z_3.$$

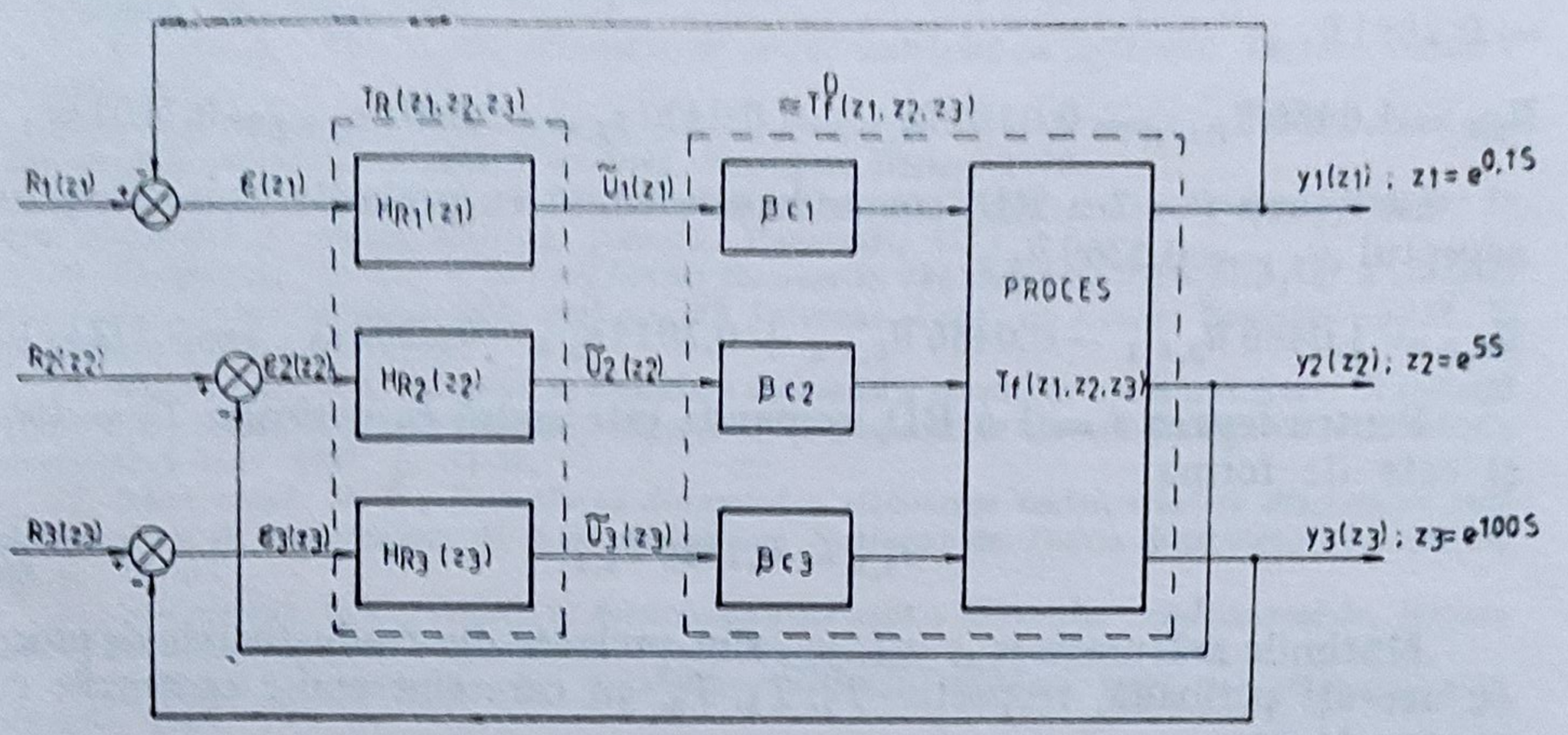


Fig. 10.5

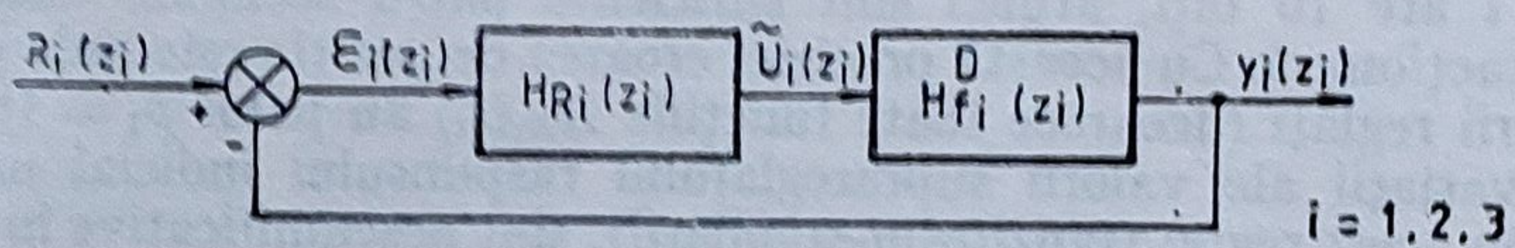


Fig. 10.6

Din formula generală:

$$H_R(z) = \frac{1}{H_{fi}(z)} \frac{H_0(z)}{1 - H_0(z)},$$

pentru $H_{fi}(z) = H^0_{fi}(z)$ și $z = z_1, z_2, z_3$ se obțin funcțiile:

$$H_{R_1}(z_1) = \frac{0{,}1562\, z_1^2 + 0{,}0014\, z_1 - 0{,}0582}{z_1^2 - 1{,}0486\, z_1 + 0{,}0486} = \frac{\tilde{U}_1(z_1)}{\varepsilon_1(z_1)},$$

$$H_{R_2}(z_2) = \frac{0{,}2127\, z_2^2 - 0{,}0491\, z_2 - 0{,}1107}{z_2^2 - 1{,}0486\, z_2 + 0{,}0486} = \frac{\tilde{U}_2(z_2)}{\varepsilon_2(z_2)},$$

$$H_{R_3}(z_3) = \frac{0{,}2014\, z_3^2 - 0{,}0582\, z_3 - 0{,}112}{z_3^2 - 1{,}0486\, z_3 + 0{,}0486} = \frac{\tilde{U}_3(z_3)}{\varepsilon_3(z_3)};$$

totodată, comenzile la ieșirea RD sînt:

$$U_1(z_1) = \beta c_1 \tilde{U}_1(z_1) \simeq 0{,}2841\, \tilde{U}_1(z_1),$$

$$U_2(z_2) + \beta c_2 \tilde{U}_2(z_2) \simeq 0{,}5369\, \tilde{U}_2(z_2),$$

$$U_3(z_3) = \beta c_3 \tilde{U}_3(z_3) \simeq 0{,}1826\, \tilde{U}_3(z_3).$$

În final, algoritmul de reglare multivariabil complet se implementează sub forma:

$$\tilde{u}_{1,k} = 1{,}0486\, \tilde{u}_{1,k-1} - 0{,}0486\, \tilde{u}_{1,k-2} + 0{,}1562\, \varepsilon_{1,k} + 0{,}0014\, \varepsilon_{1,k-1} - 0{,}0582\, \varepsilon_{1,k-2}.$$

Comanda la ieșirea $i=1$, a RD este emisă cu perioada $T_1 = 0{,}1$ s și este $u_{1,k} = 0{,}2841\,\tilde{u}_{1,k}$;

$$\tilde{u}_{2,k} = 1{,}0486\,\tilde{u}_{2,k-1} - 0{,}0486\,\tilde{u}_{2,k-2} + 0{,}2127\,\varepsilon_{2,k} - 0{,}0491\,\varepsilon_{2,k-1} - 0{,}1107\,\varepsilon_{2,k-2}.$$

La ieșirea $i = 2$ a RD, comanda este emisă cu perioada $T_2 = 5$ s și are aspectul $u_{2,k} = 0{,}5369\,\tilde{u}_{2,k}$;

$$\tilde{u}_{3,k} = 1{,}0486\,\tilde{u}_{3,k-1} - 0{,}0486\,\tilde{u}_{3,k-2} + 0{,}2014\,\varepsilon_{3,k} - 0{,}0582\,\varepsilon_{3,k-1} - 0{,}112\,\varepsilon_{3,k-2}.$$

Pentru ieșirea $i = 3$ a RD, comanda este emisă cu perioada $T_3 = 100$ s și este de forma:

$$u_{3,k} = 0{,}1826\,\tilde{u}_{3,k}.$$

Mărimile măsurate $y_{1,k}$, $y_{2,k}$, $y_{3,k}$ sînt preluate din traductoarele de proces cu aceeași perioadă, respectiv T_1, T_2, T_3, cu care sînt emise comenzile corespunzătoare.

Dacă aritmetica folosită în RD este cea fracționară, iar cuvîntul de calculator, l are 16 biți, atunci sînt suficiente patru zecimale exacte pentru partea fracționară. Cu această precizie, eroarea de poziție este nulă pentru toți parametrii reglați (deoarece toate funcțiile $H_{R_i}(z_i)$ au polul $p_1 = 1$), iar eventualele variații ale valorii suprareglajului răspunsului indicial unitar, ales de 8% (în acest regim tranzitoriu-standard), sînt nesemnificative în regimurile reale (industriale) de lucru ale SA.

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu, V., *Introducere în teoria structurală a sistemelor liniare*, Editura Academiei R.S.R., București, 1975.
2. Wolovich, W. A., *Linear Multivariable Systems*, Springer, New York, 1974.
3. Rosenbrock, H. H., *On the design on linear multivariable control systems*, Proc. Third IFAC, Congr. London, 1, 1966, p. 1-16.
4. Rosenbrock, H. H., *Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array*, Proc. IEE, 116, 11, 1969.
5. Mac Farlane, A. G. J., *The return-difference and return-ratio matrices and their use in the analysis and design of multivariable feedback control systems*, Proc. IEEE, 117, 1970, p. 2 037-2 043.
6. Mc Morran, P. D., *Extension of the invers Nyquist method*, Electron. Lett., 6, 1970 p. 800-811.
7. Teodorescu, D., *Sisteme automate deterministe*, Editura Tehnică, București, 1984.
8. Falb, P. L.; Wolovich, W. A., *Decouling in the design and synthesis of multivariable control system*, IEEE Trans., AC-12, 1967, p. 651-659.
9. Sinha, P. K., *A new condition for output Feedback decoupling of Multivariable Systems*, IEEE Trans., AC-24, 3, 1978, p. 476-478.
10. Wang, S. H.; Davison, E. J., *Design of decoupling control systems — A frequency domain approach*, Int. J. Control, 21, 1975, p. 529-536.
11. Voicu, M., *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1986.
12. Ostrowski, M. A., *Notes on bounds for determinants with dominant principal diagonals*, Proc. AMS, 3, 1952, p. 26-30.
13. Ostrowski, M. A., *Determinanten mit uberwiegender Hauptdiagonale, und die absolute Konvergenz von linearen Iterations-prozessen*, Coment. Math. Helvet, 30, 1955.
14. Luntz, R., Munro, N.; Mc Leod, R. S., *Computer aided design of multivariable control systems*, Fourth VKAC' IEE, 1971.
15. Călin, S., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976.

16. Ionescu, T., *Sisteme și echipamente pentru conducerea proceselor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
17. Leonte, A.; Vraciu, G., *Elemente de calcul matricial cu aplicații*, Editura Tehnică, București, 1975.
18. Postlethwaite, I.; Mac Farlane, J.G.A., *Complex Variable Approach to the Analysis of Linear Multivariable Feedback Systems*, Springer, Berlin, 1979.
19. Cernețki, V. I., Diduk, G. A.; Potapenko, A. A., *Metode matematice și algoritmi în studiul sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1973.
20. Sângeorzan, D. C., *A self-sufficient theorem in the dynamic decoupling of a class of sampled-data, linear, multivariable systems*, 7th Internat. Conf. on Contr. Systems—SAII 7, 1, București, 1987, p. 241-246.
21. Sângeorzan, D. C., *Matrici de decuplare dinamică a sistemelor cu eșantionare. Existență și construcție*, Simpozionul „Structuri, algoritmi și dispozitive de conducere a proceselor", Universitatea Iași, 1987, p. 31-36.
22. Sângeorzan, D. C., *Decuplarea dinamică a sistemelor multivariabile discrete, cu mai multe frecvențe de eșantionare*, Al 5-lea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova 1988, p. 98-103.
23. Sângeorzan, D. C., *Tehnici în decuplarea dinamică a sistemelor multivariabile, liniare discrete*, Primul Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1980, p. 167-171.
24. Călin, S.; Dumitrache, I., *Regulatoare automate*, Editura Didactică și Pedagogică București, 1985.

Capitolul 11

ASPECTE COMPARATIVE ŞI CRITERII DE ANALIZĂ PRIVIND CONCEPŢIA REGULATOARELOR DIGITALE DE SERIE

11.1. FUNCȚII ȘI CRITERII DE ANALIZĂ A RD

Principalele funcții și criterii de analiză a diverselor RD existente pe piața mondială, îndeosebi monocanal, pe lîngă

• *Gabaritul*. Dimensiunile panoului, $a \times b$, și lungimea, l, sînt de regulă înscrise în limitele $a \times b = 48 \times 96$ mm² sau 96×96 mm².

Pentru RD din sistemele unificate de reglare, $a \times b = 72 \times 144$ mm² sau 192×288 mm², ultimele dimensiuni fiind întîlnite la RD multicanal sau cu programator intern;

Lungimea $l \simeq 180$ mm $\div$ 250 mm (pentru $a \times b$ din prima categorie) sau $l \simeq 300$ mm $\div$ 360 mm (pentru $a \times b$) din ultima categorie de RD);

• *Greutatea* este cuprinsă în plaja de valori $1 \div 8$ kg, variind la RD multicanal sau cu programator intern;

• *Consumul* orientativ este cuprins între 9 și 40 VA,

sînt:

11.1.1. Precizia generală și fiabilitatea

Precizia generală este de aproximativ $0{,}2 \div 0{,}5\%$.

Fiabilitatea se referă la următoarele aspecte: acționarea neavizată pe taste; reducerea comenzilor pe panoul frontal și utilizarea unui panou lateral cu acces protejat; reluarea activității RD la revenirea tensiunii de alimentare prin inițializări tipice; asigurarea cu baterii-tampon a memoriilor de date RAM sau utilizarea de memorii REPROM; memorarea neelectrică a parametrilor de acordare și a referinței interne (decade BCD); autotestarea în timp real a conversiilor A/N, N/A, memoriilor, UC, afișaje etc.

11.1.2. Algoritmi de reglare

Cei mai uzuali algoritmi de reglare numerică implementați în RD sînt de tip PID și *lead-lag*.

Componenta integrală, I, este limitată sau blocată de la anumite niveluri ale erorii buclei pentru a mări rapiditatea răspunsului.

Componenta derivativă, D, este introdusă fie pe canalul erorii, ε, fie pe canalul măsurii, y.

Unele RD utilizează algoritmi PID cvasicontinui, dar cu ieșiri discontinue (comenzi modulate în durată) de tipul PID-*time proportioning*. De menționat că se folosesc și algoritmi cu intrări (referințe) polarizate, de tip PID-BIAS, în care referința externă este însumată algebric („deplasată") cu o mărime programabilă fixată de operator, sau externă.

Majoritatea algoritmilor PID includ și operarea cu „zonă moartă", ZM, destinată reducerii sensibilității buclei la perturbații de MF și IF.

Datorită facilităților oferite de tehnicile *software*, în RD moderne este realizat și elementul de raport, utilizîndu-se algoritmi de tip PID-RATIO. Diversele funcții descrise anterior sînt combinate (programabil) în același RD.

Produsele de nivel mondial dispun de algoritmi de reglare adaptivi sau cu autoacordare *(self-tuning)*, îndeosebi cele destinate proceselor lente, la care perioada de eșantionare a SA permite efectuarea unui număr mărit de calcule matematice în timp real.

Tendința actuală în domeniul RD este de a utiliza o structură hardware cvasiuniversală; dedicarea unui RD pentru o aplicație dată nu modifică decît memoriile ROM care conțin algoritmii cei mai adecvați de reglare (nu neapărat PID).

Parametrii de acordare ai algoritmilor PID discreți au diverse plaje de valori. În tabelul 11.1 sînt prezentate asemenea valori pentru cîteva produse tipice [3].

Tabelul 11.1

PARAMETRII DE ACORDARE

Firma	BP(%) (K_R)	T_i	T_d	Alte performanțe
1	2	3	4	5
Hartmann-Brown (H&B)	1-1850%	1-2 000 s	1-2 000 s 1s—200 min	
Fenwall	0-49,9%	0-20 min.	0-9 min.	—
Sereg	1-500%	0-1 999 s	0-199 s	—
Coreci	0-199,9%	0-199,9 min.	0-199,9 min.	—
Datron	K_R =0,1-9,9	0-99 min.	0-99 min.	—
Reguen	0-100%	1-2 000 s	1-180 s	—
Kent	1-500%	1-1 900 s	0-600 s	BIAS: 0÷+80% RAPORT :0,1÷9,9 ZM :0,5÷5% PID-TIME PROPORT. $T_c = 2 \div 6$ s
Dicon	0-15%	T_i=4,4 Td	T_d=32,64, 128,256 s	—
Paab	0,3-999(%)	0,6-1 000 s	0,6-1 800 s	RAPORT: 0,1÷10
KS 4580 Philips	0,1-400(%)	1—3 600 s	1-1 200 s	ZM=0-20(%)
Omron	0-99%	0—9 min.	0-2,25 min.	—

Tabelul 11.1 (continuare)

1	2	3	4	5
Ramsco	K_R = 1-255	(0,3 . . . + ∞)s	0-12,7 min.	PID-TIME PROPORT. $T_c = 1 \div 255$ s
Microcor	0-500%	0-200 min.	0-600 s	BIAS: $0 \div \pm 100\%$ PID-TIME PROPORT. $T_c = 1 \div 200$ s self-tuning
UDC-5 000 Honneywell	0-99,99	0-3 000 s	0-10 min.	ZM: 5—25% BIAS: $0 \div + 100\%$ RAPORT: $0,1 \div 10$
Ero	1-200%	10s-100 min.	1 s-99 min.	self-tuning
Lfe	1-200%	0,16-1 200 s	0,01-5 min.	ADAPTIV

Deoarece RD ilustrate în tabelul 11.1 lucrează în regim cvasicontinuu ($T < 0,1 \sum_i T_{pi}$), acordarea se face prin metodele specifice cazului continuu.

În tabelul 11.2 sînt ilustrate cîteva valori ale perioadei de eşantionare.

Tabelul 11.2

PERIOADA DE EŞANTIONARE [3]

Firma	Perioada de eşantionare, T ([ms]	Obs.
TDC 2000	333	—
UDC 4000 Honneywell	500	—
Ramsco	133	—
Ero	3 500	*self-tuning* Procese lente
Siemens (Teleperm D)	100	—
Kent 4 000 H-FM	125 (250)	—
RM-16 (IPA-Bucureşti)	333	—

11.1.3. Funcţii auxiliare

Funcţiile auxiliare sînt implementate prin *software*, substituind module tipice *hardware* din sistemele analogice de reglare. Dintre funcţiile auxiliare implementate uzual menţionăm: liniarizarea caracteristicii traductoarelor; corecţia şi compensarea traductoarelor; calculul unor parametri sau mărimi sistemice (reacţie calculată din valori măsurate), precum şi al valorilor de alarmare (funcţia de eroare, măsură, comandă), de limitare, normare şi sca-

lare; limitarea comenzii absolute, a gradientului referinței externe și a gradientului comenzii automate; calculul referinței-program; operațiuni logice între diverse variabile binare de intrare.

11.1.4. Regimuri de lucru. Posibilități de configurare

Se utilizează regimuri de lucru cu comenzi locale sau de la distanță, depinzînd de configurația sistemului distribuit de conducere, în care este inclus, pe nivelul primar, RD.

Regimurile de lucru locale sînt manuale (M), automate (A), acordate și autoacordate.

• În regim manual, bucla automată este întreruptă, iar ieșirea RD, în proces, se face sub comanda locală a operatorului. În acest regim se efectuează și diversele inițializări de coeficienți, parametri sau configurații sistemice, se fixează noua valoare a mărimii de referință (dacă este internă) și se caută aducerea măsurii (ieșirii procesului, y), prin comenzi manuale, la valoarea fixată a referinței, pentru a elimina sau diminua șocul care apare în momentul comutării M → A.

• Regimul automat se caracterizează printr-o inițializare corectă a filtrelor numerice și a algoritmilor de reglare; în acest mod se elimină parțial sau total șocul trecerii de la comenzile manuale la cele automate. Șocul inițial este proporțional cu eroarea inițială a buclei închise. Dacă această eroare este nulă, atunci comanda automată inițială coincide cu cea manuală și se menține atît timp cît eroarea buclei închise să rămînă cvasinulă. Practic însă, datorită perturbațiilor parametrice și externe ale procesului, eroarea buclei închise devine rapid nenulă și algoritmii de reglare generează comenzi dinamice, diferite de comanda inițială. Acest regim (A) este cu durata maximă, atingîndu-se funcționalitatea dorită a RD.

La trecerea A → M șocul de comandă se elimină prin inițializarea comenzii M cu ultima valoare a comenzii automate (prin scheme *hardware*). Eliminarea șocului de comandă la trecerea M → A se face prin inițializarea algoritmilor de reglare cu ultima valoare a comenzii manuale.

• În regim de acordare se utilizează diverse strategii propuse de proiectantul RD. La configurațiile multibuclă (de exemplu, CASCADĂ) fiecare din acestea este acordată independent, folosindu-se multiplexat aceleași console, tastaturi, afișaje digitale, bargraphe etc. Acordarea se finalizează prin definirea concretă, numerică, a tuturor coeficienților (parametrilor) algoritmilor de reglare, care sînt apoi memorați în memorii de tip RAM nevolatile (cu baterii-tampon). Menținerea acestor parametri, determinați experimental, în memorii nevolatile este obligatorie pentru a evita reacordarea experimentală, la fiecare întrerupere a alimentării de la rețea a RD, și pierderea informației din aceste memorii.

• Regimul de autoacordare — cu strategie memorată de abordare automată — constă în două etape care se efectuează automat: de identificare automată a procesului și, respectiv, de acordare automată a coeficienților algoritmului de reglare.

Algoritmii cu autoacordare ai RD dotate cu microprocesoare de uz general de nivel mediu sînt încă costisitori din punctul de vedere al consumului de memorie (internă) și al timpului de calcul.

Rutina de autoacordare este lansată în execuție de operatorul RD sau ciclic (la intervale mai mari de timp decît durata răspunsurilor indiciale) la constatarea vizuală, respectiv automată, a alterării indicilor de calitate ai regimurilor tranzitorii și staționare.

Dintre RD monocanal dotate cu astfel de algoritmi pot fi amintite cele de tip LFE, ERO, iar dintre RD multicanal, tipurile STAR și VDO [3].

În RD multicanal, un singur algoritm de identificare și acordare automată poate deservi multiplexat fiecare buclă monovariabilă de reglare, situație mult mai eficientă din punct de vedere economic decît prin utilizarea a cîte unui algoritm de autoacordare pentru fiecare buclă.

Regimurile de telecomandă de la calculatorul supervizor se utilizează în aplicațiile în care RD este inclus într-un sistem distribuit de conducere.

• Regimul de comandă a referinței (SCC — *S*upervisory *C*omputer *C*ontrol) se folosește în aplicațiile cu structura de mai sus, în care referința externă a RD se obține, din punct de vedere analitic, printr-o procedură de optimizare, de regulă staționară, efectuată în calculatorul supervizor ce dispune de resurse mult mai mari decît RD. Calculele de optimizare se efectuează *off-line*, emiterea laRD făcîndu-se astfel încît variația în timp a referinței optimizate să poatăfi urmărită de proces.

• Regimul de comandă a ieșirii RD din calculator (DDC — *D*irect *D*igital *C*ontrol) este utilizat în sistemele distribuite de conducere, în care pe nivelul primar se folosesc RA analogice. De regulă, acest regim nu este specific RD, datorită modului mai complicat de realizare electronică a etajului de comandă manuală a RD (ieșire), față de cazul analogic.

În această configurație, în cazul funcționării în buclă automată, algoritmii de reglare sînt implementați în calculatorul supervizor.

11.1.5. **Plaje de valori pentru semnalele de i/e din RD**

• Semnale analogice:

— în tensiune: $0 \div 5$ V; $0 \div 10$ V, $1 \div 5$ V, $1 \div 10$ V;

— în curent: $0 \div 10$ mA; $2 \div 10$ mA, $0 \div 20$ mA, $4 \div 20$ mA.

Semnalele de curent se utilizează în situația unor distanțe mari dintre RD, traductoare (TR) și elemente de execuție (EE). Semnalele de tensiune se folosesc la distanțe mici, cînd RD este amplasat în camere de comandă și conectat cu diverse aparate de înregistrare și vizualizare.

• Semnale binare de intrare

Datorită disponibilității, RD dispun de interfețe (simple) de intrări numerice, prin care preiau din proces diverse variabile binare (auxiliare) de alarmare și interblocare. Intrările binare sînt optoizolate inclusiv în nivelurile logice TTL sau CMOS. În cazul unor distanțe mari dintre detectorul binar din proces și RD informația se transmite prin semnale logice de curent.

• Semnale binare de ieșire

Aceste tipuri de semnale sînt de natură logică, în niveluri de tensiune TTL și CMOS, provenind din etaje finale optoizolate, *open-colector* sau *open-drain*. Se mai utilizează ieșiri discontinue pe relee statice (triac, tiristor) sau pe relee electromagnetice.

11.1.6. Introducerea parametrilor

În principal, parametrii de acordare și control se introduc prin potențiometre, decade BCD, tastaturi zecimale.

Aceste modalități au fost utilizate cronologic, în funcție de accesibilitatea, gabaritul și prețul de cost al schemelor.

Variantele mai vechi de RD folosesc potențiometre logaritmice, cu o precizie de introducere a parametrilor scăzută ($\leqslant 15\%$); mărimile analogice (tensiuni c.c) sînt apoi convertite în format binar prin utilizarea multiplexată a unui convertor A/N. Atît precizia, cît și prețul de cost (CAN, MPx-analogic) au dus la reducerea folosirii acestei metode în RD actuale.

În unele variante de RD se aplică direct conversia zecimal-binară, fiecărei cifre zecimale corespunzîndu-i cîte o decadă BCD. Soluția are o serie de inconveniente: decadele BCD au un gabarit mare și preț de cost ridicat. Pentru un număr mare de parametri introduși cu o precizie de cel puțin 1%, numărul foarte ridicat al decadelor BCD și al circuitelor combinaționale aferente determină ineficiența acestei metode.

Avantajul lor constă în accesul independent la valoarea fiecărui parametru și memorarea neelectrică a parametrilor la căderea tensiunii de alimentare a RD.

Introducerea parametrilor prin tastaturi dotate cu interfețe programabile este soluția întrebuințată în toate RD moderne. Tastele sînt folosite multiplexat, iar parametrii introduși sînt memorați în memorii nevolatile. Precizia de introducere a parametrilor este $\leqslant 0{,}1\%$. De asemenea, gradul de integrare al schemelor este foarte ridicat.

11.1.7. Afișarea mărimilor

Panourile frontale ale RD monocanal sînt prevăzute cu bargraphe analogice și afișaj digital ($2 \div 4$ cifre) pentru mărimile sistemice ale buclei automate: referință, măsură, eroare, comandă etc. Pe panoul lateral, cu acces protejat prin chei *software*, parametrii de acordare și control sînt vizualizați cu precizii mari pe afișaje digitale.

11.2. DESCRIEREA UNOR RD UZUALE

• *Regulatorul KENT P 4000 H-FM* este un RD monocanal cu un panou frontal $a \times b = 75 \times 175$ mm². Dispune de posibilitatea afișării mărimilor sistemice și darea comenzilor, precum și de un panou lateral complex cu taste (senzitive) zecimale și afișaj digital ($6 \div 10$ cifre) pentru vizualizarea coeficienților și a unor mesaje prescurtate alfanumerice referitoare la configurația buclelor și semnificația unor coeficienți. Accesul la acest panou este protejat prin chei *software*.

Interfața de intrări analogice permite accesul a 4 mărimi. RD include și o interfață de intrări binare în niveluri CMOS ($0 \div 10$ V).

Algoritmii de reglare sînt de tip PID, permițînd operarea cu „zonă moartă", reglarea de raport ($0{,}1 \div 10$) și filtrarea numerică cu frecvență de tăiere programabilă. Diversele module P, PI, PD și PID permit configurarea

în cascadă sau în alte configurații sistemice, utilizînd reacții *feedback* multiple și reacții *feedforward*. Există posibilitatea programării cîștigului.

Perioada de eșantionare în regim automat este de 250 ms, iar în regim manual, de 125 ms.

Consumul de putere maxim este de aproximativ 9 W. Memoria RAM-CMOS a parametrilor este alimentată în rezerva cu baterii Cd-Ni, cu durată maximă de 10 ani.

• *Regulatorul TELEPERM D-SIEMENS*, de tip monocanal, dispune de un singur panou frontal, pentru introducerea parametrilor, comenzilor și afișarea parametrilor și mărimilor sistemice.

Parametrii de acordare, K_R, T_i și T_d, sînt introduși analogic prin potențiometre cu o precizie $\leqslant 15\%$, fiind vizualizați pe bargraph cu scară logaritmică de valori folosită multiplexat.

Comparatorul de eroare al buclei automate este implementat analogic. Toate impulsurile de reacție *feedback* (maximum 3) se însumează algebric pe suport analogic, apoi rezultatul este convertit prin CAN în format binar.

RD permite reglarea de raport, dar coeficientul de raport este fixat analogic ca și parametrii de acordare.

• *Regulatorul STAR (Self-Tuning-Adaptive Regulator)-ASEA NOVATUNE* este de tip adaptiv cu autoacordare, multicanal (maximum 15 bucle), constituindu-se într-o familie [11]. Aceste RD sînt principial module funcționale particulare dintr-o bibliotecă de sistem, care reprezintă o parte rezidentă a *software*-ului de proces.

Echipamentul este configurat pentru o anumită aplicație prin alegerea și combinarea anumitor module *software* funcționale printr-un procedeu de dialog interactiv.

Se remarcă faptul că RD de tipul menționat, odată configurate pentru o aplicație particulară, nu mai pot fi folosite arbitrar în alte aplicații. Acest fapt nu constituie o constrîngere, întrucît singurele modificări sînt cele care afectează memoriile ROM (EPROM) în care este înscrisă configurația particulară a aplicației, cu avantajul că memoriile respective sînt și nevolatile, evitîndu-se astfel utilizarea bateriilor-tampon. Algoritmii uzuali de reglare, de tip PID, permit compensarea perturbațiilor *(feedforward)*.

11.3. PERFORMANȚE ALE UNOR MICROPROCESOARE UTILIZATE ÎN ELABORAREA RD

Performanțele sistemului de calcul în timp real al RD sînt decisive atît pentru realizarea multifuncționalității sale, cît și pentru utilizarea celor mai moderne concepte ale teoriei sistemelor care se implementează prin algoritmi de reglare cu un grad avansat de complexitate din punct de vedere matematic.

Cele mai uzuale RD folosesc microprocesoare de uz general de 8/16 biți (ZILOG Z80, INTEL 8085, 8080) sau, în variantele mai moderne, de viteză mărită, coprocesoare aritmetice în tandemuri (INTEL 8086/8087 sau INTEL 80286/80287, NATIONAL SEMICONDUCTOR NS 32016/32081 ș.a.).

Prin atașarea la aceste microprocesoare de uz general a unor multiplicatoare *hardware* de viteză — care pot realiza o multiplicare de 24×24 biți în virgulă fixă, pe durata a 200 ns, iar pentru cuvinte de 16×16 biți, în

34 ns [1] —, se poate mări viteza de calcul a UC-RD, dar viteza de transfer și prelucrare a datelor prin interfețele de I/E, via microprocesor, rămîne totuși prea scăzută pentru procesele rapide și foarte rapide.

O soluție care determină creșterea vitezei se referă la utilizarea microcontrolerelor — microprocesoare *single-chip*, proiectate pentru a fi folosite în aplicații particulare. Viteza de calcul, din punctul de vedere al multiplicării de cuvinte, egală cu 16/32 biți în virgulă fixă, este comparabilă cu cea a microprocesoarelor de uz general, dar ele încorporează în același cip componente ale interfețelor de I/E (multiplexoare analogice 1×4, convertoare A/N, ceas programabil, modulatoare de impulsuri de comandă în lățime sau frecvență, în ieșire etc.). Astfel de microcontrolere pe 16 biți sînt MOTOROLA MK 68200, NEC μPD 78312 și INTEL 8096.

Cele mai rapide unități centrale (UC), folosind procesoare de semnal în tehnologie VLSI, sînt produse de vîrf, utilizate în implementarea filtrelor digitale (radar, prelucrări de semnale vocale, imagini etc.), ale căror dimensiuni au permis introducerea lor în RD moderne abia în ultimii ani. Au devenit accesibile aplicațiilor industriale și de altă natură componente diverse, dintre care amintim: NEC 7720, TMS-32010 sau 32020 (Texas Instruments), MB 8784 (Fujitsu), STC-DSP 128 ș.a. [10]. În [1] se menționează existența unor aplicații practice ale procesoarelor de semnal în RD pentru procese foarte rapide.

O comparație a principalelor performanțe ale microprocesoarelor de uz general, microcontrolerelor (s-a ales ca tip reprezentativ INTEL 8096) și procesoarelor de semnal este ilustrată în tabelul 11.3.

Tabelul 11.3

COMPARAȚIE ÎNTRE MICROPROCESOARELE DE NIVEL MONDIAL [1]

Funcții — performanțe	Microprocesoare	Microcontrolere	Procesor de semnal (PS)
1	2	3	4
Viteza de calcul în virgulă mobilă	mică sau medie, cu coprocesor aritmetic (5-15) μs/multiplicare	mică	mică (sau nu utilizează acest format aritmetic al datelor)
Viteza de calcul (multiplicare 16 × 16 biți în virgulă fixă)	5-12 μs	7 μs	0,1—0,3 μs
Lungimea cuvîntului UC	16—32 biți	16 biți	16—35 biți
Spațiul de adresare al programelor	> 1 MB	64 KB	1,5 ÷ 128 KB
Spațiul de adresare al datelor	> 1 MB	64 KB	128 × 588 × (16) biți RAM în același cip. PS au memorii distincte pentru date și pentru instrucțiuni.
Convertoare A/N în același cip cu UC	—	4 ÷ 8 A/N, canale pe 10 biți	—

Tabelul 11.3 (continuare)

1	2	3	4
Interfețe I/E speciale	—	Orologiu de proces programabil, modulator în lățime sau frecvență ș.a.	—
Memorie ROM internă (în același cip cu UC)	—	8 KB	aproape toate PS au
Viteza cerută memoriilor externe	medie	medie	25-150 ns
Întreruperi	flexibil, utilizînd controler de întreruperi	7 niveluri interne 1 nivel extern	0-3 niveluri

Aritmetica și formatul datelor

Aritmetica și formatul datelor prezintă o importanță deosebită în realizarea vitezei de calcul cerute de aplicație. La ora actuală RD moderne ce utilizează microprocesoare de uz general sau microcontrolere au implementate biblioteci aritmetice în virgulă mobilă pe 32 biți sau folosesc coprocesoare aritmetice specializate în virgulă mobilă.

Totuși, RD uzuale utilizează cu precădere aritmetica în virgulă fixă cu date pe 16 biți și multiplicări de 16 × 16 biți cu rezultat pe 32 biți, trunchiat sau rotunjit la cei mai semnificativi 16 biți.

Viteza de calcul și frecvența de eșantionare

Viteza de calcul (depinzînd de frecvența ceasului UC, cît și de structurile de prelucrare a datelor) este importantă în automatizarea acționărilor electrice de mare viteză.

Un tabel comparativ al cîtorva microprocesoare reprezentative solicitate în aplicații de filtrare digitale, similare cu cele de reglare numerică, liniară, este dat în tabelul 11.4. Se indică atît frecvența maximală a ceasului UC, cît și frecvența cea mai mare (perioada minimă) de eșantionare realizabilă în tipul de aplicații precizat mai sus.

Tabelul 11.4

FRECVENȚE DE EȘANTIONARE MAXIMALE ATINSE ÎN FILTRAREA DIGITALĂ

Microprocesor	Clock—UC [MHz]	Frecvența de eșantionare maximă, $f_{eș}$ [kHz]	Perioada minimă de eșantionare, $T = 1/f_{eș}$
Intel 8086	8	2	0,5 ms
Z 8000	5	2	0,5 ms
MC 68000	10	4	0,25 ms
NS 32016	10	5	0,2 ms
TMS 32010 (PS)	—	31	32 μs

Datorită prețului, accesibilității și experienței obținute în utilizarea lor, majoritatea RD uzuale (de serie) sînt implementate în structuri *hardware*, în jurul microprocesoarelor de uz general, ale căror cîteva caracteristici sînt redate în tabelul 11.5.

Tabelul 11.5

MICROPROCESOARE ACCESIBILE DE UZ GENERAL

Tipul microprocesorului	Lungime cuvînt UC [nr. biți]	Număr de instrucțiuni	Capacitate de memorie adresabilă	Frecv. UC (clock) [MHz]
Intel 8080A	8	78	64 KB	2÷3
Intel 8085	8	80	64 KB	3÷5
Intel 8086	16	97	1 MB	5÷8
Zilog-Z80	8	158	64 KB	2,5
Zilog-Z8000	16	110	8 MB	5
Motorola MC 6800	8	72	64 KB	1÷2
MC 68000	16	61	8 MB	12,5

BIBLIOGRAFIE

1. Hanselmann, H., *Implementations of Digital Controllers — A Survey*, Automatica, 23, *1*, 1987, p. 7-32.

2. Călin, S.; Dumitrache, I.; Nițu C.; Munteanu, F.; Iorga, V.; Dumitriu, S., *Reglarea numerică a proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1984.

3. Feștilă, C., *Regulatoare digitale din fabricația de serie. Aspecte comparative*, Studiu, Institutul Politehnic, Cluj-Napoca, 1987.

4. Gupta, A.; Toong, H. D., *Microcomputere in industrial control applications*, IEEE Trans. Ind. Electron, IE-31, *109*, 1984.

5. Nagle, H. T.; Nelson, V. P., *Digital filter implementation on 16-bit microcomputers*, IEEE Micro, 1981.

6. Essig, D. C.; Erskine, E., *A second generation digital signal processor*, IEEE Trans. Ccts., Syst., CAS-33, *196*, 1986.

7. Fettweis, A., *Digital circuits and systems*, IEEE Trans. Ccts. Syst. CAS-31, *31*, 1984.

8. Crowell, C. D., *Floating-point arithmetic with the TMS 32020*, Texas Instruments Application Report, 1985.

9. MacSorley, O. L., *High-speed arithmetic in binary computers*, IRE. Proc., *49*, 1967.

10. Steinlechner, S. E.; Auer, E.; Lueder, E., *A fast digital signal processor without multipliers*, Proc. Conf. Ccts. Theory ECCTD, Stuttgart, 1983.

11. Bengtsson, G.; Egardt, B., *Experiences with self-tuning control in the process industry*, 9th IFAC Congress, CS7, 1984.

12. Sîrbu, M., *Sisteme și echipamente de automatizare cu microprocesoare*, Al 3-lea Simpozion Național de Teoria Sistemelor, 1, Craiova, 1984, p. 8-17.

13. Călin, S.; Tertișco, M.; Dumitrache, I.; Popeea, C.; Popescu, D., *Optimizări în automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1979.

14. Papadache, I., *Automatizări industriale*, Editura Tehnică, București, 1978.

15. Davidoviciu, A.; Diatcu, E.; Freizdon, I. R.; Filippov, L. G., *Minicalculatoare și microcalculatoare în conducerea proceselor industriale*, Editura Tehnică, București, 1983.

16. * * * P4000 H-FM-KENT-TIEGHI, BBC, prospect de firmă, 1987.
17. * * * P96 M-KENT, BBC prospect de firmă.
18. * * * TELEPERM D-SIEMENS, prospect de firmă.
19. * * * EUROTHERM 818, S.U.A., prospect de firmă, 1988.
20. * * * CONTROL INSTRUMENTATION, C.R.L., 452, 451, prospect de firmă, 1987.
21. * * * CAL 9000, CONTROL & AUTOMATION LTD., prospect de firmă, 1987.
22. * * * DIGITRIC P, H&B, prospect de firmă, 1988.
23. * * * PROTONIC PE, H&B, I. Trends, 1985.

CUPRINS

Prefață 5

Capitolul 1. REGULATOARE DIGITALE 7

Bibliografie 11

Capitolul 2. FACTORI DETERMINANȚI AI PRECIZIEI REGLĂRILOR NUMERICE 13

2.1. Considerații preliminare 13
2.2. Aspecte matematice ale operației de eșantionare 14
2.2.1. Eșantionarea ideală 14
2.2.2. Eșantionarea reală 17
2.3. Aspecte practice privind eșantionarea mărimilor de interes sistemic 21
2.3.1. Introducere 21
2.3.2. Extrapolatoare utilizate în reconstituirea comenzilor continue la ieșirea RD 23
2.4. Cuantificarea în amplitudine și în timp a semnalelor de intrare. Erori care depind de CAN 26
2.5. Perioada de eșantionare în sistemele de reglare numerice 29
2.5.1. Relații empirice de alegere a perioadei de eșantionare 29
2.5.2. Influența frecvenței de eșantionare asupra modelelor discrete reale. Situații-limită 31
2.5.3. Aplicații 34
2.6. Forma internă de reprezentare a numerelor în RD 37
2.6.1. Considerații generale 37
2.6.2. Erorile maxime introduse prin operațiile de trunchere sau rotunjire 39
2.6.3. Efecte sistemice negative 39
2.7. Scalarea internă a mărimilor sistemice în reprezentarea fracționară 42
2.7.1. Normarea mărimilor analogice de intrare în RD 43
2.7.2. Denormarea comenzii interne u_k^{UC} 45
2.7.3. Factorii de transfer intrări/ieșiri analogice ai RD 49
2.8. Calibrarea în regim staționar a EE și TR în sistemele unificate de reglare 52
2.9. Calibrarea în regim dinamic a TR și EE 58
2.10. Afișarea valorilor mărimii reglate (măsurate) provenind din traductoare liniare .. 59
2.11. Traductoare neliniare. Metode de liniarizare 61

Bibliografie 65

Capitolul 3. MODULE AUXILIARE DE CONTROL IMPLEMENTATE PRIN SOFT-WARE ÎN REGULATOARELE DIGITALE 67

3.1. Controlul limitelor min/max ale comenzii 68
3.2. Controlul gradientului comenzii 68
3.3. Controlul gradientului mărimii reglate (măsurate) 68
3.4. Filtre numerice programabile utilizate în RD 69

Bibliografie 73

Capitolul 4. ANALIZA ÎN PSEUDOFRECVENȚĂ A SISTEMELOR DISCRETE ASPECTE TIPICE 74

4.1. Introducere 74
4.2. Transformări omografice 75
4.3. Dihotomia scalei de timp real a sistemelor fixate 77
4.4. Trihotomia scalei de timp real a sistemelor fixate 83
4.5. Cazul general de analiză în frecvență 87
4.6. Efecte sistemice neliniare introduse de interfețele de intrare/ieșire. Analiza în frecvență 89

Bibliografie 92

Capitolul 5. CORECȚII ÎN PSEUDOFRECVENȚĂ RELATIVĂ CU ALGORITMI LEAD-LAG DISCREȚI 93

5.1. Considerații preliminare de proiectare 93
5.2. Algoritmul *lead-lag* discret cu avans de fază 94
5.3. Algoritmul *lead-lag* discret ca întîrziere de fază 96
5.4. Forma reală implementabilă a algoritmului 99

Bibliografie 101

Capitolul 6. SINTEZĂ DISCRETĂ PRIN METODA POLI-ZEROURI. PROIECTARE ALGORITMIZATĂ ASISTATĂ DE CALCULATOR 102

6.1. Introducere .....
6.2. Alegerea funcției de transfer discrete a sistemului închis 102
6.2.1. Tipuri uzuale de modele discrete ale părții fixate, $H_f(z)$ 103
6.2.2. Tipuri de funcții de transfer dorite ale sistemului închis discret, $H_0(z)$ 103
6.3. Indici de calitate ai regimurilor staționare standard 106
6.4. Dependența indicilor de calitate ai răspunsului indicial de configurația poli-zerouri discretă 109
6.4.1. Ipoteze preliminare. Analogia cu cazul continuu 109
6.4.2. Definirea unghiului α, tipic configurației $H_0(z)$ 111
6.4.3. Indici de calitate ai răspunsului indicial continuu 111
6.5. Domenii de valori recomandate pentru indicii de calitate și parametrii răspunsului indicial discret 112
6.6. Determinarea valorii absolute a zeroului z_1 115
6.7. Proiectarea algoritmizată a funcției $H_0(z)$ 116
6.7.1. Prescripții generale de proiectare 116
6.7.2. Rutina PZ 117
6.7.3. Optimizarea zeroului z_1 117
6.8. Micșorarea erorii de viteză 121
6.8.1. Efectele introducerii dipolului integrator 121
6.8.2. Proiectarea dipolului integrator 121
6.9. Proiectarea algoritmului de reglare cu ajutorul funcției $H_0^{IY}(z)$ 123
6.10. Aplicarea metodei poli-zerouri pentru procese cu timp mort 124

Bibliografie 132

Capitolul 7. PROIECTAREA DIRECTĂ ÎN DOMENIUL TIMP. RESTRICȚII PRACTICE DE IMPLEMENTARE ÎN REGULATOARELE DIGITALE 133

7.1. Metodologia de proiectare 133
7.1.1. Ipoteze preliminare de proiectare 133
7.1.2. Obținerea funcției de transfer discrete a sistemului închis 134
7.1.3. Studiul cauzalității funcției de transfer a RA 135
7.1.4. Alegerea duratei regimului tranzitoriu, t_r 138
7.1.5. Numărul maxim de multiplicări și ordinul maxim de regresie al algoritmului de reglare 139

7.1.6. Aspecte privind optimizarea comenzii 141
7.2. Exemple 145
7.2.1. Algoritm de reglare cauzal la limită 145
7.2.2. Algoritm de reglare strict cauzal 147
7.2.3. Algoritm cauzal pentru procese cu zerouri stabile negative 148
7.2.4. Optimizarea comenzii 150
7.3. Concluzii referitoare la implementarea algoritmilor de reglare proiectați 151
7.3.1. Numărul maxim de coeficienți ai algoritmului de reglare 151
7.3.2. Ordinul maxim de regresie al algoritmului de reglare și numărul maxim de regresori 151
7.3.3. Optimizarea comenzii 152
7.3.4. Modificarea amplitudinii referinței 152
7.3.5. Condiții inițiale nenule 153
7.3.6. Eroarea de viteză 156

Bibliografie 159

Capitolul 8. ALGORITM DE REGLARE DISCRET CU CÎȘTIG VARIABIL. ADAPTARE ÎN REGIM STAȚIONAR 159

8.1. Descrierea de principiu a algoritmului 159
8.1.1. Configurația algoritmului de reglare 159
8.1.2. Etape de proiectare 160
8.2. Aplicație. Sinteză discretă prin utilizarea de funcții $H_0(z)$ cu un pol real 161
8.2.1. Etapele de proiectare și calcul 161
8.2.2. Implementarea algoritmului 164
8.3. Efectul variației unor parametrii 164
8.4. Modificarea algoritmului în cazul unor perturbații parametrice 165
8.4.1. Ipoteze 165
8.4.2. Modificarea algoritmului. Adaptarea staționară 166
8.5. Algoritmul de reglare. Eroarea de poziție nulă 168
8.6. Modalități practice de implementare a algoritmului 170
8.7. Aplicație 171

Bibliografie 174

Capitolul 9. REGULATOARE DIGITALE CU ALGORITMI PID DISCREȚI 175

9.1. Algoritmi PID 176
9.1.1. Algoritmi PID discreți necvasicontinui 176
9.1.2. Algoritmi PID-F discreți cvasicontinui 183
9.2. Inițializarea algoritmilor PID și a filtrelor numerice 188
9.2.1. Efectele condițiilor inițiale asupra SA 188
9.2.2. Inițializarea filtrelor numerice 188
9.2.3. Inițializarea algoritmului PID discret 191
9.3. Diagramele de timp ale calculului comenzii 192
9.3.1. Algoritmi cauzali la limită 192
9.3.2. Algoritmi strict cauzali 194
9.4. Algoritmi de reglare cu predictori unipas 195
9.4.1. Metode de proiectare a algoritmilor strict cauzali 195
9.4.2. Predictori liniari unipas 197
9.4.3. Algoritmi PID discreți cu predictori unipas 199
9.4.4. Eroarea de predicție. Exemple 203
9.5. Algoritmi PID în structuri sistemice neliniare 203
9.5.1. Algoritmi PID cu cîștig adaptiv 204
9.5.2. Structuri neliniare cu algoritmi PID 206
9.6. Acordarea algoritmilor PID discreți 208
9.6.1. Acordarea algoritmilor PID discreți cvasicontinui 208
9.6.2. Acordarea algoritmilor PID discreți cu ajutorul criteriilor „integrale“ 212
9.6.3. Algoritmi de identificare 220
9.7. Corecții în pseudofrecvențe cu algoritmi PID discreți 233

9.7.1. Corecţii şi compensare prin anulare în pseudofrecvenţe relative cu algoritmi PID discreţi cu interinfluenţă nulă 233
9.7.2. Corecţia şi compensarea în frecvenţă cu algoritmi PID discreţi, cvasi-continui, cu interinfluenţă nenulă 241
9.8. RD cu ieşiri discontinue. Aspecte de principiu 241
9.8.1. Elemente de execuţie 242
9.8.2. RD-PID cu ieşiri discontinue 243

Bibliografie 245

Capitolul 10. ALGORITMI DE REGLARE MULTIVARIABILĂ. SINTEZA DISCRETĂ NON-INTERACTIVĂ 247

10.1. Deziderate impuse proiectării algoritmilor de reglare multivariabilă implementaţi în RD 247
10.2. Aspecte practice, tipice reglării multivariabile discrete 247
10.3. Aspecte teoretice ale metodelor de sinteză non-interactivă a sistemelor continue .. 250
10.3.1. Decuplare în abordarea structurală 251
10.3.2. Decuplarea în abordarea informaţională 252
10.4. Metodă de sinteză non-interactivă pentru o clasă de sisteme multivariabile cu eşantionare 255
10.4.1. Metodă de decuplare dinamică pentru o clasă de sisteme multivariabile cu interacţiuni, cu frecvenţă de eşantionare unică 256
10.4.2. Metodă de decuplare dinamică pentru o clasă de sisteme multivariabile discrete cu interacţiuni, cu mai multe frecvenţe de eşantionare 267

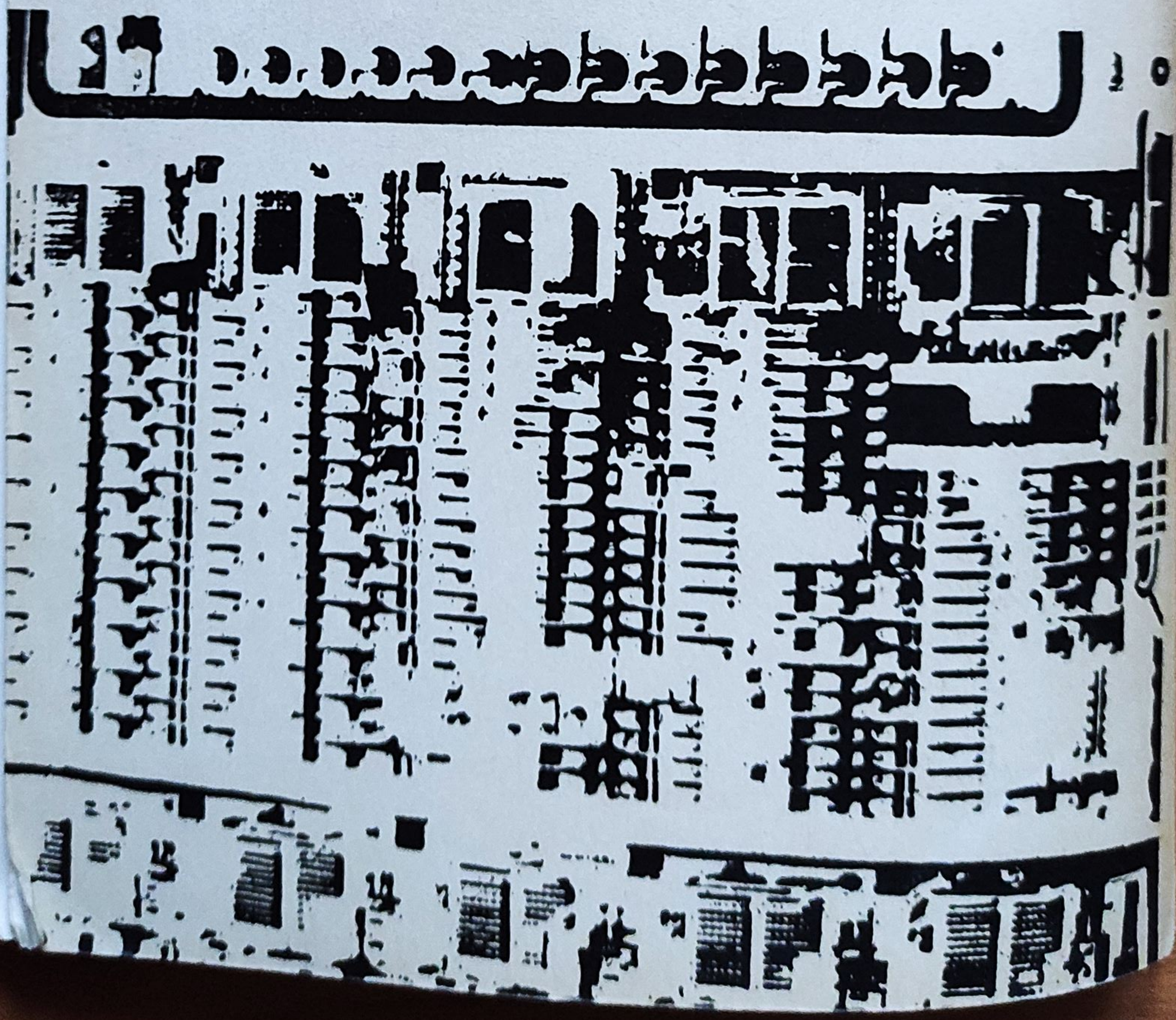
Bibliografie 274

Capitolul 11. ASPECTE COMPARATIVE ŞI CRITERII DE ANALIZĂ PRIVIND CONCEPŢIA REGULATOARELOR DIGITALE SERIE 276

11.1. Funcţii şi criterii de analiză a RD 276
11.1.1. Precizia generală şi fiabilitatea 276
11.1.2. Algoritmi de reglare 276
11.1.3. Funcţii auxiliare 278
11.1.4. Regimuri de lucru. Posibilităţi de configurare 279
11.1.5. Plaje de valori pentru semnalele de i/e din RD 280
11.1.6. Introducerea parametrilor 281
11.1.7. Afişarea mărimilor 281
11.2. Descrierea unor RD uzuale 281
11.3. Performanţe ale unor microprocesoare utilizate în elaborarea RD 282

Bibliografie 285

Editura Militară

ISBN 973-32-0081-6

Lei 25